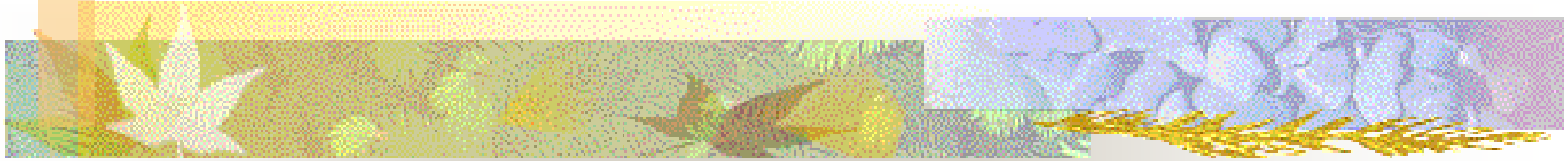


A Life Table



Módulo 5

A coorte

N_x = Núm. indivíduos
no início da idade x

Define-se:

$$S_x = \frac{N_{x+1}}{N_x} \quad \text{T. Sobrevivência da idade x}$$

$$q_x = 1 - S_x \quad \text{T. mortalidade da idade x}$$

$$l_x = \frac{N_x}{N_0} \quad \text{T. Sobrevivência até à idade x}$$

$$D_x = N_{x+1} - N_x \quad \text{Núm. mortos com idade x}$$

Idades	1996	1997	1998	1999	2000	2001
0	1000					
1		800				
2			600			
3				450		
4					300	
5						150



3 formas de organização

Número de indivíduos por idade

Fertilidade por idade

Taxas de sobrevivência por idade

- A Life-Table
- A Matriz de Leslie
- A Matriz generalizada de Lefkovitch



Dois dedos de história

Life-Table (LT) – Deve-se a Raymond Pearl (1879-1940).
Adaptou o cálculo atuarial à ecologia populacional

Matriz de Leslie – Inventada por Patrick Leslie (1900-1974).
Em 1935 entrou para o “Bureau of Animal Populations”,
Oxford, fundado por Charles Elton e formalizou o
essencial da LT em álgebra de matrizes.

Matriz de Lefkovitch – Introduziu a metodologia para generalizar
o trabalho de Leslie à situação em que o ciclo de vida é
dividido em estádios (tamanho, desenvolvimento...)
e não em idades.

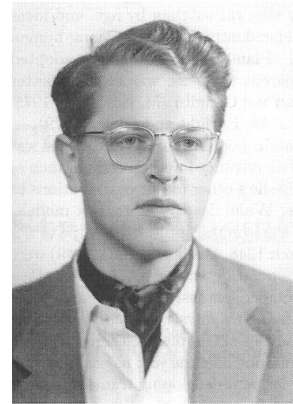
História da ecologia populacional



Raymond Pearl



Patrick Leslie



Leonard Lefkovich



Hal Caswell

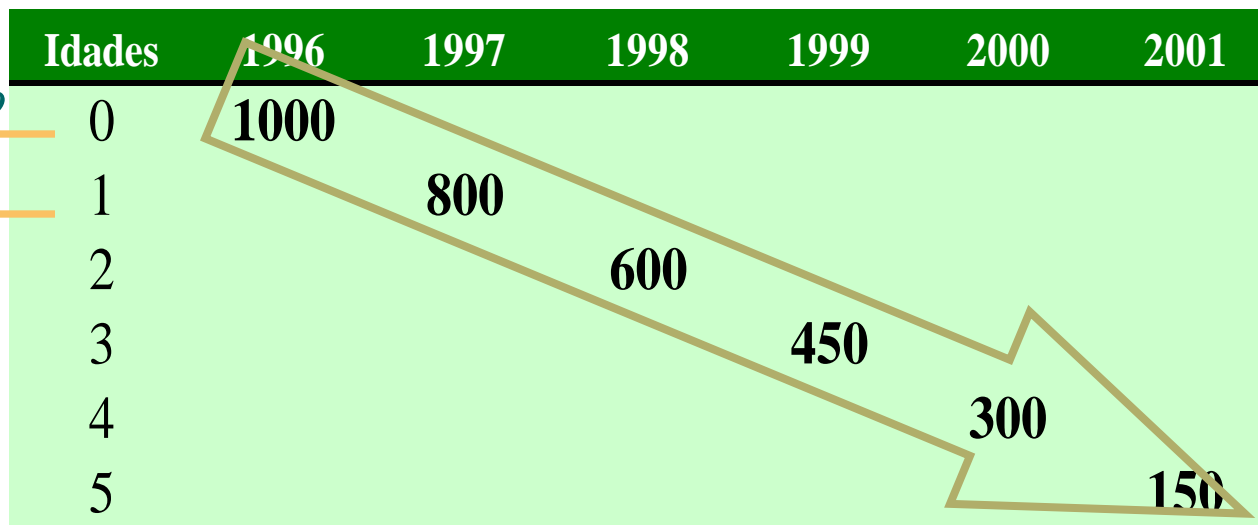
Bacaer, N. 2011. *A Short History of Mathematical Population Dynamics*. Springer-Verlag, London.

