



Crescimento não regulado

Módulo 2



O boi almiscarado (musk ox)

Distribuição original:
América Norte,
Groenlândia

Depleção por caça
excessiva: 1700-1850

Últimos indivíduos no
Alaska: 1850-60



Ilha de Nunivak

Nunivak Island
31 animais, 1936



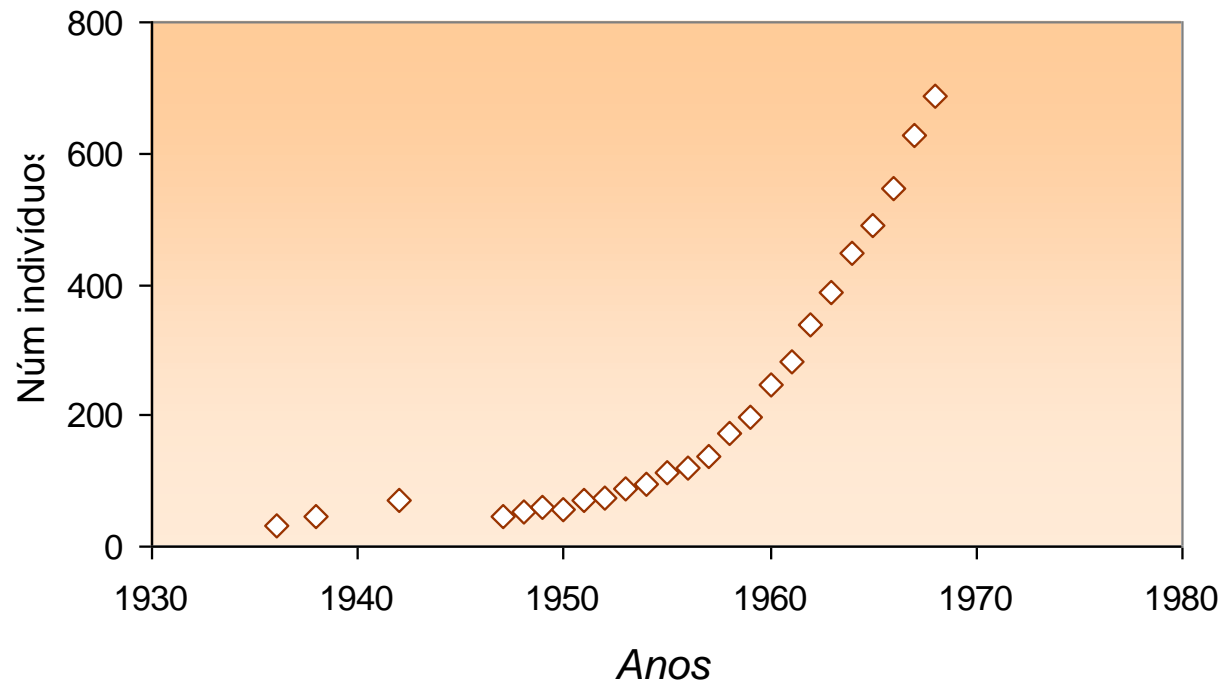
Crescimento geométrico I

População inicial na reserva protegida de Nunivak: 31 indivíduos



Boi almiscarado
(*Ovibos moschatus*)

Boi almiscarado na Ilha de Nunivak (Alaska)





Baleia azul

Distribuição: Principais oceanos do mundo

Monitorização: International Whaling Commission

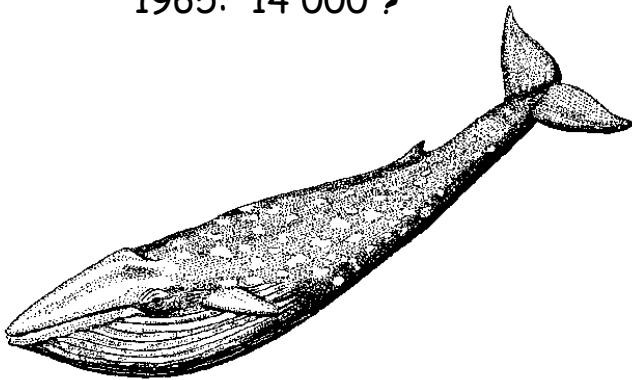


Crescimento geométrico II

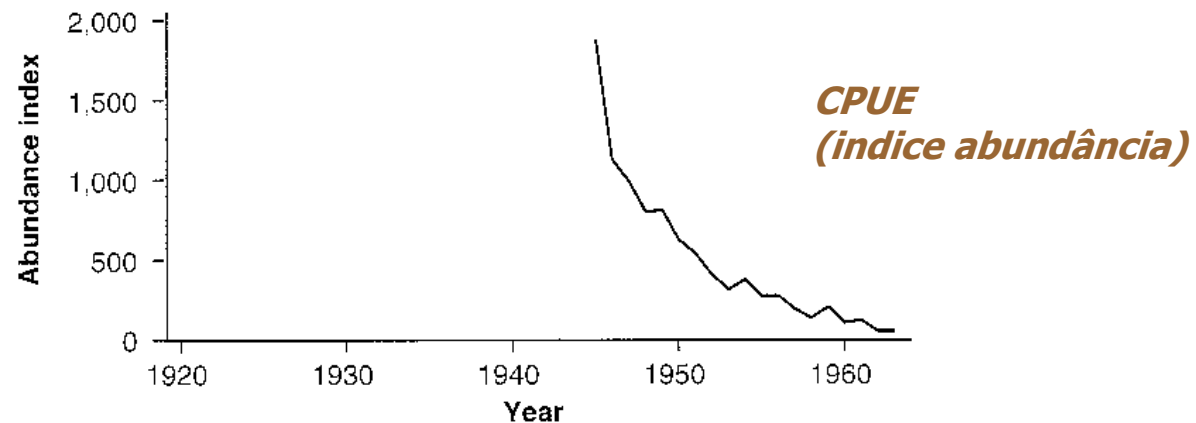
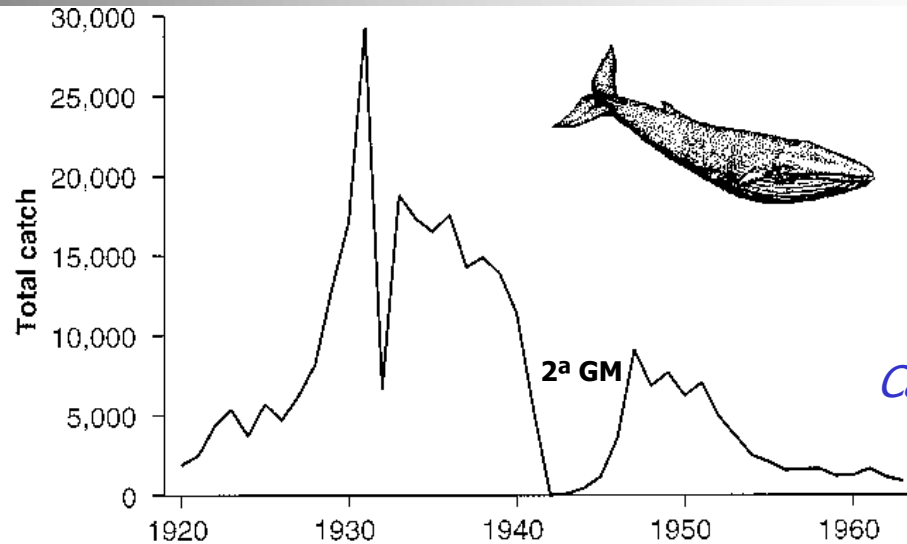
População:

Década de 1930: 50 000 ?

1965: 14 000 ?

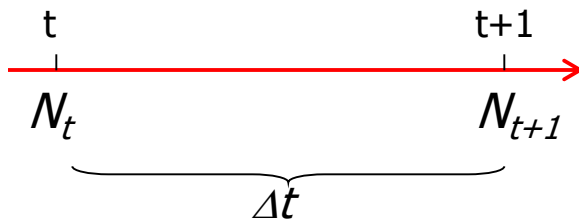


Baleia azul
(*Balaenoptera musculus*)





Medidas de variação de N



$\Delta N > 0$	<i>cresce</i>
$\Delta N = 0$	<i>não varia</i>
$\Delta N < 0$	<i>decrece</i>

$$\Delta N = N_{t+1} - N_t \quad \text{Variação absoluta}$$

$$\frac{N_{t+1} - N_t}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta t} \quad \text{Variação média em } \Delta t \equiv \text{variação tempo}^{-1}$$

$$\frac{1}{N_i} \frac{\Delta N}{\Delta t} \quad \text{Variação média relativa} \equiv \% \text{ variação}$$



Taxa finita de incremento

$$\frac{N_{t+1}}{N_t} = \lambda$$

$\lambda = \textit{taxa finita de incremento}$

O que acontece se λ permanece constante ?

