Módulo 6

Estrutura etária

6.1 Projecção da população a partir da Life Table

Projectar a população é descrever o que é que aconteceria à população, em termos de abundância e de estrutura etária, *sob certos pressupostos claramente especificados*. Caswell (1989) faz questão de estabelecer uma diferença clara entre projectar e prever o futuro de uma população. **Prever** é descrever o que é que realmente vai acontecer à população. Na natureza, existem variações permanentes na mortalidade e na natalidade, motivadas por variações permanentes no meio físico, na estrutura etária da população, na sua estrutura genética e até social. As variações do meio físico, pelo menos, encerram um elevado grau de imprevisibilidade, por isso não é possivel efectuar previsões 100% precisas acerca do futuro da população. Podemos, contudo, fazer um exercício de abstracção das causas de variabilidade e perguntar o que é que vai acontecer *se persistir a actual configuração de mortes e nascimentos* expressa por l_x e m_x, por outras palavras, podemos *projectar* a população. Projectar pretende portanto ser mais revelador acerca das consequências de manter inalterada a *presente* situação que caracteriza a população do que própriamente acerca de um futuro em que as condições ambientais são imprevisíveis.

A nossa incursão no domínio das projecções da população, vai começar por explorar a informação contida na própria LT. A Tabela 6.1 representa uma população hipotética em que não há indivíduos com mais de dois anos de idade.

Tabela 6.1 Taxas vitais de uma espécie hipotética com apenas 3 idades (0, 1, 2).

Idade (x)	l_x	S_x	m_x
0	1	0.240	0
1	0.240	0.242	20
2	0.058	0.000	24
3	0.000		

Suponhamos que esta população é de reprodutores sazonais e que, no dia de aniversário de um dado ano, t, estão presentes nesta população 1000 fêmeas em cada idade (Tab. 6.2). Suponhamos por simplicidade que o intervalo (t, t+1) dura 1 ano. Nos anos seguintes (t+1, t+2, t+3 …), as descendentes destas fêmeas podem ser calculadas aplicando as taxas de sobrevivência da Tab. 6.1. Por exemplo, os 1000 indivíduos que tinham 0 anos em t, terão 1 ano de idade em t+1, e serão 240 (=1000 x S_0). Destes, sobrevivem 58 (=240 x S_1) até à idade 2 no ano t+2 (Tab. 6.2).

Vamos agora considerar os nascimentos. Suponhamos que os recenseamentos da população são efectuados *imediatamente após* a época de reprodução. Durante o intervalo (t, t+1)

Tabela 6.2 Sobrevivência de uma população com 1000 fêmeas por idade no inicio do ano t, à qual se aplicam as taxas vitais da Tab. 6.1.

		População nos 2 anos seguintes	
Idade x	***t***	***t+1***	***t+2***
0	1000		
1	1000	**240** = 1000 x 0.240	
2	1000	**242** = 1000 x 0.242	**58** = 240 x 0.242

tanto as fêmeas com 1 ano de idade, como as que têm 2 anos, reproduzem-se imediatamente antes de t+1, e as suas descendentes são contabilizadas pelo recenseamento feito em t+1. Aplicando os valores de m_x na Tab. 6.1, as 240 fêmeas com 1 ano originam 4800 (= 240 x m_1) filhas e as 242 fêmeas com 2 anos originam 5808 (= 242 x m_2) filhas. Temos assim um total de 10608 nascimentos femininos no ano t+1. Parte destas 10608 fêmeas com 0 anos de idade em t+1, por sua vez, sobrevivem até t+2 e reproduzir-se-ão imediatamente antes de t+3. A Tabela 6.3 e a Figura 6.1 apresentam o evoluir desta população ao longo de 7 anos, tendo sempre em atenção a sobrevivência e a reprodução. Acabamos assim de projectar a população a partir da LT.

Tabela 6.3. Dinâmica da população que se iniciou na Tab. 6.2, de acordo com as taxas vitais da Tab. 6.1, ao longo de 7 anos (recenseamento imediatamente após a reprodução).

Idade x	***t***	***t+1***	***t+2***	***t+3***	***t+4***	***t+5***	***t+6***
0	1000	10608	52312	265886	1349171	6846645	34744535
1	1000	240	2546	12555	63813	323801	1643195
2	1000	242	58	616	3038	15443	78360
Total	3000	11090	54916	279057	1416022	7185889	36466090

Podemos já calcular a taxa de crescimento e as taxas vitais da população a partir da Tab. 6.3. Porém, vou deixar essa tarefa para a secção seguinte, pois quero enquadrar esses cálculos no âmbito de três ensinamentos fundamentais da demografia.