Kingsland, SE. 1995 (2nd Ed). *Modeling Nature. Episodes in the History of Population Ecology*. The Univ Chicago Press, Chicago, US.

McIntosh, RP. 1985. *The Background of Ecology. Concept and Theory*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK.

Construção da LT

Adoptar intervalo de idade →



1º Adoptar intervalo de idade

2º Seguir N até não haver sobreviventes

3º Calcular as taxas de sobrevivência por idade

LT dos pardais

(Song sparrow, BC, Canada)



Idade	Num animais vivos no início da idade x	Sobrevivência da idade x	Sobrevivência até início de x	Mortos entre x e x+1	Taxa de mortalidade
x	N_x	S_x	l_x	D_x	q_x
0	115	0.22	1.00	90	0.78
1	25	0.76	0.22	6	0.24
2	19	0.63	0.17	7	0.37
3	12	0.17	0.10	10	0.83
4	2	0.50	0.02	1	0.50
5	1	0.00	0.01	1	1.00
6	0	-	0.00	-	-

(BC, Canada) Copyright 1998 - Monte M. Taylor

$$S_5 = \frac{N_6}{N_5} = 0$$

$$l_6 = \frac{0}{115}$$



Fertilidade

$m_x =$ Fertilidade da idade x

Número médio de fêmeas-filhas produzidas por uma fêmea da idade x , enquanto esta está na dita idade x .

Razões práticas:

- 1. Os pais podem ter idades diferentes*
- 2. Em muitas populações é muito difícil determinar a idade do macho parental.*

Fertilidade na LT



Idade						Fertilidade
x	N_x	S_x	l_x	D_x	q_x	m_x
0	115	0.22	1.00	90	0.78	0.0
1	25	0.76	0.22	6	0.24	0.0
2	19	0.63	0.17	7	0.37	2.5
3	12	0.17	0.10	10	0.83	3.2
4	2	0.50	0.02	1	0.50	3.8
5	1	0.00	0.01	1	1.00	1.9
6	0	-	0.00	-	-	-

Idade de 1ª maturação = 2 anos

Em média, cada fêmea tem 2,5 filhas enquanto tem $x=2$ anos

Quantas filhas terá uma fêmea recém-nascida aos 2 anos de idade ?

R_0 - Taxa líquida de reprodução

Idade x	N_x	S_x	l_x	D_x	q_x	Fertilidade	
						m_x	$l_x m_x$
0	115	0.22	1.00	90	0.78	0.0	0.000
1	25	0.76	0.22	6	0.24	0.0	0.000
2	19	0.63	0.17	7	0.37	2.5	0.413
3	12	0.17	0.10	10	0.83	3.2	0.333
4	2	0.50	0.02	1	0.50	3.8	0.065
5	1	0.00	0.01	1	1.00	1.9	0.017
6	0	-	0.00	-	-	-	-
						$R_0 =$	0.827

Núm. fêmeas que uma fêmea recém-nascida produz aos 2 anos

$$R_0 = \sum_{x=0} l_x m_x$$

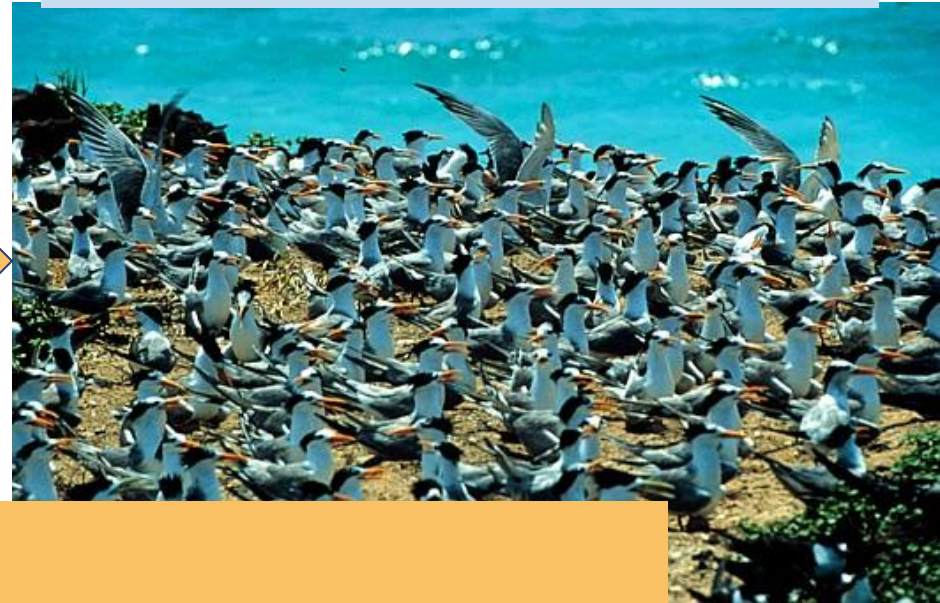
Núm. médio de fêmeas que 1 fêmea recém-nascida produzirá durante toda a sua vida