$$N_{t+2} = \lambda N_{t+1}$$

$$N_{t+2} = \lambda \lambda N_t = \lambda^2 N_t$$

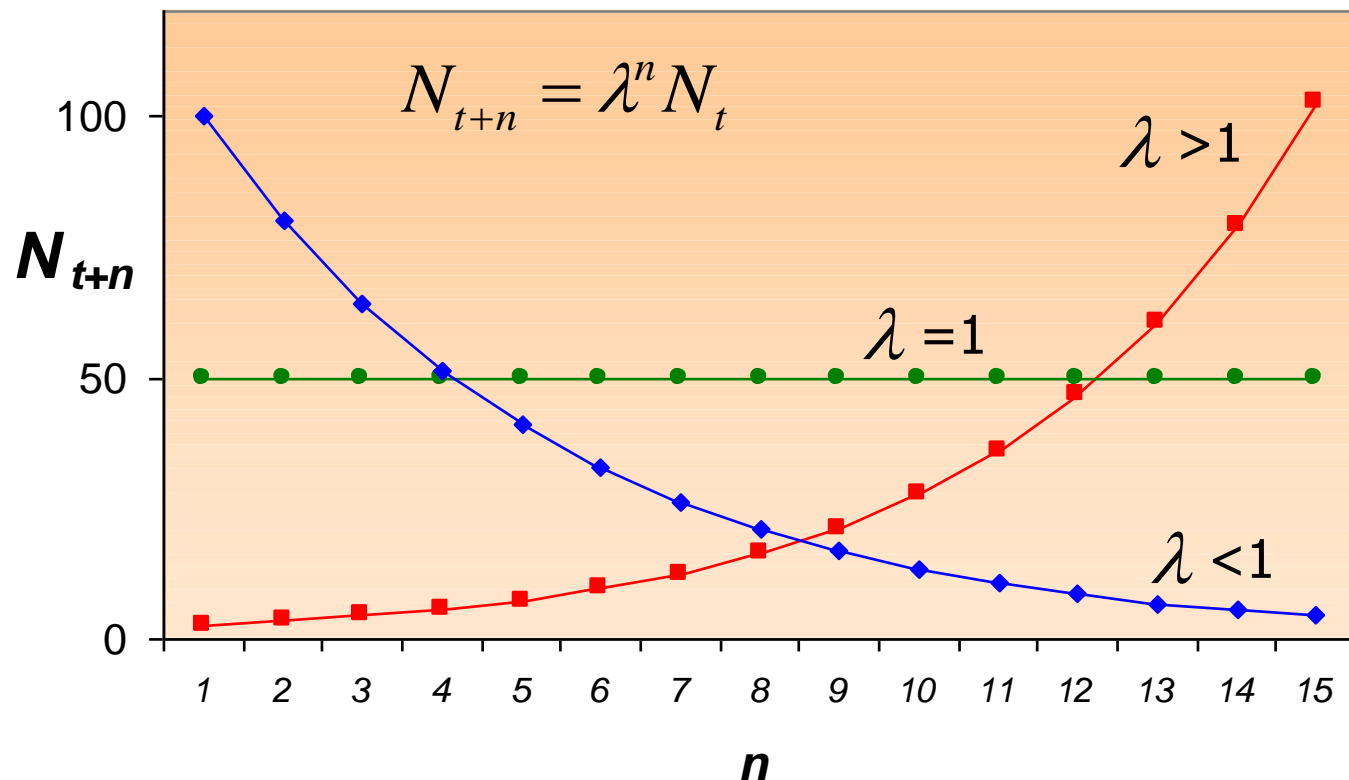
$$N_{t+3} = \lambda N_{t+2} = \lambda^3 N_t$$

...

$$N_{t+n} = \lambda^n N_t$$

$$N_{t+n} = \lambda^n N_t$$

Crescimento geométrico



Revê-se aqui o boi almiscarado ?



Modelo, variáveis, parâmetros

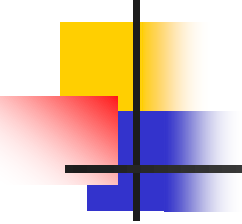
$$N_{t+n} = \lambda^n N_t$$

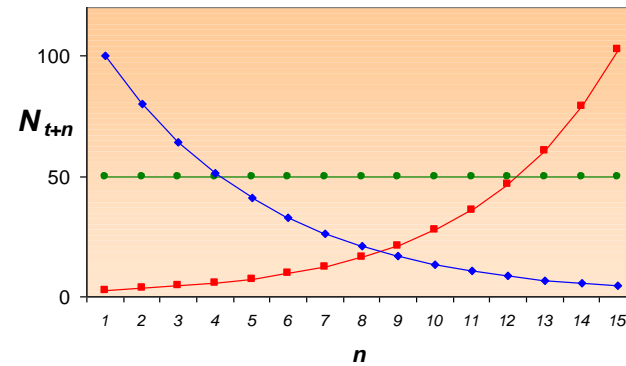
Variável dependente, N

Variável independente, n

Parâmetro

Modelo biomatemático


$$N_{t+n} = \lambda^n N_t$$



λ pode permanecer constante ?

$$\lambda = \frac{N_{t+1}}{N_t} \quad \text{Contribuição de cada indivíduo em } t \text{ para a população em } t+1$$

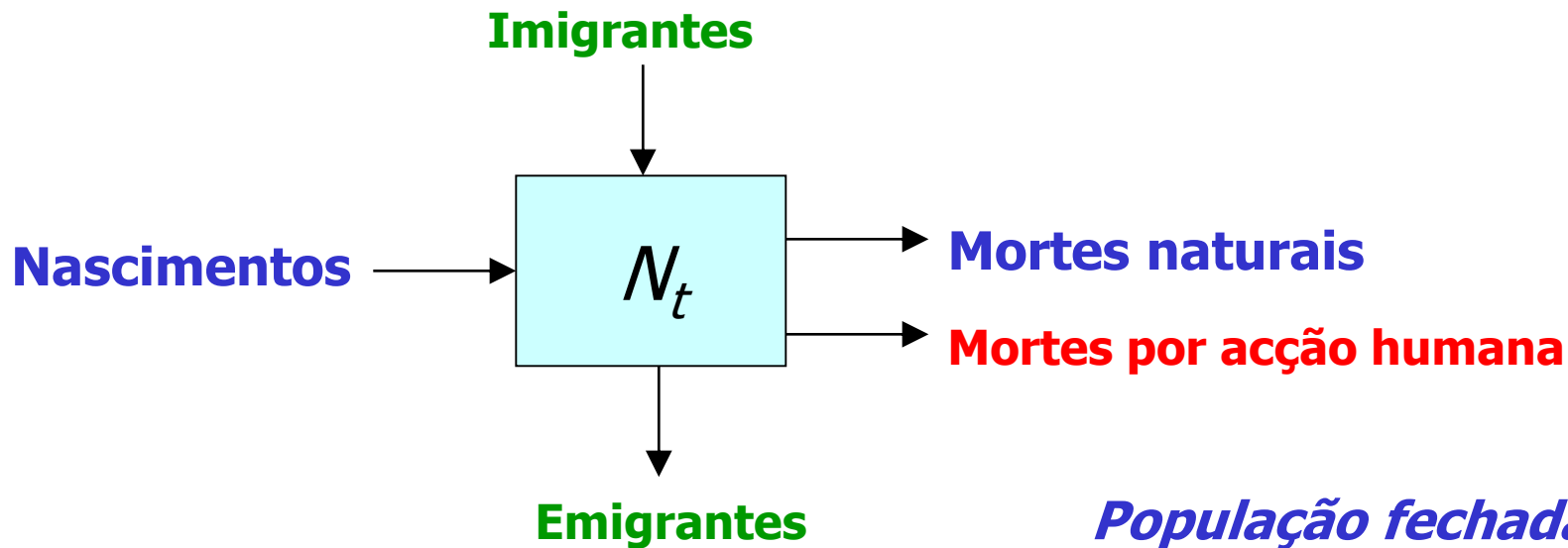


Significado biológico de λ ?

Qual o significado biológico de λ ?

Envolve nascimentos ? Mortes ? Ambos ?