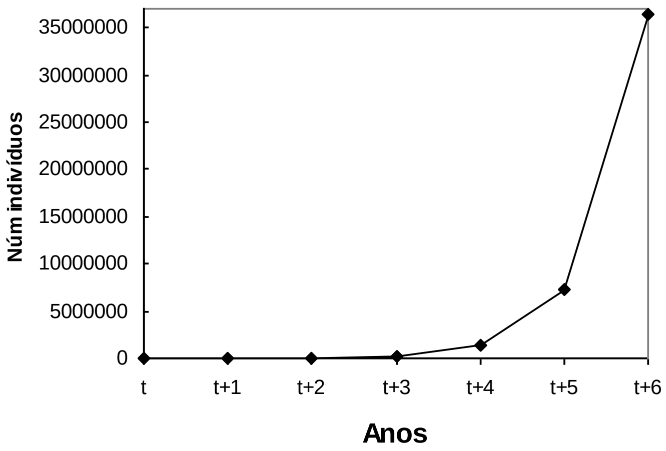


Figura 6.1 Crescimento de uma população em que as taxas vitais são constantes. Os valores numéricos são retirados da Tab. 6.3.

6.2 O crescimento geométrico e a distribuição etária estável (DEE)

Há três pontos a notar na dinâmica da população apresentada na Tabela 6.3. O primeiro é que esta população, em que as taxas vitais são constantes, cresce. Possuimos já instrumentos para medir crescimento, por isso vamos usá-los. A equação [2.9] (módulo 2) define λ, a taxa de incremento da população entre instantes sucessivos, e [2.18] relaciona λ com *r*. Estas duas taxas são formas possíveis de sumarizar todos os detalhes da sobrevivência e fertilidade presentes na LT da nossa população. Na Tabela 6.4 calculei λ e *r* ao longo dos anos estudados.

Tabela 6.4. Taxa finita de incremento (λ) e taxa instantânea de crescimento (r) da população total da Tab. 6.3.

	t	***t+1***	***t+2***	***t+3***	***t+4***	***t+5***	***t+6***
$\lambda = N_{t+1}/N_t$		3.697	4.952	5.081	5.074	5.075	5.075
$r = \text{Ln}\,\lambda$		1.307	1.600	1.626	1.624	1.624	1.624

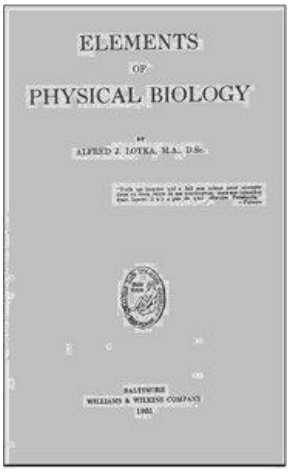
A Tab. 6.4 mostra que, depois duma fase inicial em que as taxas de crescimento variaram, estas acabam por estabilizar em valores fixos que já não se alteram mais. Quando o crescimento estabilizou, λ indica que cada fêmea deixa, em média, 5.075 fêmeas para o ano seguinte. A partir do momento em que a taxa de incremento estabiliza, a população *cresce geométricamente*, tal como se define na equação [2.9]. Alguns autores têm preferido chamar-lhe crescimento *exponencial*. A diferença entre geométrico e exponencial é quase semântica. No geométrico o tempo varia discretamente (como na Fig 6.1), enquanto no exponencial varia contínuamente e, por isso, o seu traçado pressupõe observações contínuas da densidade populacional.

O segundo ponto fundamental na Tab. 6.3 é que, não obstante a população estar a crescer, a sua estrutura etária, medida pela *proporção de indivíduos em cada idade*, acaba por estabilizar. Este ponto é ilustrado pela Tabela 6.5, onde se apresenta a dinâmica da estrutura etária ao longo dos anos. Ao fim de 4 anos, as proporções nas idades 0, 1 e 2 estabilizam em, respectivamente, 0.9528, 0.0451 e 0.0021. A população atingiu aquilo a que se chama uma **distribuição etária estável** (DEE). A partir deste momento, cresce com taxas de incremento constantes (Tab. 6.4).