$$\begin{bmatrix} l_0 \\ l_1 \\ l_2 \\ \dots \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \dots \end{bmatrix}$$



$$R_0$$

Contribuição de 1 fêmea para a população durante a sua vida

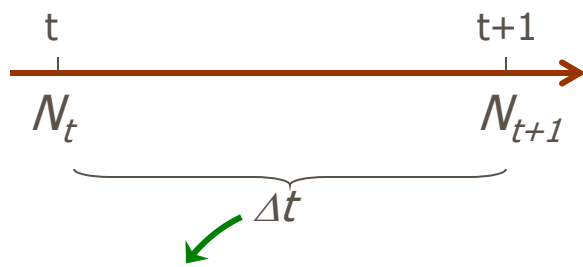


$R_0 > 1$ a população cresce

$R_0 = 1$ a população não cresce (1 fêmea \rightarrow 1 fêmea)

$R_0 < 1$ a população decresce

λ vs. R_0 : 1 geração



$$\frac{N_{t+1}}{N_t} = \lambda$$

$$\lambda > 1$$

$$\lambda = 1$$

$$\lambda < 1$$

Intervalo de tempo arbitrário

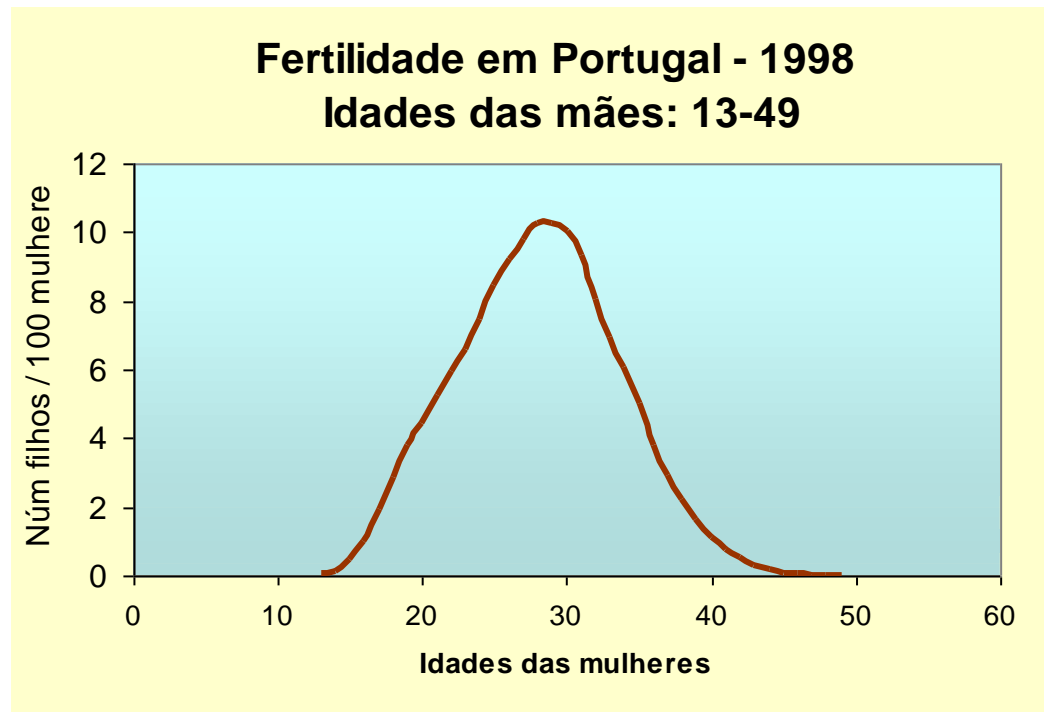
$R_0 \Leftrightarrow \lambda$ quando $\Delta t =$ tempo de 1 geração

Geração, T = período de tempo que, em média, decorre entre nascimento dos pais e nascimento dos filhos que esses pais originam.

