Modelos Biomatemáticos

Alessandro Margheri
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Equações às diferenças de primeira ordem

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}$

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$x_1 = f(x_0)$
$x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f \circ f(x_0) = f^2(x_0)$
$x_3 = f(x_2) = f(f(x_1)) = f(f(f(x_0))) =$
$f \circ f \circ f(x_0) = f^3(x_0)$
.
.
$x_{n+1} = f(x_n) = f \circ f((x_{n-1})) = \cdots =$
$f \circ f \circ \cdots \circ f(x_0) = f^{n+1}(x_0)$

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, ao conjunto

$$\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$$

dá-se o nome de *órbita* (ou de *solução*) da equação às diferenças com condição inicial x_0

No caso da E.D.O. escalar

$$x' = f(x)$$

$x(t) = constante = x_0 \in \mathbb{R}$ é uma solução da E.D.O. $\iff$ $f(x_0) = 0$

No caso discreto,
$\{x_0, x_0, x_0, x_0, \cdots\}$ (ou $x_n = x_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$)
é solução de $x_{n+1} = f(x_n) \iff f(x_0) = x_0$.

Definição

Um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ diz-se um ponto fixo de f se

$$f(x_0) = x_0.$$

Um ponto fixo de f diz-se portanto um *equilíbrio da equação* $x_{n+1} = f(x_n)$

Proposição

Seja

$$\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$$

a órbita da equação às diferencas

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

com valor inicial x_0.
Se

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = l \in \mathbb{R},$$

então

$f(l) = l$, isto é, *l é um ponto fixo de f*

Definição Um ponto fixo x_0 de f diz-se um *poço* (ou um *atractor*) se existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ de x_0 tal que

$$y_0 \in \mathcal{U} \quad \Longrightarrow$$

$$f^n(y_0) \in \mathcal{U} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} f^n(y_0) = x_0.$$

Um atractor é um ponto estável.

Definição

Um ponto fixo x_0 de f diz-se uma *fonte* (ou um *repulsor*) se existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$ de x_0 tal que as iteradas através de f de todos os pontos de $\mathcal{U} \setminus \{x_0\}$ saem de $\mathcal{U}$.

$$(\forall y_0 \in \mathcal{U} \setminus \{x_0\} \text{ existe } n_{y_0} \in \mathbb{N} \,:\, f^{n_{y_0}}(y_0) \notin \mathcal{U})$$

Uma fonte é um ponto instável.

Um ponto fixo que não seja uma fonte ou um poço diz-se *neutralmente estável*

Equação Linearizada

Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ um ponto fixo de f.
Chama-se *equação linearizada em torno de* x_0 à equação às diferenças *linear*

$$z_{n+1} = f'(x_0)z_n = [f'(x_0)]^n z_0$$

Recordamos que

$$z_n \to 0 \iff |f'(x_0)| < 1$$

$$|z_n| \to +\infty \iff |f'(x_0)| > 1$$

Teorema

Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ um ponto fixo de f. Então:

1. x_0 é um poço se $|f'(x_0)| < 1$;

2. x_0 é uma fonte se $|f'(x_0)| > 1$;

3. nada podemos concluir acerca das propriedades de estabilidade de x_0 se $f'(x_0) = \pm 1$.

O análogo de uma órbita fechada de uma E.D.O. é um *ponto periódico de* f:

Definição Um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ diz-se um ponto periódico de f de período (mínimo) k se

$$x_j = f^j(x_0) \neq x_i = f^i(x_0)$$
$$i, j = 0, \cdots, k-1, \; i \neq j$$

$$f^k(x_0) = x_0$$

Logo, como no caso de uma órbita fechada, uma órbita periódica repete-se:

$$\{x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_0, x_1, \cdots\}$$

Órbitas periódicas de período k são também chamadas *$k-$ciclos*

Observe-se que se x_0 é um ponto $k-$periódico de f o mesmo é verdade para os pontos

$$x_1, \; x_2, \; \cdots, x_{k-1}$$

do $k-$ciclo

Notamos que

x_0 ponto $k-$periódico de $f \implies x_0$ é um ponto fixo de f^k (mas não de f^j para $1 \leq j \leq k-1$) (e viceversa!)