Determinantes da variação de N_t

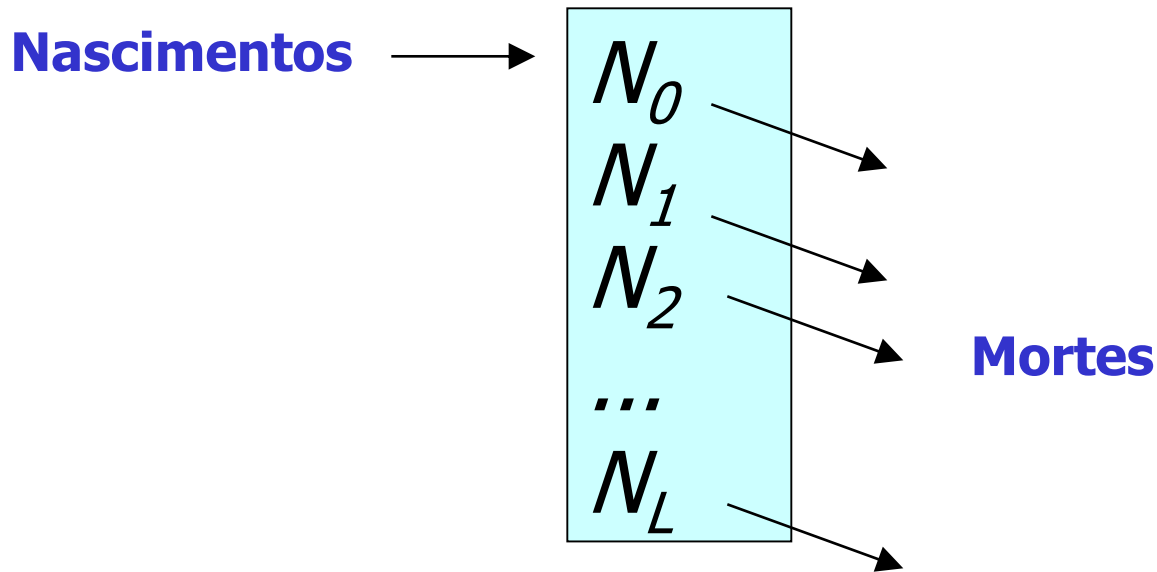


População aberta

População fechada

$$N_{t+1} = N_t - D_t + B_t$$

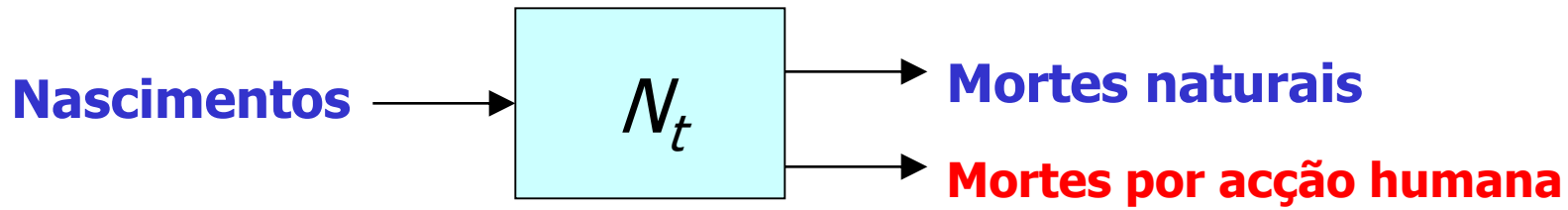
Uma "pequena" complicação: Estrutura etária



*Probabilidade de ter descendentes
ou morrer, entre t e $t+1$, varia com idade*



A População fechada



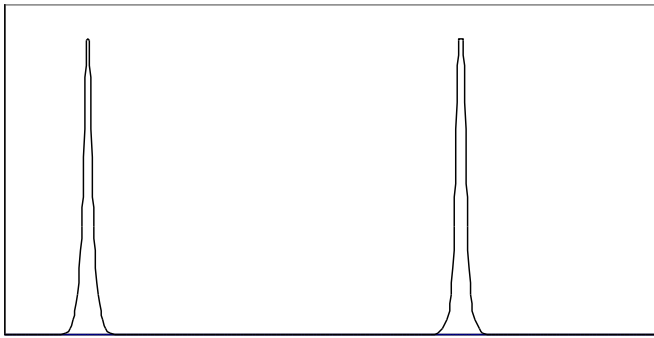
População fechada

$$N_{t+1} = N_t - D_t + B_t$$



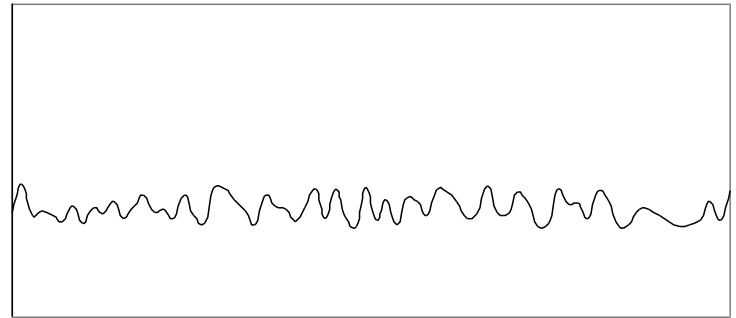
Tipos de reprodutores

Núm nascimentos



Tempo →

Sazonais

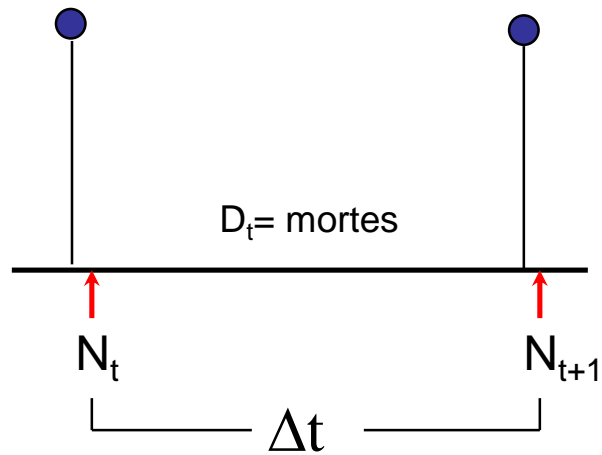


Tempo →

Contínuos

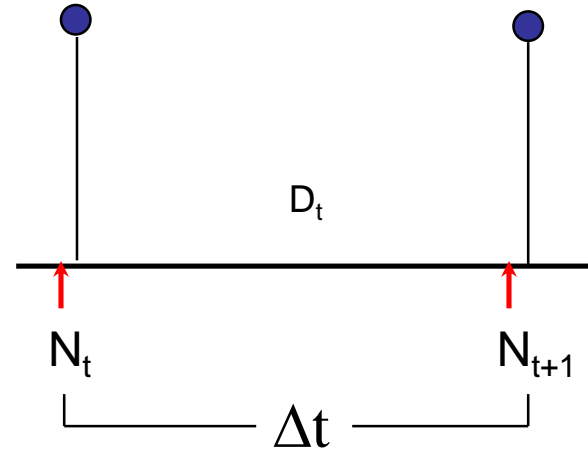
Recenseamento e reprodução em sazonais

$B_t =$ nascimentos



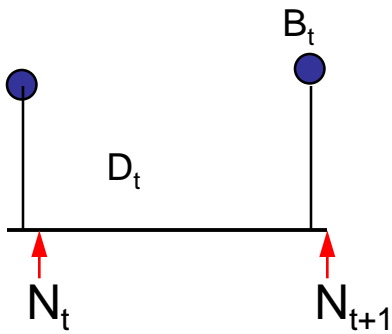
*Recenseamento
Pós-reprodução*

B_t

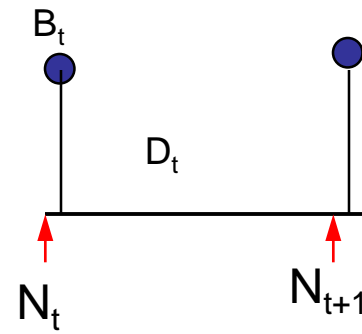


*Recenseamento
Pré-reprodução*

Taxa de sobrevivência total



Pós-reprodução



Pré-reprodução

$$S_t = \frac{N_t - D_t}{N_t} = \frac{N_{t+1} - B_t}{N_t}$$

$$S_t = \frac{N_t + B_t - D_t}{N_t + B_t} = \frac{N_{t+1}}{N_t + B_t}$$



Taxa de mortalidade total

$$A_t = 1 - S_t$$

Pós-reprodução

$$A_t = \frac{D_t}{N_t}$$

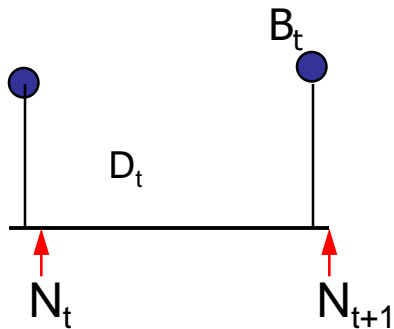


Pré-reprodução

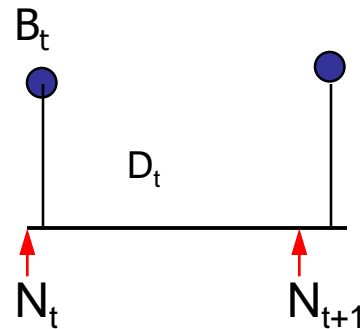
$$A_t = \frac{D_t}{N_t + B_t}$$

Taxa de natalidade

$$b_t = \frac{\text{número nascimentos}}{\text{número ascendentes}} \times \frac{1}{\text{tempo}}$$



Pós-reprodução



Pré-reprodução

$$b_t = \frac{B_t}{N_t - D_t} = \frac{B_t}{N_{t+1} - B_t}$$

$$b_t = \frac{B_t}{N_t}$$



Significado biológico de λ

Recorde-se $\lambda_t = \frac{N_{t+1}}{N_t}$

Substituindo N_{t+1}

Pré-reprodução

Usando:

$$S_t = \frac{N_{t+1}}{N_t + B_t} \quad \therefore \quad N_{t+1} = S_t(N_t + B_t)$$

Obtem-se:

$$\lambda = S_t(1 + b_t)$$

Natalidade

Sobrevivência

Pos-reprod

T.P.C.