A fertilidade varia com a idade



Idade	Fertilidade
x	m_x
0	0.0
1	0.0
2	2.5
3	3.2
4	3.8
5	1.9
6	-

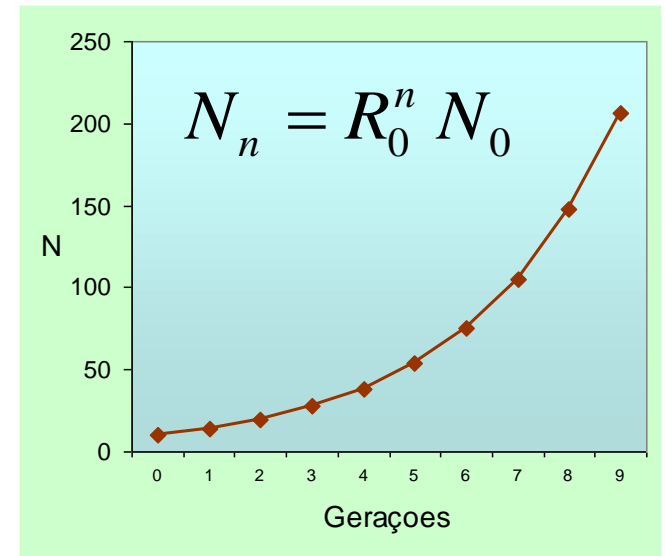


INE. 1998. Estatísticas demográficas

$l_x m_x$ constantes $\Rightarrow R_0$ constante

$N_{t+1 \text{ geração}} = R_0 N_t$ após 1 geração

$N_n = R_0^n N_0$ $n = \text{núm. de gerações}$



Recorde-se que $e^{r\Delta t} = \lambda$

Portanto:

$$e^{rT} = R_0 \quad ; \quad r = \frac{\ln R_0}{T}$$

Consistência entre m_x e N_0

m_x = Número médio de fêmeas-filhas produzidas por uma fêmea da idade x [...]

Mas em que idade são contabilizadas as fêmeas-filhas ?

Idade						Fertilidade
x	N_x	S_x	l_x	D_x	q_x	m_x
0	115	0.22	1.00	90	0.78	0.0
1	25	0.76	0.22	6	0.24	0.0
2	19	0.63	0.17	7	0.37	2.5
3	12	0.17	0.10	10	0.83	3.2

A idade das fêmeas-filhas em m_x deve ser coerente com N_0

Seguir a coorte tem dificuldades

- Requer por vezes muitos anos
- É difícil manter a coorte distinta da restante população

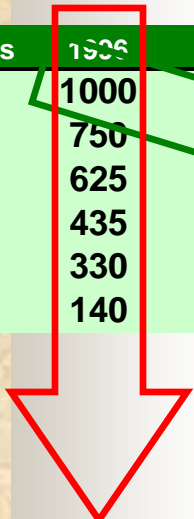
A alternativa habitual:

Idades	1996	1997	1998	1999	2000	2001
0 S_0	1000					
1	750	800				
2 S_1	625					
3	435					
4					300	
5						150

Só legítimo se estrutura etária da coorte = estrutura etária da população

Dois tipos de LT

Idades	1995	1997	1998	1999	2000	2001
0	1000					
1	750	800				
2	625		600			
3	435			450		
4	330				300	
5	140					150