Logo, também os pontos

$$x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}$$

da órbita $k-$periódica são pontos fixos de f^k (mas não de f^j para $1 \leq j \leq k-1$)

Portanto, a um $k-$ciclo de f correspondem k pontos fixos de f^k (que não são pontos fixos de f^j para $1 \leq j \leq k-1$)

Em particular: $2-$ciclos

Seja x_0 um ponto periódico de período 2 de f:

$$x_1 = f(x_0) \neq x_0, \quad f(x_1) = f^2(x_0) = x_0.$$

Então

$$\{x_0, x_1, x_0, x_1, \cdots\}$$

é um $2-$ciclo de f e

$$\underline{x_0 \text{ é um ponto fixo de } f^2}.$$

x_1 também é um ponto $2-$ periódico e um ponto fixo de f^2.

Há uma bijecção entre os pontos fixos de f^2 que não são pontos fixos de f e os pontos $2-$periódicos de f.

Definição

Seja x_0 um ponto fixo de f^2 mas não de f.
O $2-$ciclo de f correspondente diz-se atractivo (ou repulsivo) se x_0 for um ponto fixo atractivo (ou repulsivo) de f^2.

Seja $\{x_0, x_1, x_0, x_1, \cdots\}$ um dois ciclo de f.

Pela regra da cadeia,

$$\left[f^2(x_0)\right]' = [f(f(x_0))]' = f'(x_1)f'(x_0)$$

$$\left[f^2(x_1)\right]' = [f(f(x_1))]' = f'(x_0)f'(x_1).$$

Logo, conclui-se que

o $2-$ciclo é estável se $|f'(x_0)f'(x_1)| < 1$ e é instável se $|f'(x_0)f'(x_1)| > 1$.

Bifurcações

Quando o segundo membro de uma equação às diferenças depende de um parâmetro, digamos $r \in \mathbb{R},$ ao variar de r obtém-se *uma família de equações às diferencas*:

$$x_{n+1} = f_r(x_n) =$$

$$= f(x_n, r)$$

onde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Por exemplo

$$f_r(x) = f(x,r) = rx, \quad f_r(x) = f(x,r) = rx(1-x)$$

Bifurcações

A dinâmica discreta da equação

$$x_{n+1} = f_r(x_n)$$

depende de r.
Se ao variar de r houver uma alteração abrupta na dinâmica da equação às diferenças, diz-se que essa equação sofreu uma *bifurcação.*

Em geral, ao variar do parâmetro r pode verificar-se uma das seguintes ocorrências:

1. uma variação no numero e na estabilidade dos equilíbrios da equação;

2. uma variação no número e na estabilidade dos ciclos

Os valores do parâmetro ultrapassando os quais se dá uma das ocorrências anteriores chamam-se valores de *bifurcação*

Um equilíbrio x_0 da equação $x_{n+1} = f_r(x_n)$ vai depender de r e será denotado por $x_0(r)$.
Pode-se provar que:

uma condição necessária para ter uma variação do número de equilíbrios é que exista um r_0 tal que o correspondente equilíbrio $x_0(r_0)$ da equação $x_{n+1} = f_{r_0}(x_n)$ satisfaça $f'_{r_0}(x_0(r_0)) = 1$.

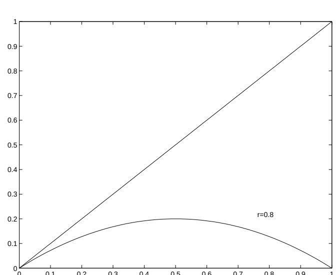
uma condição necessária para ter variação do número de ciclos é que exista um r_0 tal que o correspondente equilíbrio $x_0(r_0)$ da equação $x_{n+1} = f_{r_0}(x_n)$ satisfaça $f'_{r_0}(x_0(r_0)) = -1$.