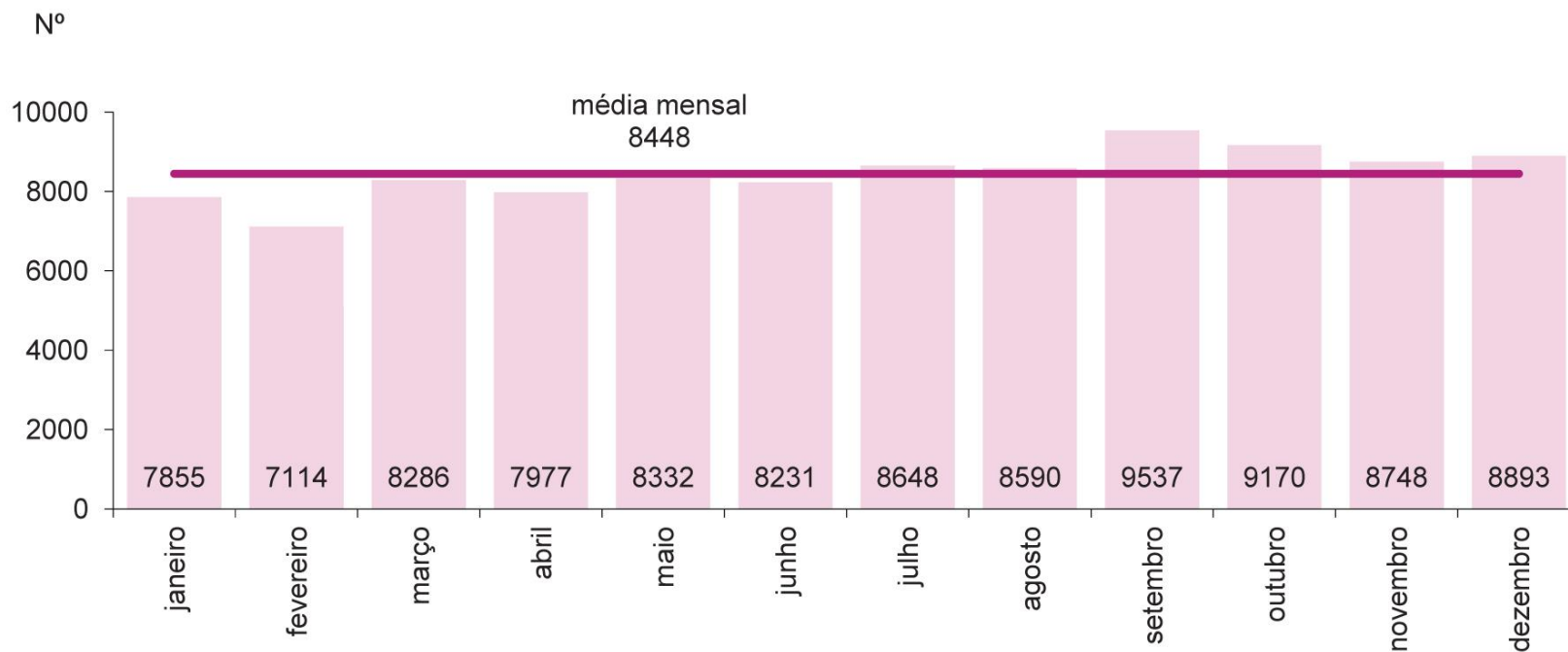
Pressupostos do modelo geométrico

- 1. Taxa de sobrevivência e natalidade constantes (λ constante)*
- 2. A população não é autoregulada, i.e., S e b são independentes de N*
- 3. Sobrevivência e natalidade não dependem da idade e , portanto, da estrutura etária.*
- 4. Os parâmetros do modelo não têm variabilidade (por exemplo devido a flutuações ambientais)*



Nascimentos em Portugal, 2010, INE 2011

Nados vivos por meses de nascimento, Portugal, 2010



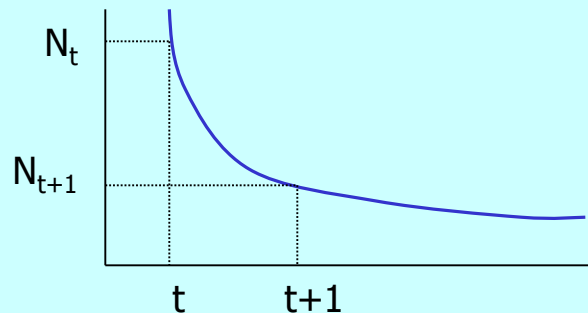
Reprodutores contínuos

Varição de N ocorre continuamente !

O intervalo $\Delta t = [t, t+1]$ é uma simplificação arbitrária.

Recorde-se a variação média:

$$\frac{N_{t+1} - N_t}{\Delta t} = \frac{\Delta N}{\Delta t}$$



$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{dN}{dt} = \text{Variação instantânea em } t$$



Variação instantânea

Variação instantânea no instante t:

$$\frac{dN}{dt} = B_t - D_t$$

Definição de taxas instantâneas:

Taxa de natalidade = $\frac{\textit{nascimentos}}{\textit{ascendentes}} = \frac{B_t}{N_t} = b_t$

Taxa de mortalidade = $\frac{\textit{mortes}}{\textit{presentes}} = \frac{D_t}{N_t} = d_t$



Taxa instantânea de crescimento

$$\frac{dN}{dt} = N_t b_t - N_t d_t = N_t \underbrace{(b_t - d_t)}$$

r

Taxa instantânea de crescimento

(Parâmetro de Malthus)

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

*Unidades de r:
indivíduos por indivíduo por unidade tempo*

Dado um N_t inicial, qual o valor de $N_{t+\Delta t}$?



Solução da equação

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

Equação diferencial ordinária de 1º grau

Assumindo r constante,

Solução, pelo método de variáveis separáveis:

$$N_{t+\Delta t} = N_t e^{r \Delta t}$$

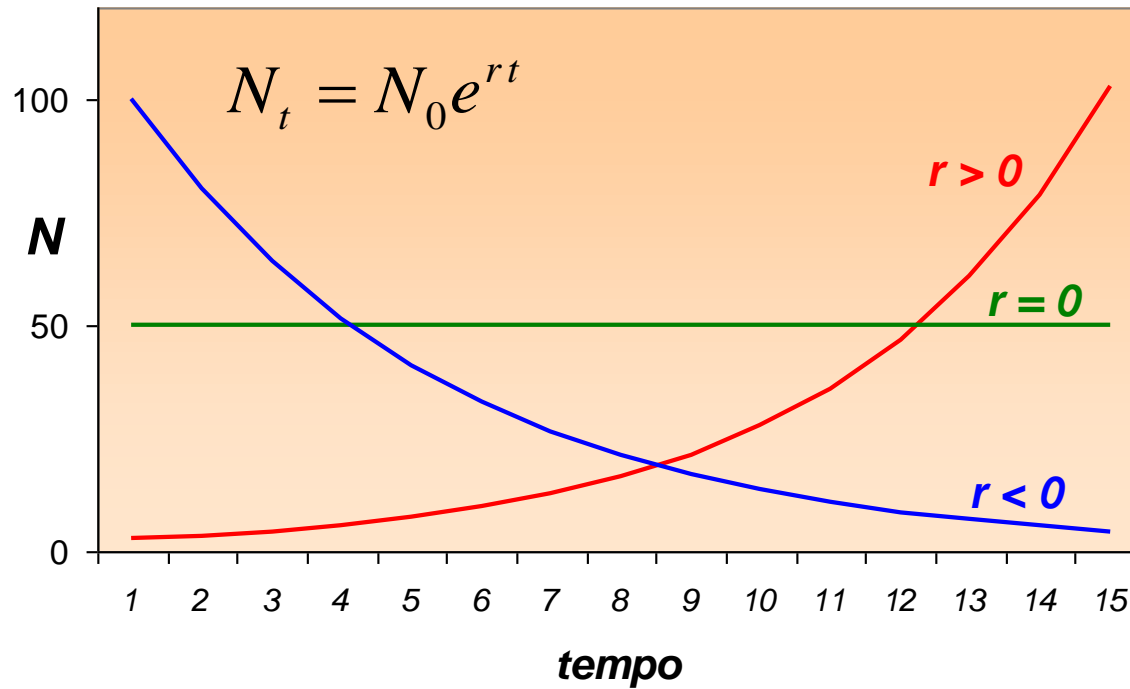
Parâmetro

Variável independente

Variável dependente

Para qualquer Δt

Crescimento exponencial





Crescimento sem regulação

Sazonais: $N_{t+1} = N_t \lambda$

Contínuos: $N_{t+\Delta t} = N_t e^{r \Delta t}$

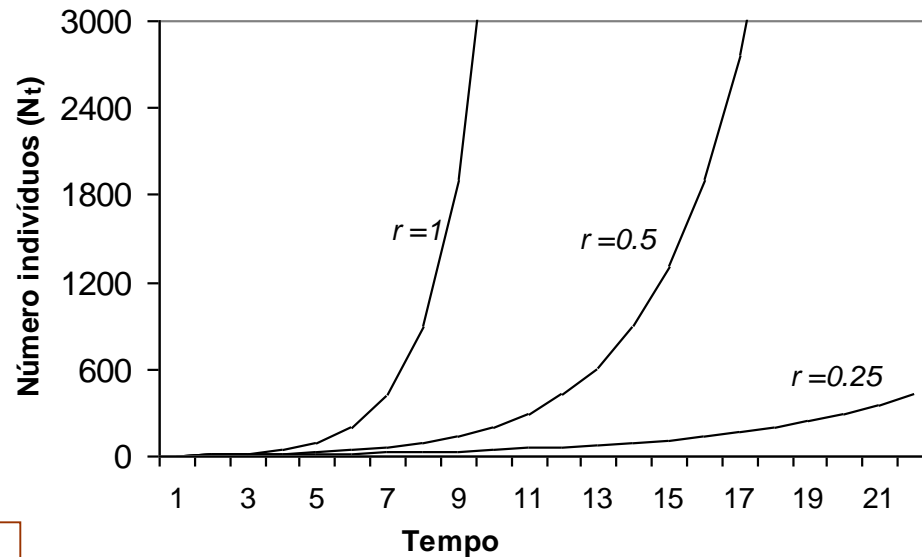
Se $\Delta t=1$ é o intervalo a que λ se refere,

