Estimação de parâmetros

T	*Tempo médio de geração*
r	*Taxa instantânea de crescimento*
S_x, l_x	*Taxas sobrevivência*

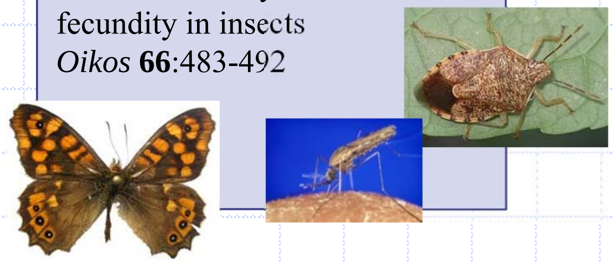
Fertilidade e fecundidade

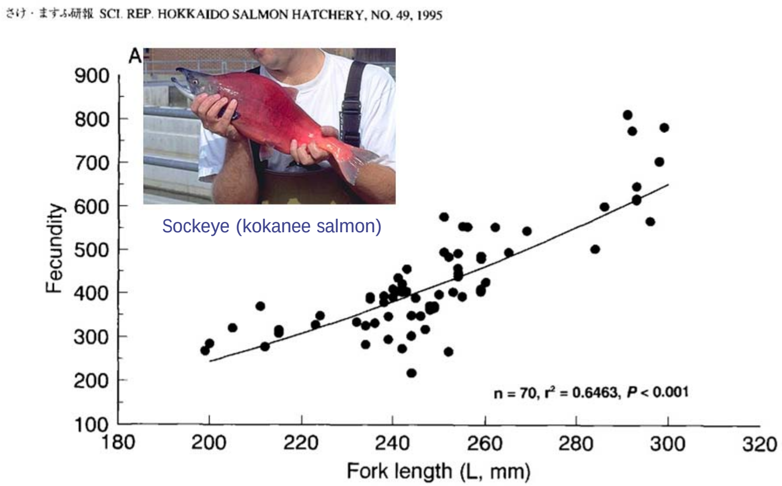
Fertilidade – número de fêmeas-filhas viáveis por fêmea adulta por unid tempo

Fecundidade – potencial máximo de produção de descendência por unid tempo.

Em geral mais fácil:
relações fecundidade *vs* body size

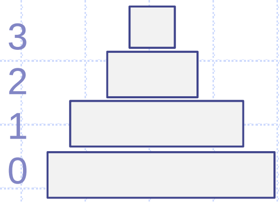
Honek A. 1993. Intraspecific variation in body size and fecundity in insects *Oikos* **66**:483-492





Sockeye (kokanee salmon)

Idade ⟷ Tamanho corporal

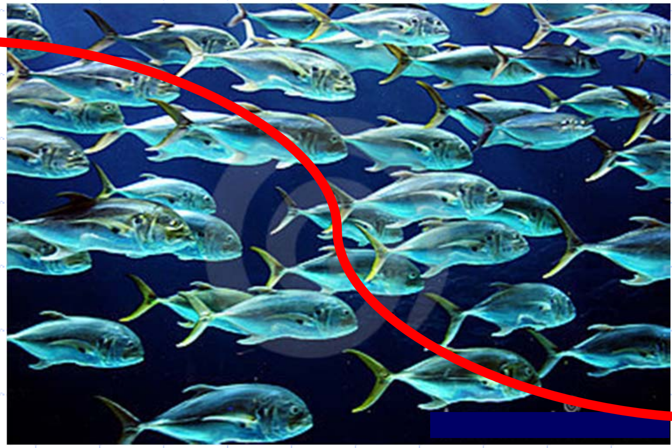


→ Fecundidade total

Fertilidade

Fertilidade – número de fêmeas-filhas viáveis por fêmea adulta por unid tempo

Quando ?
Qual a proporção “viável” ?