Tabela 6.5 Proporção de indivíduos em cada idade na Tab. 6.3 ao longo dos anos. Em cada ano, o número de indivíduos de cada idade foi dividido pelo total de indivíduos no ano.

Idade x	***t***	***t+1***	***t+2***	***t+3***	***t+4***	***t+5***	***t+6***
0	0.333	0.9565	0.9526	0.9528	0.9528	0.9528	0.9528
1	0.333	0.0216	0.0464	0.0450	0.0451	0.0451	0.0451
2	0.333	0.0218	0.0011	0.0022	0.0021	0.0021	0.0021

Alfred Lotka (1880-1949) foi quem introduziu em ecologia o crescimento populacional com taxas vitais constantes. Em 1945, Patrick Leslie demonstrou formalmente que *uma população que cresça com taxas vitais fixas tende para uma DEE.* A demonstração matemática de Leslie tem pressupostos biológicamente muito aceitáveis e faz com que estejamos, de facto, em presença de um *(bio)teorema*. A estabilização que a Tab. 6.5 exemplifica não é portanto um mero acaso.



Alkfred Lotka nasceu em 1880 em Lemberg (presentemente L'viv, na Ucrânia), na época parte do império Austro-Húngaro. Em 1901 obteve o bacharelato em físico-química na Univ Birminghan, em Inglaterra, a seguir passou 1 ano em Leipzig a trabalhar como químico e, em 1902, emigrou para os EUA para trabalhar para a General Chemical Company. A partir de 1907 Lotka iniciou o estudo e uma série de publicações (1907-11) sobre a dinâmica da população estruturada por idades, deduzindo a DEE e a "equação de Lotka" (módulo 7). Este conjunto de publicações valeu-lhe o doutoramento pela Univ Birminghan em 1912. Durante a 1ª GM Lotka voltou a trabalhar na General Chemical Cia sobre como fixar azoto da atmosfera. Em 1920, um seu artigo sobre oscilações biológicas chamou a atenção de Raymond Pearl, na altura na John Hopkins Univ, onde Lotka receberia uma bolsa de 2 anos para escrever o livro "Elements of Physical Biology" (1925). Lotka tornou-se então chefe do gabinete de investigação da Metropolitan Life Insurance Company em N York, onde se focou na análise matemática de problemas demográficos. Lotka seria eleito presidente da Population Association of America (1938-39) e tem numerosas contribuições no âmbito de estudos de populações humanas.

Uma vez atingida a DEE, a população passa a crescer de forma geométrica (equações [2.9 e 2.10]) com λ constante. Mas não é só a população total que o faz. O terceiro ponto fundamental a tirar da Tab. 6.3 é que c*ada classe etária também cresce geométricamente* com a mesma taxa de crescimento que a população total. Não será demais enfatizar este ponto, pois ele será crucial mais adiante para derivar a fórmula da DEE e a equação de Lotka.

<u>*Exercício*</u> Verificar que os valores finais de λ e *r* na Tab. 6.4, podem ser obtidos a partir da Tab. 6.3, quer usando o número de indivíduos total, quer usando qualquer uma das idades.

Procuremos agora calcular as taxas vitais de toda a população partir da Tab. 6.3, usando para isso os valores dos últimos anos, quando a população já estabilizou e o valor das taxas também:

1) A *taxa de sobrevivência total*, S_t, está definida em [2.4] para reprodutores sazonais, quando o recenseamento é feito logo a seguir à reprodução. Dividindo o número de indivíduos que entram em t+6 (sem contar com os que acabaram de nascer), pelos indivíduos que estavam em t+5, obtem-se $S_t = (1643195+78360)/7185889 = 0.2396$ ano^{-1}.

2) A *taxa de mortalidade em tempo discreto*, é dada por $1\text{-}S_t = 1\text{-}0.2396 = 0.7604$ ano^{-1}

3) A *taxa de natalidade em tempo discreto*, b_t, está definida em [2.6] para a situação de recenseamento logo após a reprodução. Consiste em dividir os nascimentos pelos ascendentes que os originam. Fazendo as contas para o ano t+6, por exemplo, obtem-se $b_t = 34744535/(1643195+78360) = 20.1821$ fêmeas fêmea^{-1} ano^{-1}.