Relação entre taxa instantânea de crescimento e taxa de incremento

$$e^r = \lambda$$

O crescimento não regulado não pode durar muito tempo

$$N_{t+\Delta t} = N_t e^{r \Delta t}$$



$r = 1 \text{ ano}^{-1}$
 $N_t = 10 \text{ indivíduos iniciais}$
 $\Delta t = 10 \text{ anos}$

$$N_{t+10} = 10 e^{1 \times 10} = 220\,265 \text{ indivíduos}$$

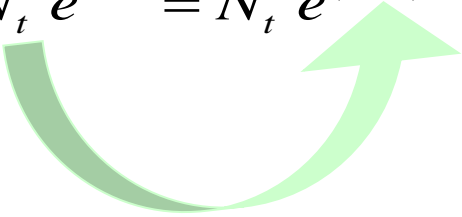


N_t influencia sobrevivência e natalidade



Sazonais: $N_{t+1} = N_t \lambda = N_t S_t (1 + b_t)$

Contínuos: $N_{t+\Delta t} = N_t e^{r \Delta t} = N_t e^{(b-d)\Delta t}$



Sobrevivência, natalidade = $f(N_t)$



Para que serve o modelo de crescimento não-regulado ?

- 1. Ilustra o papel da matemática como ferramenta em biologia*
- 2. Ilustra objectivamente as consequências de pressupostos sobre sobrevivência e natalidade*
- 3. O modelo é adequado para descrever o crescimento inicial (e final) da população (boi almiscarado, baleia azul, humanos ...) e ilustra o seu potencial para crescer*
- 4. Serve de ponto de partida para introduzir componentes que conferem maior realismo ao crescimento populacional*



Thomas Malthus

Thomas Malthus

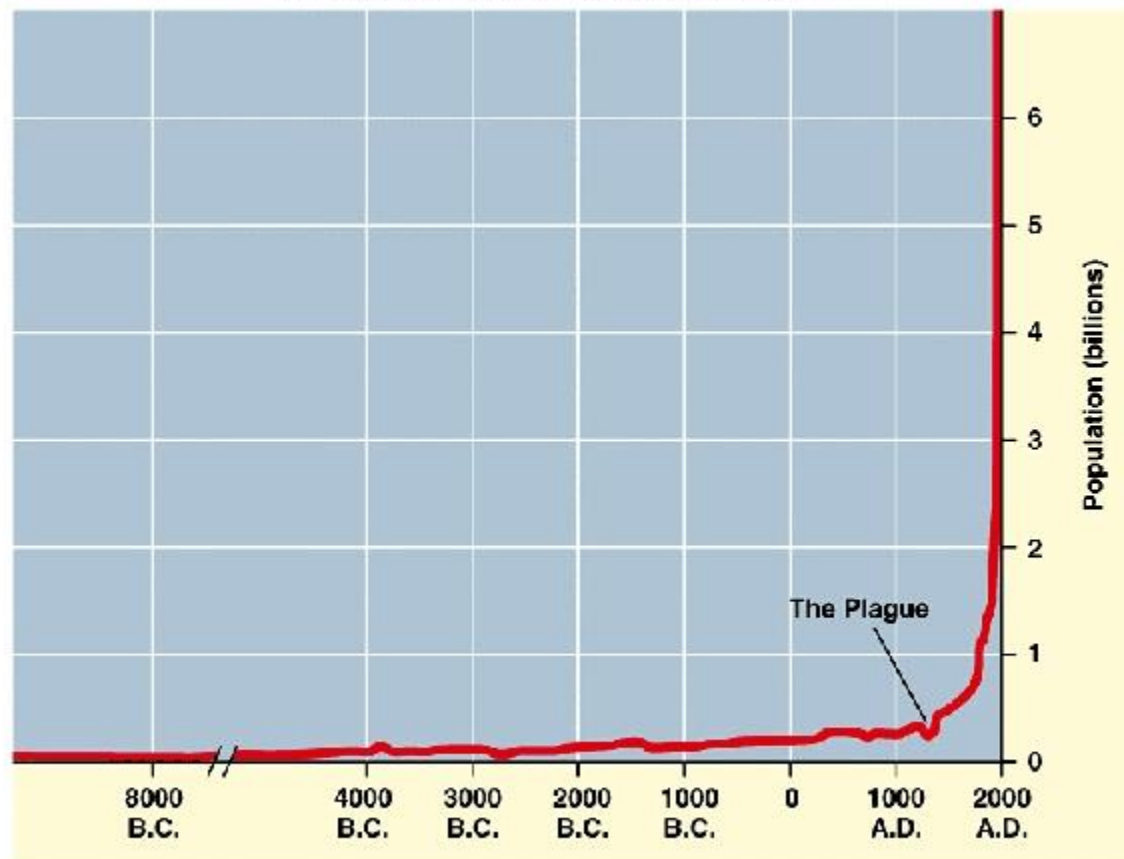
Thomas Malthus' studies on the growth of population led to the development of the field of demography. Malthus (1766-1834) believed that the population would naturally increase faster than the amount of food that could be produced to feed them. He advocated sexual abstinence or restraint to control population increases and acknowledged the role of plagues, wars, and epidemics in containing overpopulation. Malthus specifically suggested that people marry later and have small families. Due to these ideas, economics earned its name as "the dismal science."