x	N_x	S_x	l_x	D_x	q_x
0	1000				
1	750				
2	625				
3	435				
4	330				
5	140				

LT vertical
LT estática

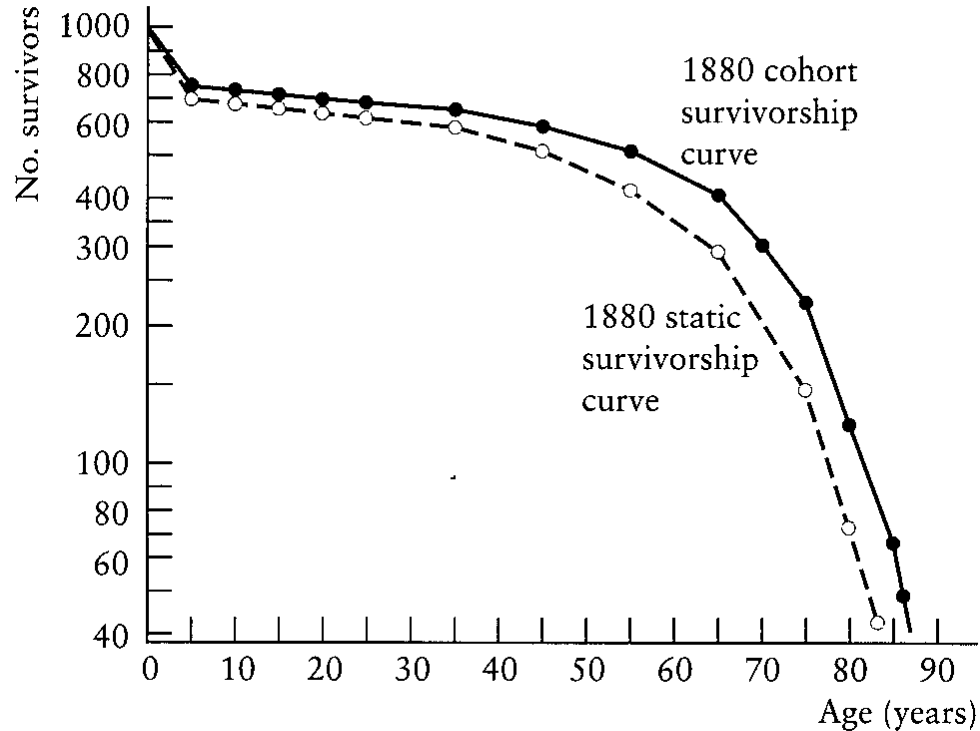
x	N_x	S_x	l_x	D_x	q_x
0	1000				
1	800				
2	600				
3	450				
4	300				
5	150				

LT da coorte
LT horizontal
LT longitudinal

Sempre legítima

Assume estrutura etária estacionária

Sobrevivência estática e da coorte – População de Inglaterra-Gales



Solução intermédia

Idades	2008	2009	2010
0	1000	900	1100
1	750	800	650
2	625	600	525
3	435	450	425
4	330	300	250
5	140	150	180

Expo: método do INE para a população portuguesa.

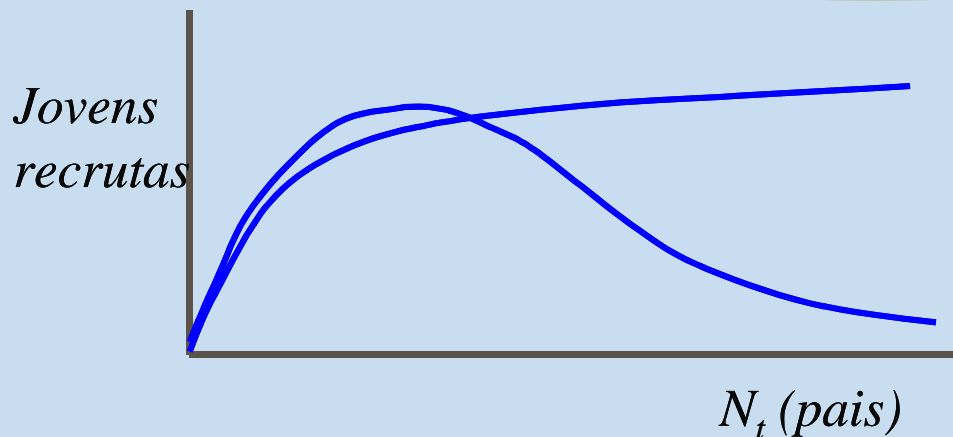
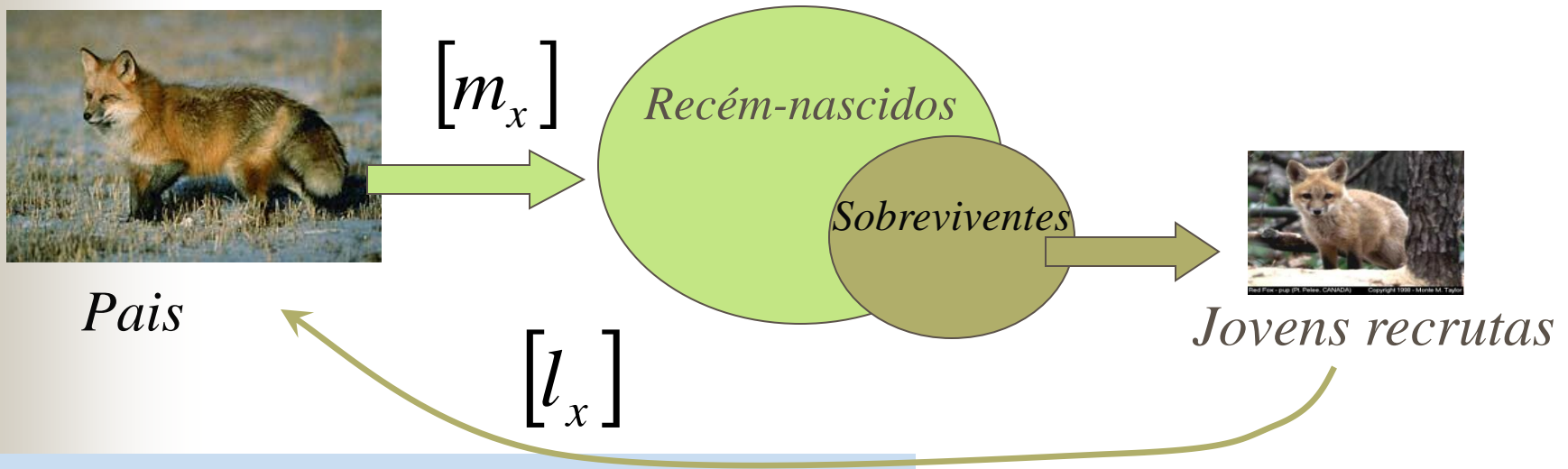
Os valores de N são obtidos por