4) A *taxa instantânea de mortalidade total*, *d*, está definida em [2.13]. Contudo, esta definição *não* pode ser aplicada, pois requer o conhecimento do número de mortos num *instante* de tempo e a Tab. 6.3 só nos fornece os mortos ocorridos ao longo de 1 ano. Por exemplo, ao longo do ano que durou a passagem de t+5 para t+6, morreram 5203451 (= 6846645 - 1643195) indivíduos com 0 anos de idade. Supondo que a taxa instantânea se manteve constante ao longo do ano, podemos contudo calcular *d* a partir da taxa de sobrevivência total da população, tal como está definida em [2.21]. A taxa instantânea de mortalidade é então, $d = -Ln\ S_t = -Ln\ 0.2396 = 1.4288$.

Há mais formas de calcular directamente taxas vitais a partir da life table (LT). Os pormenores são fáceis mas tediosos, vou adiá-los para uma secção no fim deste capítulo. Para já, o mais natural é deduzir uma fórmula que nos permita calcular a DEE para onde a população tende, sem termos de fazer as contas da Tab. 6.5.

Designe-se por c_x a proporção de indivíduos na idade x. Esta proporção deve ser,

$$c_x = \frac{\text{Número de indivíduos na idade x}}{\text{População total}} \qquad [6.1]$$

O número de indivíduos na idade x do ano t, deve ser igual ao número de indivíduos que nasceu x unidades de tempo atrás, a multiplicar por l_x, a sua sobrevivência até à idade x. Quantos indivíduos nasceram há x anos atrás ? Recorde-se que em DEE, o número de indivíduos de *cada idade* aumenta geométricamente com taxa constante, *r*. A relação entre B_t, o número de nascimentos no ano t e o número de nascimentos x anos atrás, B_{t-x}, deve ser (cf. eq. [2.17]):

$$B_t = B_{t-x} e^{rx} \qquad [6.2]$$

O número de indivíduos na idade x do ano t é então $B_{t-x} l_x$, ou seja,

$$B_t\, e^{-rx} l_x \qquad [6.3]$$

O número total de indivíduos na população no ano t é o somatório da expressão [6.3] para todas as idades x = 0, 1, 2, …, L, sendo L a idade máxima na LT. Logo, c_x é dado por,

$$c_x = \frac{B_t e^{-rx} l_x}{\sum_{x=0}^{L} B_t e^{-rx} l_x} = \frac{e^{-rx} l_x}{\sum_{x=0}^{L} e^{-rx} l_x} \qquad [6.4]$$

<u>*Exercício*</u> Verificar que, uma vez conhecido *r* (=1.624), é possivel construir a DEE da Tab. 6.5, directamente a partir da coluna l_x da LT (Tab. 6.1), usando [6.4].

A equação [6.4] mostra que a DEE pode ser construida directamente a partir da LT. É necessário contudo poder calcular *r* também a partir da LT. Vou adiar este assunto por mais um pouco, para explorar já em seguida algumas consequências demográficas de [6.4].

6.3. A população estacionária

O conceito de população estacionária é essencialmente teórico, mas tem tido uma utilização prática tão grande em ecologia e em demografia humana, que justifica que lhe dedique uma secção. Uma **população estacionária** é uma população que tem DEE e em que, além disso, a taxa de natalidade iguala exactamente a taxa de mortalidade *(b=d)*, por outras palavras, *r=0*. Uma população estacionária não varia portanto o seu número de indivíduos (total e por idades) ao longo do tempo. Em biologia marinha, é costume também designá-la por **população em equilibrio**, precisamente porque N e N_x (x=0, 1, …) não variam. Alguns autores (e.g. Pollard 1973) definem a população estacionária como sendo aquela em que:
(1) o vector de sobrevivências por idade $(S_0, S_1, ..., S_x, ...)$ mantem-se constante ao longo dos anos *e*,
(2) o número de nascimentos (N_0) por unidade de tempo (e.g. ano) permanece constante.

Esta definição é útil, porque indica-nos exactamente como construir uma população estacionária. A Tabela 6.6 representa a dinâmica duma população com 5 idades, a partir da coorte de 1995. As taxas de sobrevivência por idade, S_x, mantiveram-se constantes ao longo dos anos, embora sejam diferentes entre idades. Os nascimentos, N_0, por seu lado, após uns anos de oscilações, estabilizaram em 1000 indivíduos por ano a partir de 1999. O número de indivíduos por idade, N_x, começa por apresentar oscilações, porém, após a estabilização dos nascimentos, N_x progressivamente também estabiliza. Após um periodo de transição de 4 anos (1999-2002), a estrutura etária estabiliza definitivamente em 2003 e, portanto, o número total de indivíduos, N, também. A partir de 2003, a população tem DEE. Além disso, como N e os N_x se tornam constantes, a *população está estacionária*. A entrada em estacionaridade é consequência *(1)* do vector de sobrevivência se manter constante e *(2)* do número de nascimentos se tornar também constante.