Archive Photos

A população humana 1

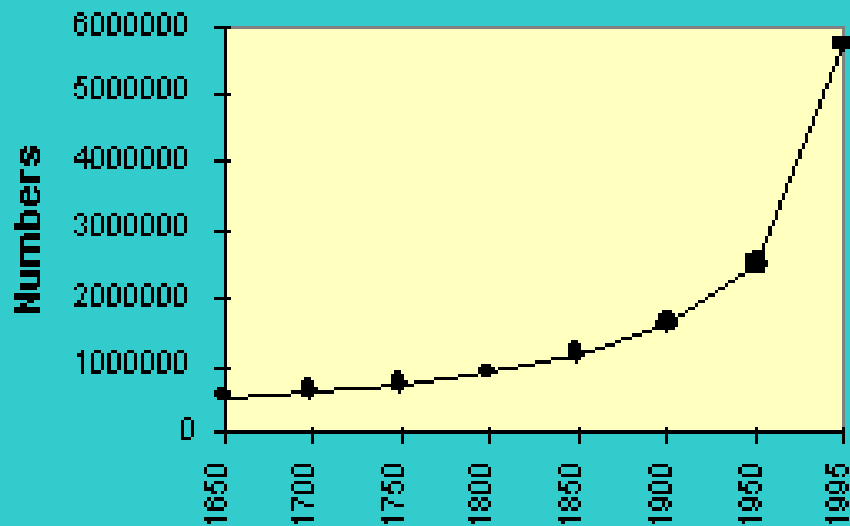
Figure 52.21 Human population growth



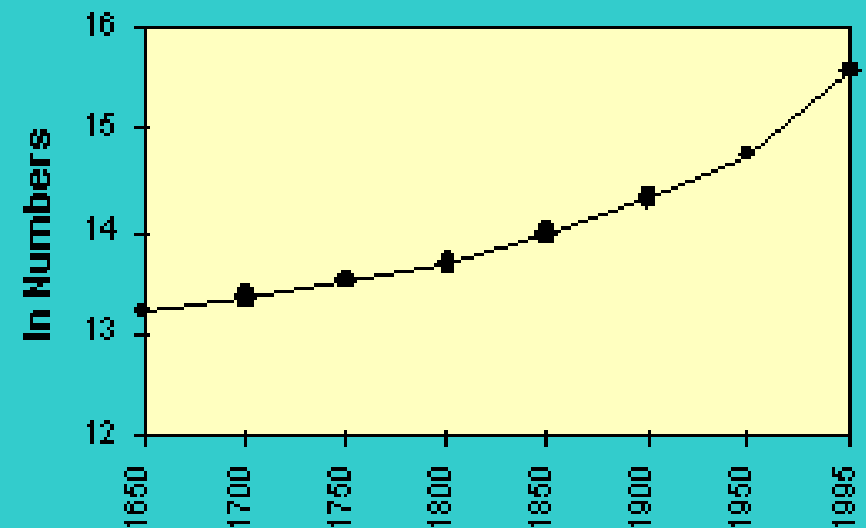


A população humana 2

Arithmetic Scale



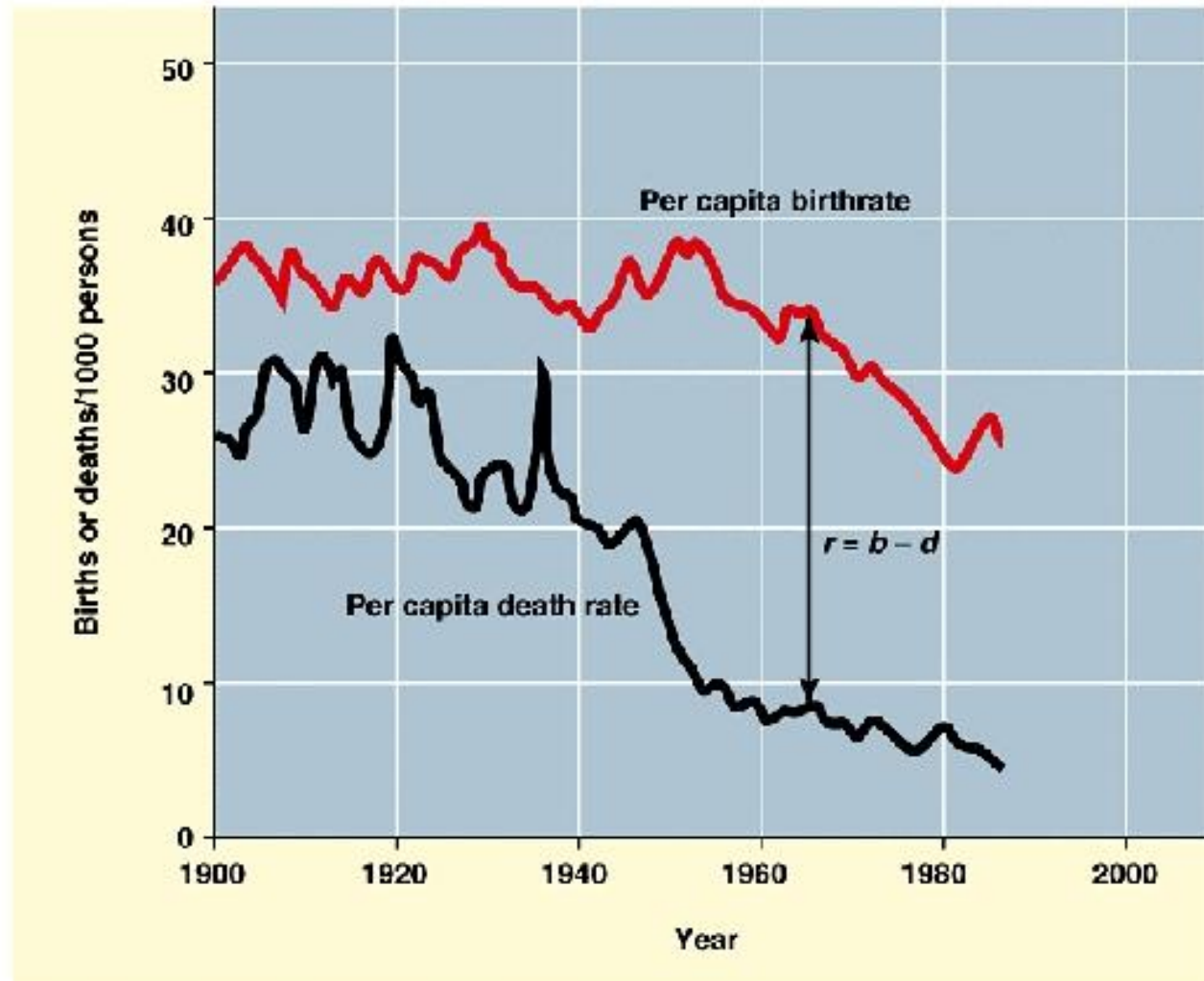
Logarithmic Scale



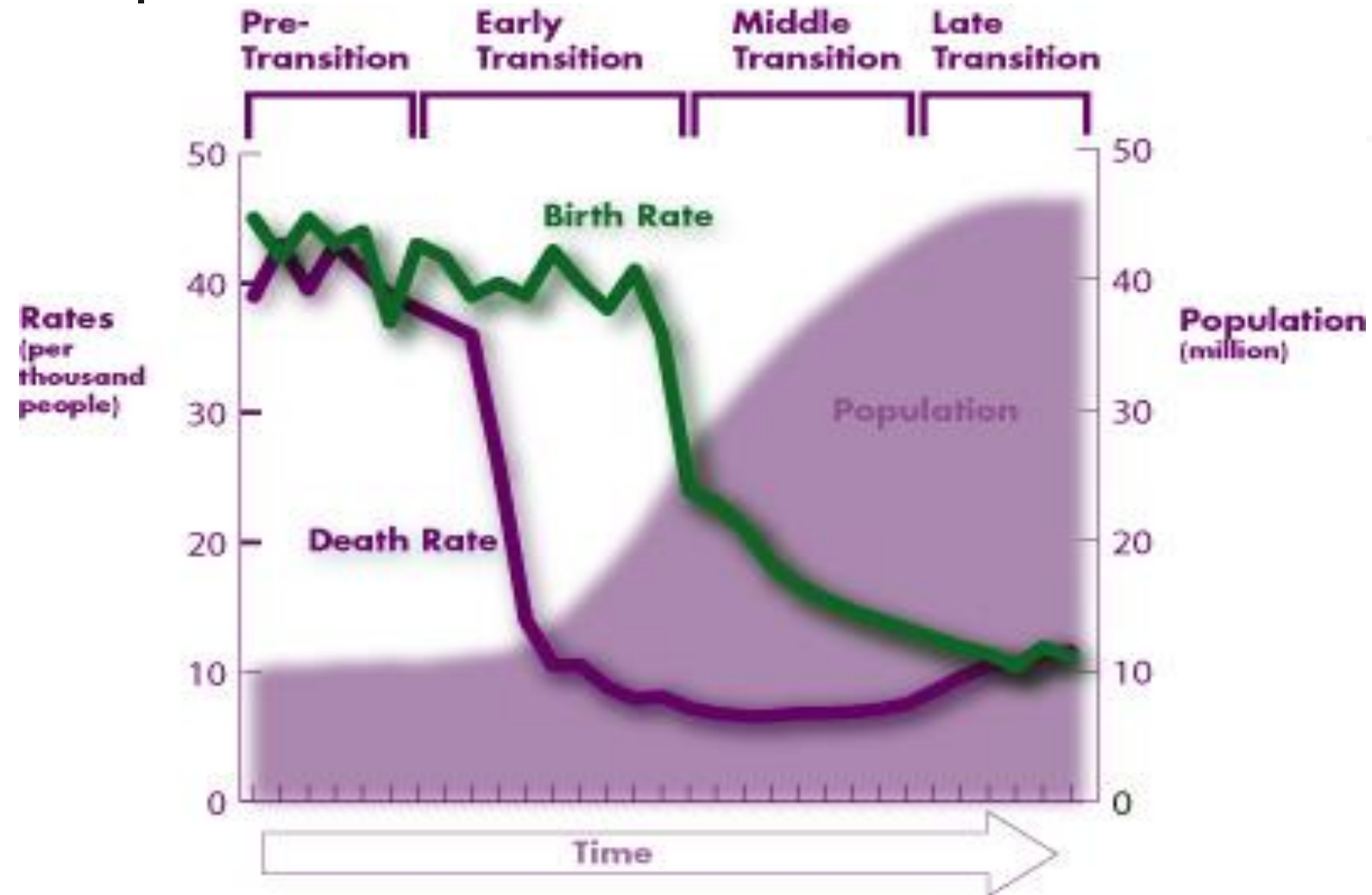
Fonte: [Demographic yearbook](#). Annuaire démographique. New York Dept. of Economic and Social Affairs, Statistical Office, United Nations

b_t e d_t numa população exponencial

Figure 52.22 Changes in birthrates and death rates in Sri Lanka



The Demographic Transition





Estádios da transição demográfica

As taxas de natalidade e mortalidade mudam de forma sistemática e previsível ao longo do tempo, à medida que a sociedade:

- *Moderniza (legislação, direitos da mulher, sistema de saúde: mortalidade diminui)*
- *Urbaniza – centros urbanos associam-se a sectores terciários de produção (= serviços) e igualdade profissional entre sexos*

Estádio 1

Taxas de natalidade elevadas

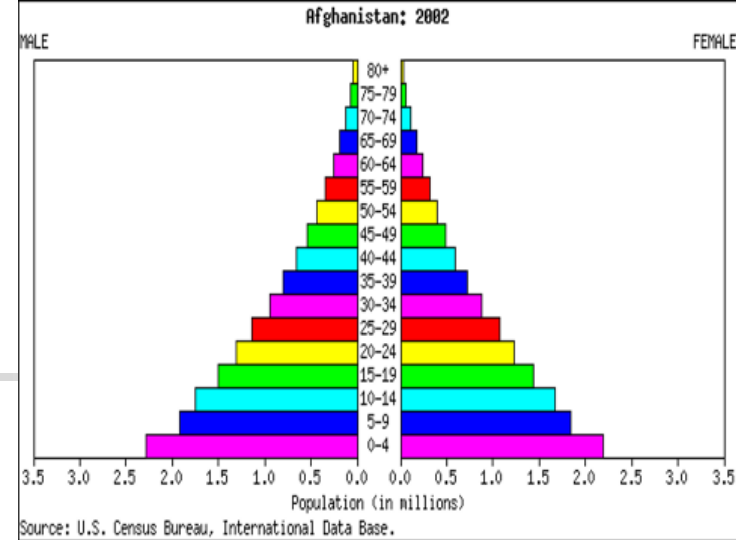
Taxas de mortalidade elevadas (e erráticas)

Baixa taxa de crescimento (r baixo)