$$N_{x+1, t+1} = N_{x, t} - D_{x, t}$$

Inconveniente em populações não humanas:

A lista final de sobrevivências provém de coortes diferentes, sujeitas a condições diferentes nos primeiros anos de vida.

Populações terrestres



$[m_x]$ *Pode ser estimado e tem capacidade predictiva*

Populações aquáticas



$[m_x]$



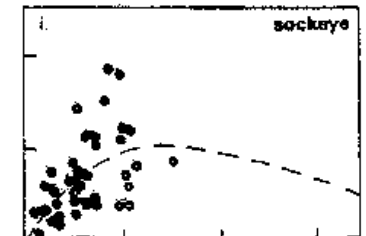
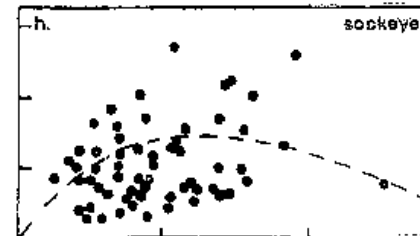
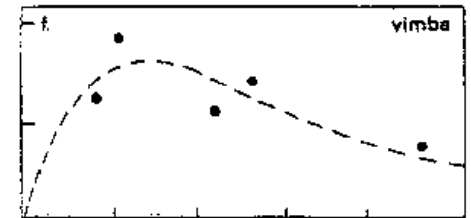
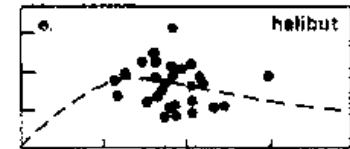
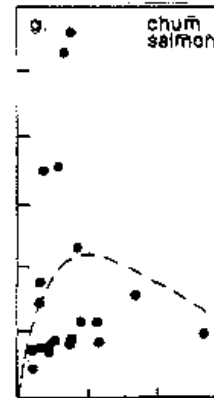
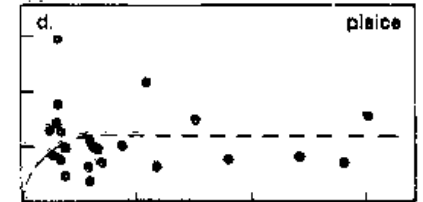
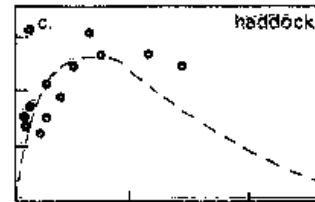
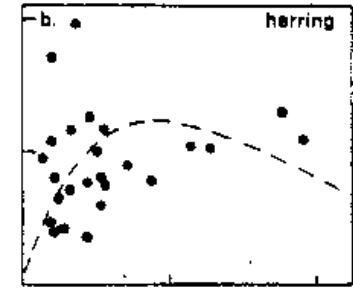
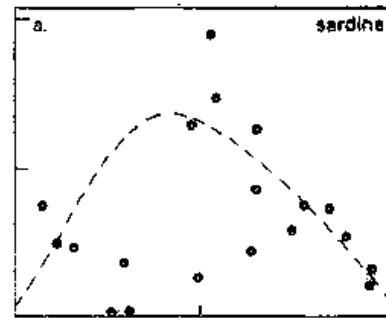
Fracção ínfima dos ovos e larvas