Tabela 6.6 Dinâmica de uma população em que os valores de S_x (x=0, …, 4) se mantiveram constantes e os nascimentos, a partir de 1999, também se tornaram constantes. Após um periodo de transição (1999-2002), a partir de 2003 a população torna-se *estacionária*. A estrutura etária da população estacionária, é igual à estrutura etária de uma coorte (ambas assinaladas).

S_x	Idades	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
0.55	**0**	1200	700	1500	800	**1000**	1000	1000	1000	**1000**	1000	1000
0.85	**1**		660	385	825	440	**550**	550	550	**550**	550	550
0.35	**2**			561	327	701	374	**468**	468	**468**	468	468
0.15	**3**				196	115	245	131	**164**	**164**	164	164
	4					29	17	37	20	**25**	25	25
	TOTAIS:					2285	2187	2185	2201	2206	2206	2206

O ponto crucial a notar na Tab. 6.6 é que, uma vez em estacionaridade, *a estrutura etária da população é igual à estrutura etária de uma coorte*. É isto que confere grande interesse ao conceito de população estacionária. Muitas vezes, o demógrafo trabalha com a estrutura etária da população, estimada num ano do calendário, e aplica-lhe toda a metodologia que só faz sentido biológico aplicar a uma coorte. O exemplo paradigmático é a construção da LT vertical que discuto mais adiante. Ao fazê-lo, está-se a pressupôr que a população está estacionária.

Note-se que a condição imposta de número de nascimentos constante para a população entrar em estacionaridade (periodo 1999-2002 na Tab 6.6), não é o mesmo que taxa de natalidade constante. *No periodo de transição*, o número de indivíduos em cada idade varia continuamente, a manutenção de nascimentos constantes implica portanto uma taxa de natalidade (=B_t/N_t) também variável. Depois de a população entrar em estacionaridade, com recrutamento constante, a taxa de natalidade torna-se então também constante.

A existência de recrutamento constante em populações selvagens é concebível quando as condições ambientais que afectam a sobrevivência não se alteram e, *simultâneamente*, há factores que estabilizam o número total de recem-nascidos viáveis todos os anos. Isto pode suceder se este número depender muito de factores ambientais pouco variáveis (número de refúgios, número de locais propícios a nidificação, etc.). Pode também suceder se houver mecanismos de autoregulação (competição intraespecífica por espaço ou recursos, canibalismo, etc.) que delimitem o número de filhos a um intervalo de valores estreito.

No mundo real, as situações mais frequentes às quais o conceito de população estacionária se aplica são, provavelmente, situações em que tanto a sobrevivência como o número de nascimentos varia. Porém, esta variação *não tem tendências persistentes* ao longo dos anos. Isto é, não há aumentos ou diminuições contínuas e persistentes de sobrevivência e/ou nascimentos durante muitos anos seguidos. A sobrevivência e o recutamento *oscilam em torno de valores médios*, idealmente com uma variância pequena, de tal forma que um aumento num ano é compensado por uma diminuição num ano seguinte. Na prática, situações destas conduzem a estruturas etárias que, frequentemente, se consideram ser aproximadamente estacionárias.

6.4 Pirâmides etárias

É comum os livros de ecologia e de geografia apresentarem gráficos de pirâmides etárias que são consideradas típicas de certos tipos de populações. Por exemplo, em populações em crescimento ($r>0$), as pirâmides são dominadas pelos grupos etários jovens, enquanto em populações estacionárias ($r\approx0$), como por exemplo as populações humanas na europa ocidental, a “pirâmide” tem forma mais rectangular (Figura 6.2). Neste momento dispomos já dos instrumentos teóricos necessários para compreender esta variação na forma das pirâmides etárias.

O número de indivíduos em cada classe da pirâmide, N_x, é gráficamente representado por um rectângulo de largura proporcional ao próprio N_x. Mas N_x não é mais do que o número total de indivíduos da população multiplicado por c_x, i.e. $N_x=Nc_x$. É natural então, que a equação [6.4], que permite calcular os c_x, explique a razão por que as pirâmides etárias têm a forma que têm.