Maior parte da história humana

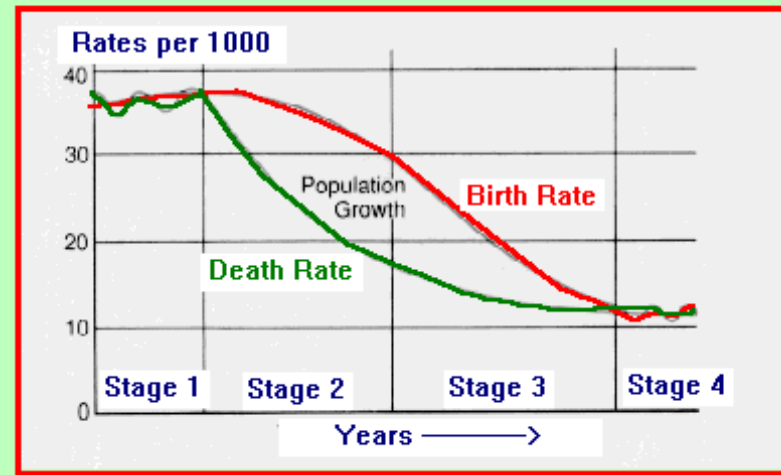
Sociedades tradicionais e atrasadas

Praticamente inexistente actualmente

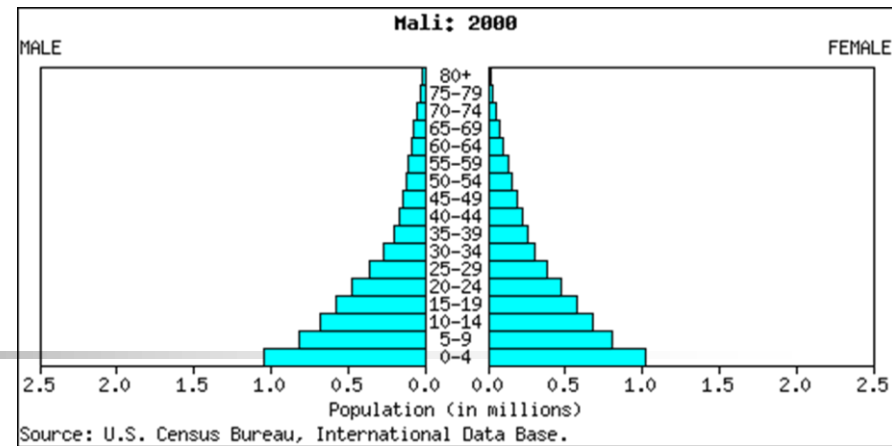


Pirâmide quase perfeita

The Demographic Transition



Estádio 2



Taxas de natalidade elevadas e em queda

Taxas de mortalidade em descida mto mais rápida

Taxa de crescimento a subir

Base muito larga, muito bicuda

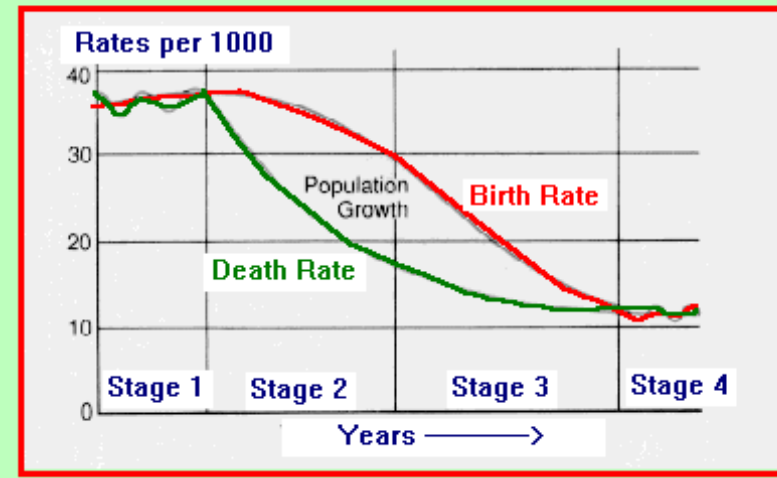
Grandes melhorias sanitárias (água) e médicas

Na Europa – durante a revolução industrial (secs 18-19)

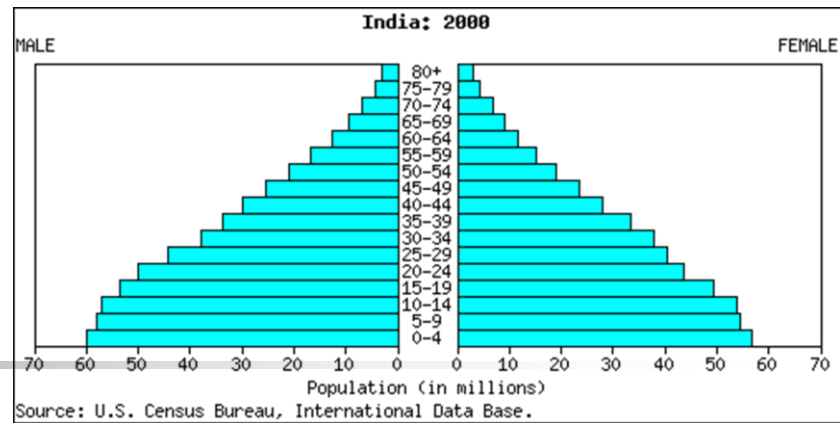
Nos países em desenvolvimento: desde 1950-60's

Grande parte de África hoje, alguns países da Ásia (Afeganistão, Nepal, etc)

The Demographic Transition



Estádio 3



Taxas de natalidade ainda em queda

Taxas de mortalidade caem para níveis mto baixos

Taxa de crescimento estabiliza e começa a descer

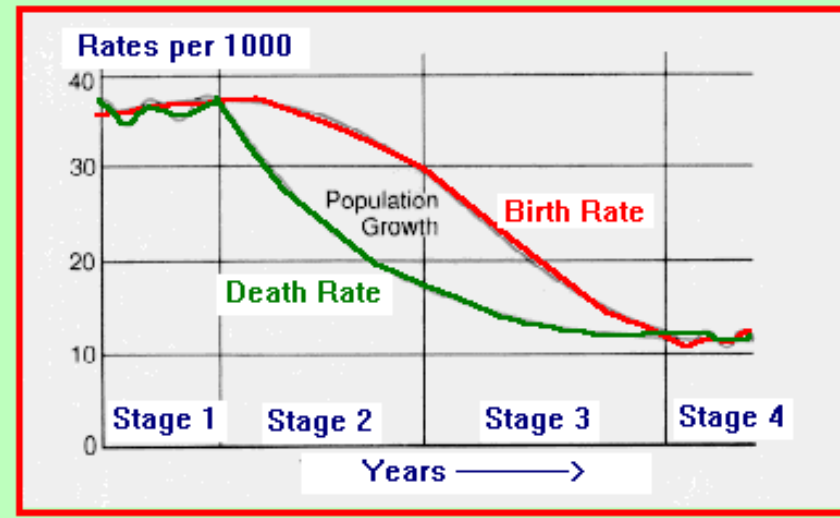
Centro da pirâmide alarga

Mudanças de comportamento:

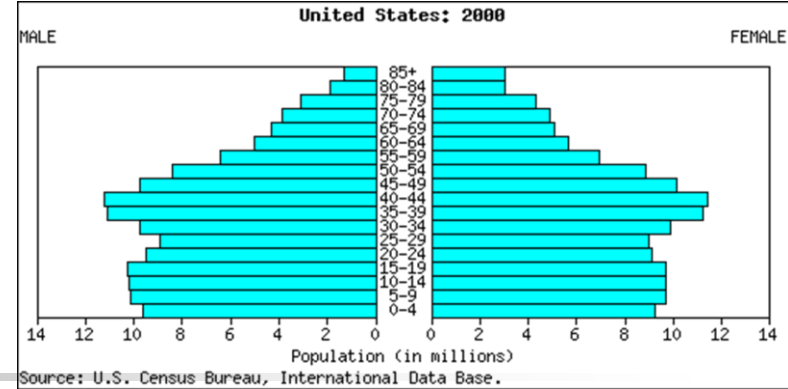
- Mortalidade infantil baixa
- Tendência para igualdade entre sexos no trabalho
- Incentivos para ter menos filhos
- Urbanização, tecnologia, produção terciária

Explos: México, Turquia,

The Demographic Transition



Estádio 4 (e 5)



Pirâmide fica mais larga a meio

Taxas de natalidade voluntariamente mto baixas

Taxas de mortalidade mto baixas

Taxa de crescimento muito baixa, tende para zero

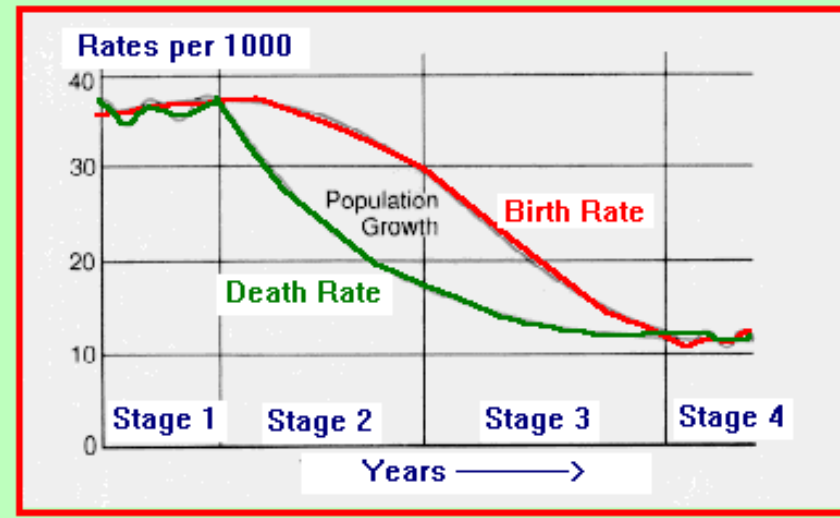
Explo: Estados Unidos

Estádio 5

- taxas natalidade muito baixas
- mortalidade igual ou maior que natalidade
- taxa de crescimento nula ou negativa