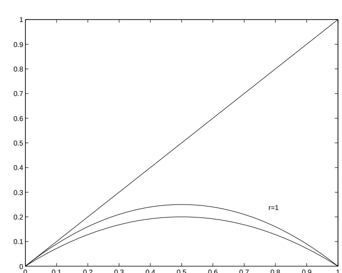
Nós veremos os seguintes exemplos de bifurcações simples de um ponto de equilíbrio.

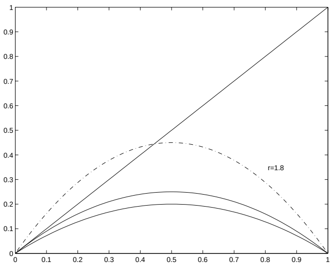
1. um equilíbrio que bifurca em dois equilíbrios e muda as suas propriedades de estabilidade;
2. um equilíbrio que muda de estabilidade gerando-se um $2-$ciclo em torno desse ponto

Equação logística discreta

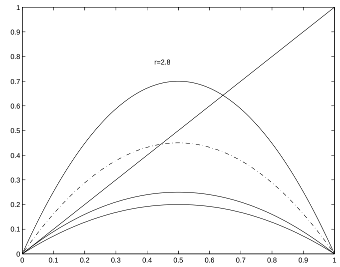
$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad r > 0$$