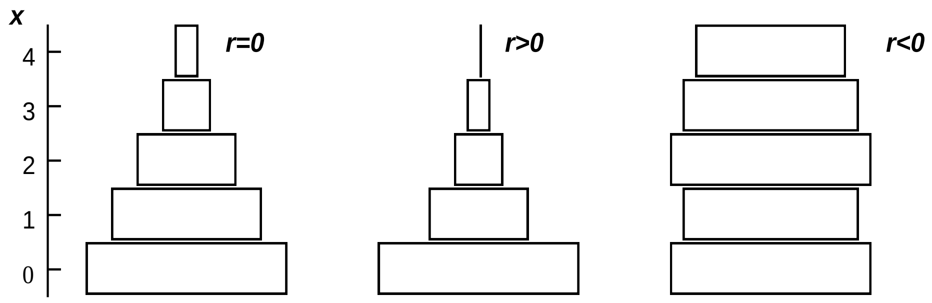


Figura 6.2 Pirâmides etárias de populações com 5 grupos de idades para três valores da taxa instantânea de crescimento, *r*. A largura dos rectângulos é proporcional ao número de indivíduos em cada idade.

Como se depreende de [6.4], a proporção relativa de cada idade, c_x, depende únicamente de $e^{-rx}l_x$, uma vez que, dada uma LT, o denominador de [6.4] é uma quantidade constante. Considere-se então [6.4] em três situações possíveis (Fig. 6.2),

1) *A população não varia (mortalidade = natalidade), i.e. r=0.* Neste caso, $e^{-rx}l_x = l_x$. A população é estacionária. Neste caso, l_x determina inteiramente a proporção de cada classe etária. Como $l_0=1$ e todos os outros l_x são menores que 1 e são monotónicamente decrescentes, a estrutura etária é uma pirâmide cuja base é c_0N e depois vai estreitando para cima ao ritmo com que os l_x diminuem.
2) *A população cresce (mortalidade < natalidade), i.*e. *r>0*. Neste caso $0<e^{-rx}\leq 1$. Tal como no caso anterior, $l_0=1$, e todos os subsequentes valores de l_x são menores que 1, sendo tanto mais pequenos quanto mais alta é a idade. Neste caso, porém, os l_x multiplicam por uma quantidade entre 0 e 1 e, por isso, a pirâmide etária vai estreitando para cima a um ritmo ainda mais rápido que o ritmo de diminuição dos próprios l_x. Nas populações com DEE em crescimento deve-se por isso esperar uma proporção das idades jovens ainda maior do que no caso em que a população é estacionária. A proporção de jovens será tanto maior quanto maior fôr *r*.

3) *A população decresce (mortalidade > natalidade), i.*e. *r<0*. Neste caso, $e^{-rx}\geq 1$. Como sempre, $l_0=1$, e todos os subsequentes valores de l_x são menores que 1, sendo tanto mais pequenos quanto mais alto é x. Neste caso, contudo, os l_x multiplicam por uma quantidade positiva, que é tanto maior quanto mais alta é a idade x, contrabalançando a diminuição dos l_x. O resultado é uma pirâmide etária que pode ser muito pouco piramidal, com classes etárias adultas que podem ser maiores que a própria classe c_0. Nestas populações é normal esperar encontrar uma proporção relativa de jovens mais baixa do que quando a população não varia.

A aplicação destes resultados à natureza deve ser feita com reservas, pois não é frequente encontrar populações com DEE, já que as taxas de natalidade e mortalidade não permanecem constantes por muito tempo. Em principio, uma população em crescimento deve ter uma dominância crescente de classes jovens e uma população em decrescimento deve ter uma diminuição progressiva das classes jovens. Entre estes dois extremos pode haver muitas variantes e por isso as distribuições etárias não podem em geral ser usadas com segurança para prever tendências na população. É perfeitamente possivel, por exemplo, uma população a decrescer ter um número crescente de jovens. Basta conceber que as taxas de sobrevivência estejam a diminuir em todas as idades, mas diminuam mais nas idades jovens.

Literatura Citada

Caswell, H. 1989. *Matrix Population Models*. Sinauer, Sunderland, Mass.

Leslie, PH. 1945. On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika* **33**:183-212.

Pollard JH. 1973. *Mathematical Models for the Growth of Human Populations*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.