$[m_x]$ Não tem
capacidade predictiva

Factores
ambientais
Incontroláveis
Imprevisíveis

Relações stock-recrutamento

Recrutamento



Stock parental



Esperança média de vida

e_x = esperança média de vida da idade x

Número de unidades de tempo que ainda vai viver, em média, um indivíduo que chega à idade x

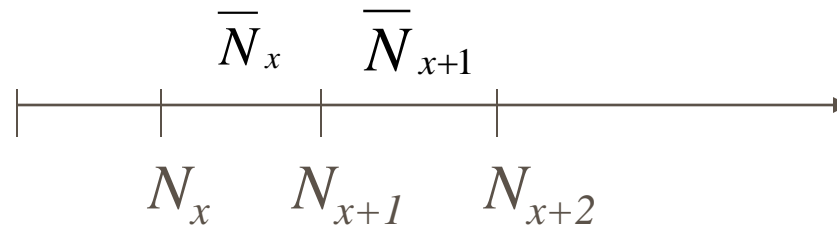
Se $x=0$, esperança média de vida = Longevidade

Dedução de e_x

N_x = núm. indivíduos na coorte no início da idade x

Quantos indivíduos há na coorte, em média, com idade $\geq x$?

$$T_x = \bar{N}_x + \bar{N}_{x+1} + \bar{N}_{x+2} + \dots$$



$$T_x = N_x e_x$$

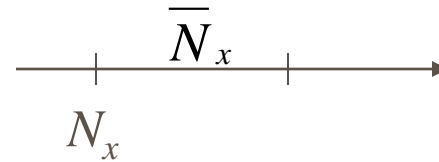
$$T_x = \bar{N}_x + \bar{N}_{x+1} + \bar{N}_{x+2} + \dots$$

Seja $e_x =$ tempo médio que cada um dos N_x indivds virá a ter de vida

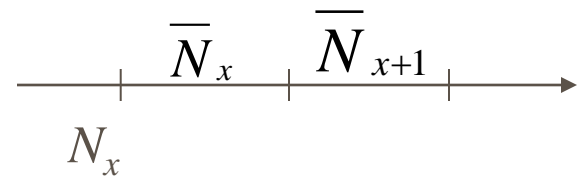
Expos: Se $e_x=0$, $T_x = (0 N_x) = 0$



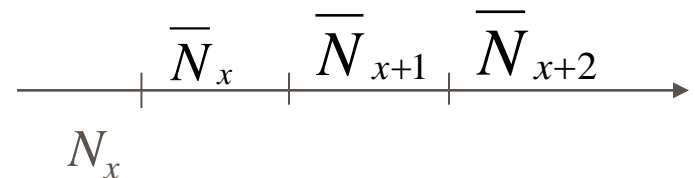
Se $e_x=1$, $T_x = (1 N_x) = N_x$



Se $e_x=2$, $T_x = (2 N_x) = 2N_x$



Se $e_x=3$, $T_x = (3 N_x) = 3N_x$



Esperança média de vida da idade x

Se

$$T_x = N_x e_x$$

$$e_x = \frac{T_x}{N_x}$$

e_x na LT

x	N_x	S_x	l_x	D_x	L_x	T_x	e_x
0	115	0.22	1.00	90	70.0	116.5	1.013
1	25	0.76	0.22	6	22.0	46.5	1.860
2	19	0.63	0.17	7	15.5	24.5	1.289
3	12	0.17	0.10	10	7.0	9.0	0.750
4	2	0.50	0.02	1	1.5	2.0	1.000
5	1	0.00	0.01	1	0.5	0.5	0.500
6	0	-	0.00	-	0.0	0.0	0.000

