# Modelos Biomatemáticos

Modelos Epidemiológicos

# Modelo SIR

$$(SIR)\left\{\begin{array}{rcl} S' & = & e - R_0 SI - eS \\ \\ I' & = & R_0 SI - I \end{array}\right.$$

# Modelo SIR

$$(SIR)\begin{cases} S' &= e - R_0 SI - eS \\ \\ I' &= R_0 SI - I \end{cases}$$

## Equilíbrios:

$R_0 \leq 1$ $\qquad S = 1,\ I = 0$ $\qquad$ eq. trivial

$R_0 > 1$ $\qquad S = 1,\ I = 0$ $\qquad$ eq. trivial

$$S = \frac{1}{R_0},\ I = e\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)$$ eq. não trivial

# Estabilidade do equilíbrio trivial

$R_0 < 1$ equilíbrio trivial estável <u>nó estável</u>

# Estabilidade do equilíbrio trivial

$R_0 < 1$ equilíbrio trivial estável <u>nó estável</u>

$R_0 > 1$ equilíbrio trivial instável <u>ponto de sela</u>

# Equílibrio não trivial estável

<u>nó estável</u> se

$$1 < R_0 < \frac{2(1-\sqrt{1-e})}{e} \text{ ou } R_0 > \frac{2(1+\sqrt{1-e})}{e}$$

<u>espiral estável</u> se

$$\frac{2(1-\sqrt{1-e})}{e} < R_0 < \frac{2(1+\sqrt{1-e})}{e}$$

# Modelo SIR com vacina

$$(SIR)_v \left\{ \begin{array}{rcl} S' & = & (1-v)e - R_0 SI - eS \\ \\ I' & = & R_0 SI - I \end{array} \right.$$

# Modelo SIR com vacina

$$(SIR)_v \begin{cases} S' &= (1-v)e - R_0 SI - eS \\ I' &= R_0 SI - I \end{cases}$$

## Equilíbrios:

$R_0 \leq \frac{1}{1-v}$ $\quad S = 1 - v,\ I = 0$ $\quad$ eq. trivial

$R_0 > \frac{1}{1-v}$ $\quad S = 1 - v,\ I = 0$ $\quad$ eq. trivial

$$S = \frac{1}{R_0},\ I = e\left(1 - v - \frac{1}{R_0}\right)$$ eq. não trivial

# Estabilidade do equilíbrio trivial

$R_0 < \frac{1}{1-v}$ equilíbrio trivial estável <u>nó estável</u>

# Estabilidade do equilíbrio trivial

$R_0 < \frac{1}{1-v}$ equilíbrio trivial estável <ins>nó estável</ins>

$R_0 > \frac{1}{1-v}$ equilíbrio trivial instável <ins>ponto de sela</ins>

# Equilíbrio não trivial estável

<u>nó estável</u> se

$$\frac{1}{1-v} < R_0 < \frac{2(1-\sqrt{1-e})}{(1-v)e} \text{ ou } R_0 > \frac{2(1+\sqrt{1-e})}{(1-v)e}$$

<u>espiral estável</u> se

$$\frac{2(1-\sqrt{1-e})}{(1-v)e} < R_0 < \frac{2(1+\sqrt{1-e})}{(1-v)e}$$

# Modelo SIS

$$(SIS) \quad I' \;=\; R_0 I(1-I) - I$$

# Modelo SIS

$$(SIS) \quad I' \;=\; R_0 I(1-I) - I$$

## Equilíbrios:

$R_0 \leq 1 \qquad I = 0 \qquad$ equilíbrio trivial

$R_0 > 1 \qquad I = 0 \qquad$ equilíbrio trivial

$I = 1 - \dfrac{1}{R_0} \qquad$ equilíbrio não trivial

# Estabilidade dos equilíbrios

$R_0 < 1$ equilíbrio trivial estável

$R_0 > 1$ equilíbrio trivial instável

equilíbrio não trivial estável

# Modelo com imunidade temporária

$$\begin{cases} S' = e - R_0 SI - eS + \alpha(1-e)(1-S) \\ \\ I' = R_0 SI - I \end{cases}$$

# Equilíbrios:

$\underline{R_0 \leq 1}$

$S = 1, \ I = 0$ equilíbrio trivial

$\underline{R_0 > 1}$

$S = 1, \ I = 0$ equilíbrio trivial

$S = \frac{1}{R_0}, \ I = (e + \alpha(1 - e))\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)$ equilíbrio não trivial

# Estabilidade do equilíbrio trivial

$R_0 < 1$ equilíbrio trivial estável <u>nó estável</u>

# Estabilidade do equilíbrio trivial

$R_0 < 1$ equilíbrio trivial estável <u>nó estável</u>

$R_0 > 1$ equilíbrio trivial instável <u>ponto de sela</u>

# Equilíbrio não trivial estável

<u>nó estável</u> se

$$1 < R_0 < \frac{2(1 - \sqrt{e + \alpha(1-e)})}{e}$$

$$\text{ou } R_0 > \frac{2(1 + \sqrt{e + \alpha(1-e)})}{e}$$

<u>espiral estável</u> se

$$\frac{2(1 - \sqrt{e + \alpha(1-e)})}{e} < R_0 < \frac{2(1 + \sqrt{e + \alpha(1-e)})}{e}$$

# Modelo com imunidade temporária com vacina

$$\begin{cases} S' = e(1-v) - R_0 S I - eS + \alpha(1-e)(1-S) \\ \\ I' = R_0 S I - I \end{cases}$$

# Equilíbrios:

$$\underline{R_0 \leq \tfrac{e+\alpha(1-e)}{e(1-v)+\alpha(1-e)}}$$

$$S = \frac{e(1-v)+\alpha(1-e)}{e+\alpha(1-e)}, \;\; I = 0 \quad \text{equilíbrio trivial}$$

# Equilíbrios:

$$\underline{R_0 > \tfrac{e+\alpha(1-e)}{e(1-v)+\alpha(1-e)}}$$

equilíbrio trivial:

$$S = \frac{e(1-v)+\alpha(1-e)}{e+\alpha(1-e)}, \quad I = 0$$

equilíbrio não trivial:

$$S = \frac{1}{R_0}, \; I = e(1-v) + \alpha(1-e) - \frac{1}{R_0}(e + \alpha(1-e))$$