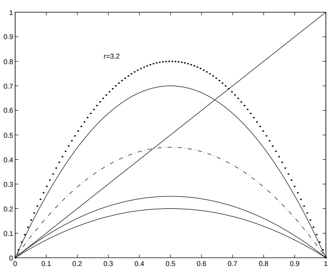




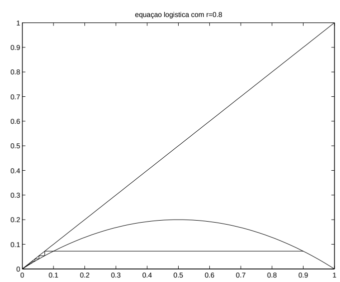
22-3



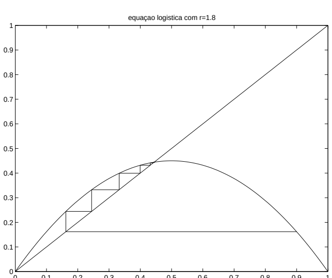
22-4



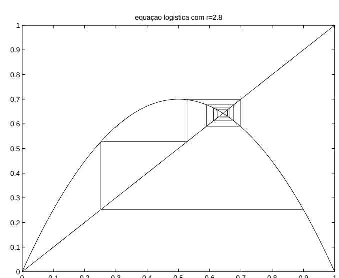
22-5



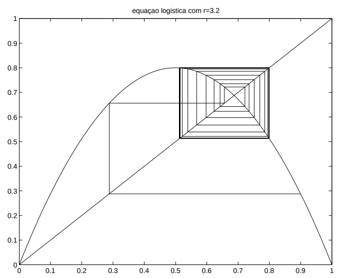
22-6



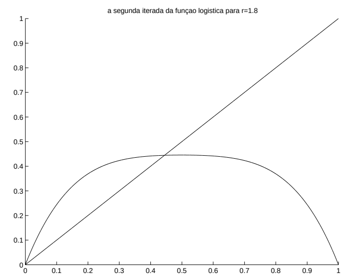
22-7



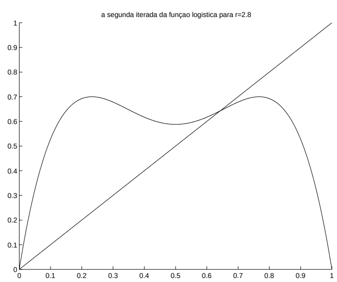
22-8



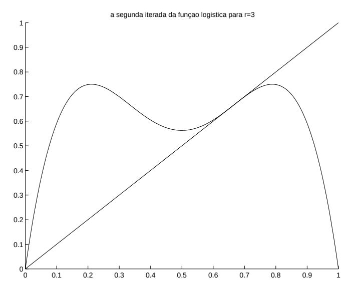
22-9



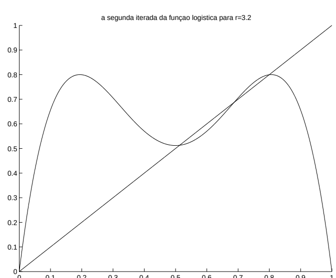
22-10



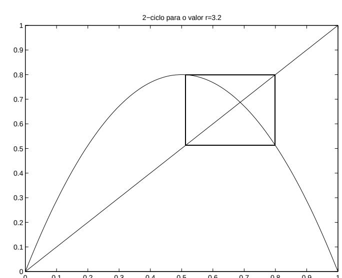
22-11



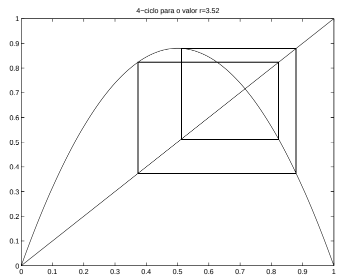
22-12



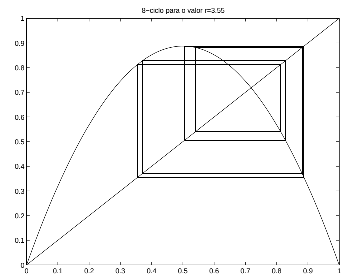
22-13



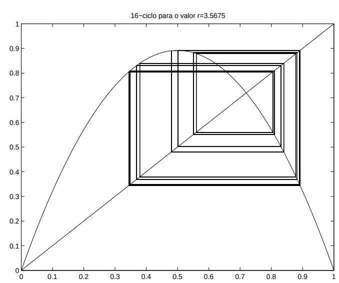
22-14



22-15



22-16



22-17

Diagrama de bifurcação

Para cada $1 < r < 4$ representa-se num diagrama o átractor' da dinâmica contra r

$1 < r < r_1 := 3$ um poço $x_1(r) = 1 - \frac{1}{r}$

Diagrama de bifurcação

Para cada $1 < r < 4$ representa-se num diagrama o átractor' da dinâmica contra r

$1 < r < r_1 := 3$ um poço $x_1(r) = 1 - \frac{1}{r}$

$3 = r_1 < r < r_2 := 1 + \sqrt{6} = 3.449....$
um 2^1 ciclo estável $\{x_1^2(r), x_2^2(r), \cdots, \}$

$1 + \sqrt{6} = r_2 < r < r_3 := 3.544...$ um 2^2 ciclo estável

$3.544 = r_3 < r < r_4 := 3.564$ um 2^3 ciclo estável

$r_n < r < r_{n+1}$ um 2^n ciclo estável

$$r_n \to r_\infty = 3.570... \quad n \to +\infty$$

$$\frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+2} - r_{n+1}} \to 4.6692... \quad n \to +\infty$$

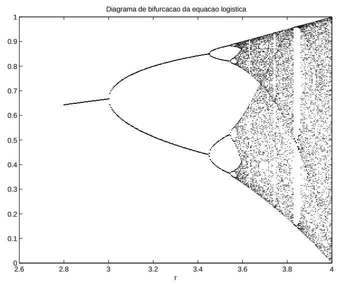


Diagrama de bifurcacao da equacao logistica
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
2.6
2.8
3
3.2
3.4
3.6
3.8
4
r