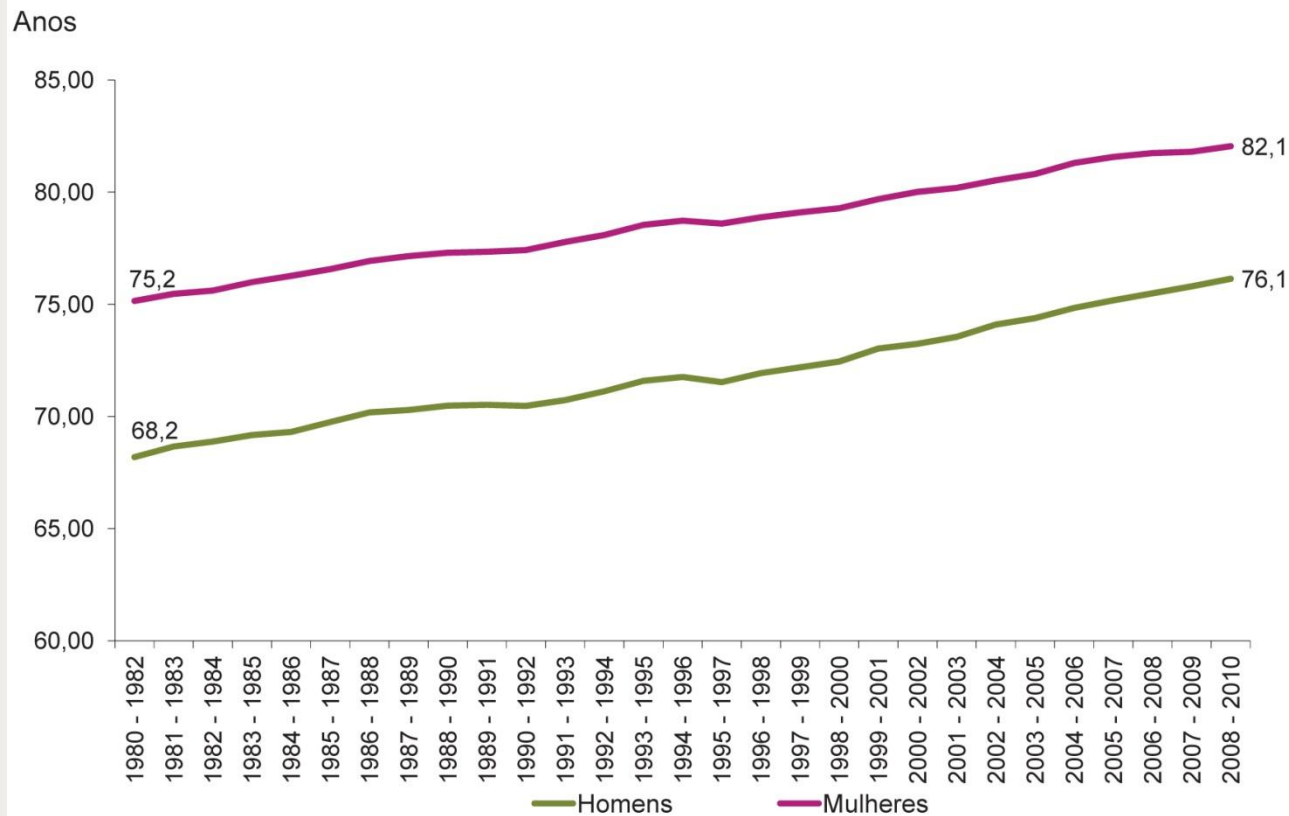
→ *Longevidade*

$$L_x = \frac{N_x + N_{x+1}}{2} \quad (\approx \bar{N}_x)$$

$$T_x = L_x + L_{x+1} + L_{x+2} + \dots \quad e_x = \frac{T_x}{N_x}$$



Esperança média de vida, Portugal, 1980-1982 a 2008-2010



e_x em Portugal

(1997/98, INE 2000)

Grupos Etários	H+M	H	M
0	75.25	71.68	78.83
1-4	74.74	71.17	78.28
5-9	70.89	67.33	74.43
10-14	65.99	62.43	69.52
15-19	61.10	57.56	64.60
20-24	56.31	52.85	59.71
25-29	51.60	48.27	54.86
30-34	46.94	43.75	50.01
35-39	42.31	39.28	45.20
40-44	37.72	34.84	40.45
45-49	33.18	30.45	35.74
50-54	28.71	26.12	31.11
55-59	24.37	21.96	26.56
60-64	20.20	18.01	22.13
65-69	16.26	14.37	17.86
70-74	12.60	11.08	13.81
75-79	9.32	8.19	10.15
80-84	6.41	5.60	6.93
85 ou +	4.14	3.61	4.42

(2004/05, INE 2007)

Grupos Etários	H+M	H	M
0	78.20	74.90	81.40
1-4	77.50	74.20	80.70
5-9	73.50	70.30	76.70
10-14	68.60	65.40	71.80
15-19	63.70	60.40	66.80
20-24	58.80	55.60	61.90
25-29	54.00	50.90	57.00
30-34	49.20	46.10	52.10
35-39	44.40	41.50	47.30
40-44	39.80	37.00	42.40
45-49	35.20	32.50	37.70
50-54	30.70	28.20	33.00
55-59	26.30	24.00	28.40
60-64	22.10	20.00	23.90
65-69	18.00	16.20	19.50
70-74	14.20	12.60	15.40
75-79	10.70	9.50	11.60
80-84	7.80	7.00	8.30
> 84	5.40	5.00	5.70

Idade média da
morte de
um indivíduo com
 x anos = $x + e_x$