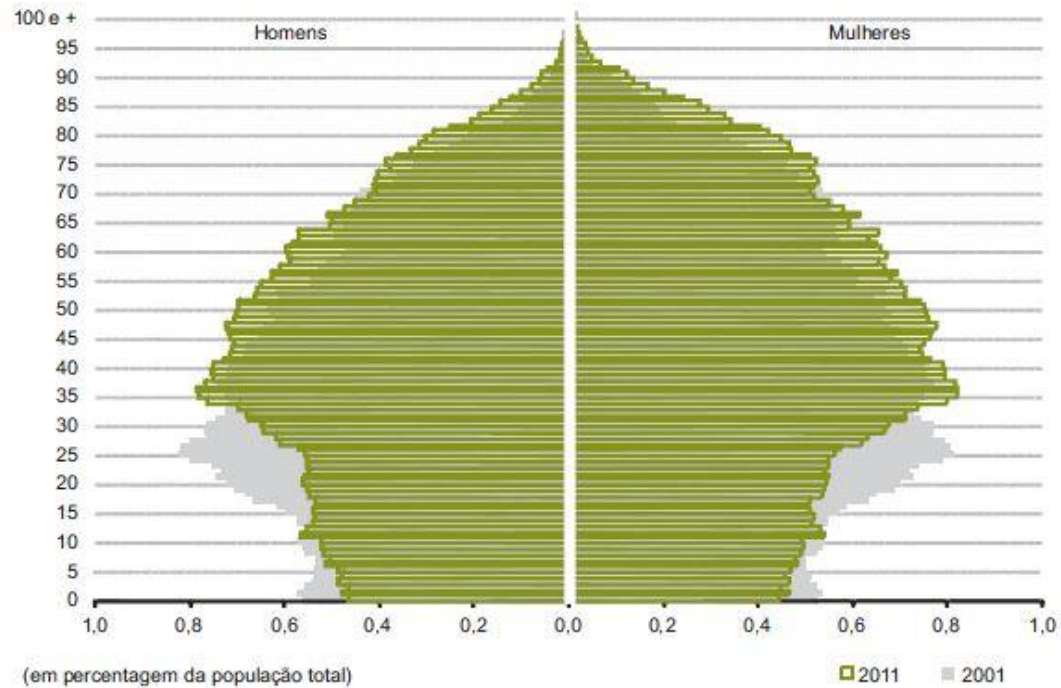
Explos: muitos países europeus, Japão

The Demographic Transition

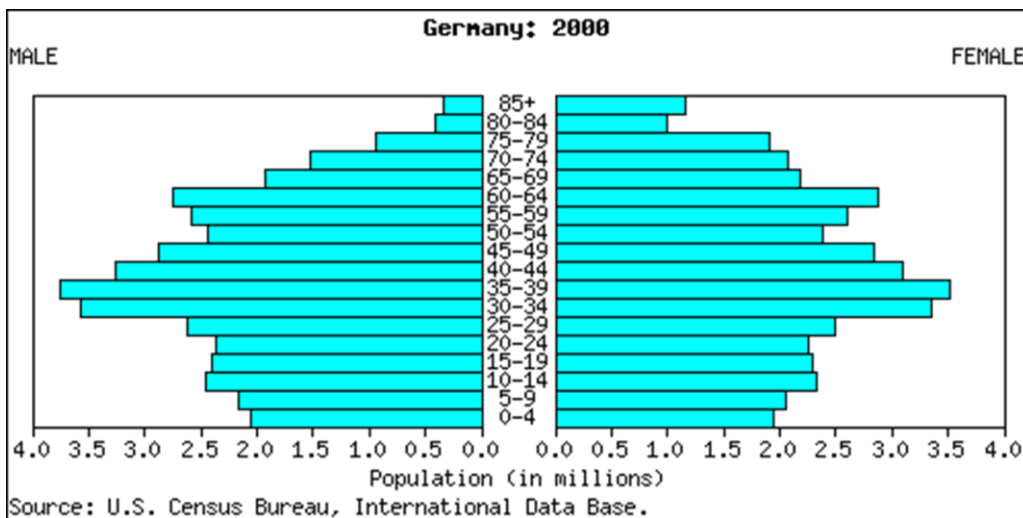


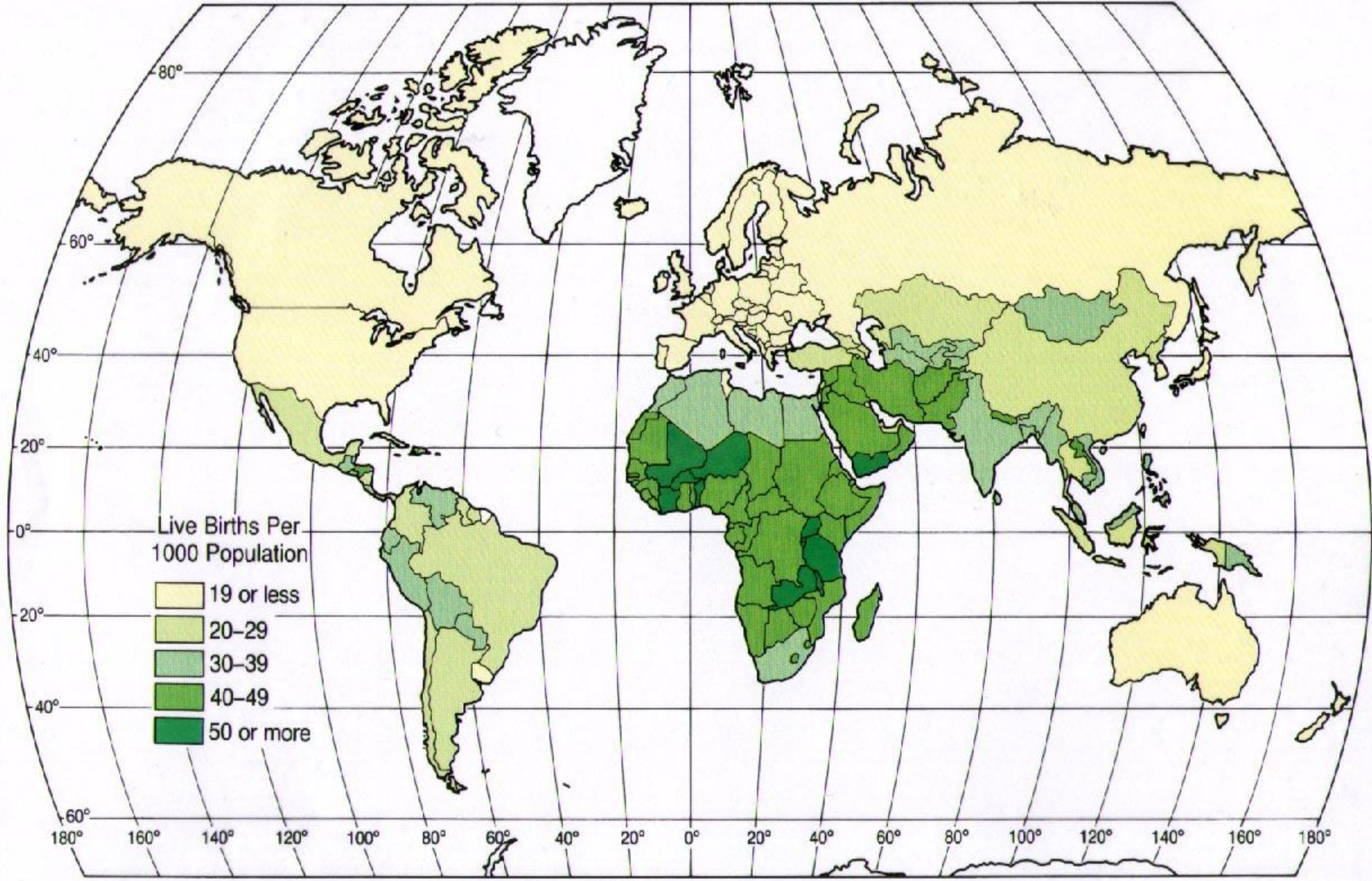
Estádio 5

Pirâmide etária, Portugal, 2001 e 2011



Base estreita





Live Births Per
1000 Population

- 19 or less
- 20-29
- 30-39
- 40-49
- 50 or more

Source: Data from Population Reference Bureau.
 Jerome Fallmann, Arthur Getis, and Judith Getis. *Human Geography: Landscapes of Human Activities*, 4th ed. Copyright © 1995 Wm. C. Brown Publishers, Dubuque, Iowa. All Rights Reserved.

20 Crude Birth Rates
Figure 4.3