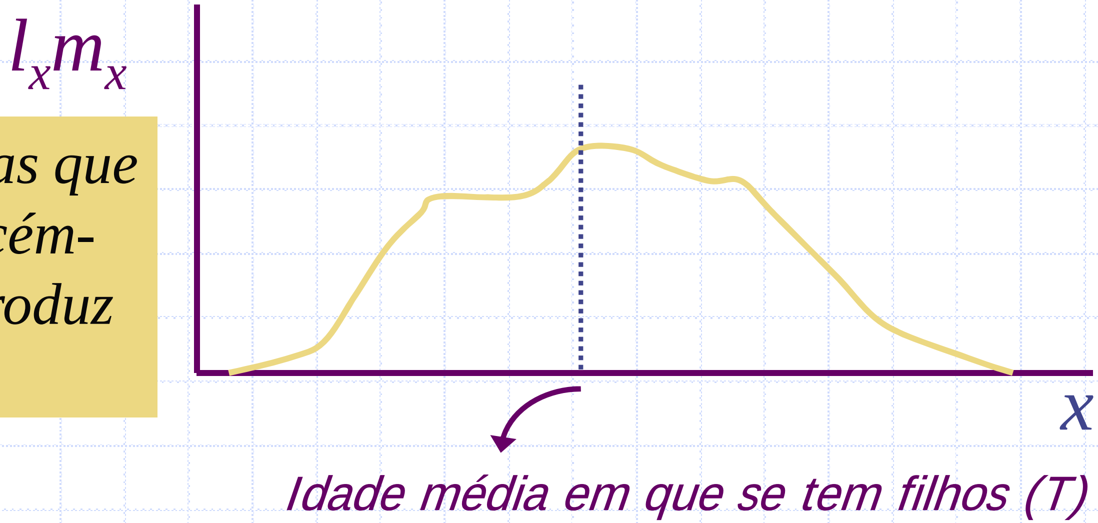


Que fracção da população adulta se reproduz ?

Tempo médio de geração, T

Geração, T *= periodo de tempo que, em média, decorre entre nascimento dos pais e nascimento dos filhos que esses pais originam.*

Núm. fêmeas que 1 fêmea recém--nascida produz aos x anos



1^a estimativa de T

Na idade 0, uma fêmea tem em média $l_0 m_0$ filhas
Na idade 1, uma fêmea tem em média $l_1 m_1$ filhas
Na idade 2, uma fêmea tem em média $l_2 m_2$ filhas
Etc.

T= idade média em que se tem filhos

$$T \approx \frac{0\, l_0 m_0 + 1\, l_1 m_1 + 2\, l_2 m_2 + \ldots}{l_0 m_0 + l_1 m_1 + l_2 m_2} = \frac{\sum_{x=0}^{L} x\, l_x m_x}{\sum_{x=0}^{L} l_x m_x}$$

R_0

2ª estimativa de T: o tempo que a população leva a crescer R_0

$$\underset{N_t}{t} \longrightarrow \underset{N_{t+1}}{t+1}$$

$$\frac{N_{t+1}}{N_t} = \lambda \qquad N_{t+n} = \lambda^n N_t$$

$R_0 \Leftrightarrow \lambda$ quando Δt = tempo de 1 geração ou seja,

$$N_{t+T} = \lambda^T N_t = R_0 N_t$$

$$\lambda^T = R_0$$

$$T = \frac{Ln\, R_0}{Ln\, \lambda}$$

R_0 é obtido da LT

λ é obtido de N_{t+1}/N_t

r

Contextos em que *r* surge:

Crescimento exponencial contínuo $$N_t = N_0 e^{r\,t}$$

Proporção da idade *x* em DEE $$C_x = \frac{e^{-rx} l_x}{\sum_{x=0}^{L} e^{-rx} l_x}$$

Relação com R_0 e T:

$$\sum_{x=0} l_x m_x = R_0 = e^{r\,T} \quad \therefore \quad r = \frac{Ln\,R_0}{T}$$

Métodos para estimar *r*

$$r = Ln\,\lambda = Ln\,\frac{N_{t+1}}{N_t}$$

Pressupõe população em DEE

A partir das taxas vitais da LT:

1. Aproximativo, usando $r = \dfrac{Ln\,R_0}{T}$

2. Rigoroso, pela equação de Lotka

1º método para estimar *r* a partir da LT

$$r = \frac{Ln\,R_0}{T}$$

$$R_0 = \sum_{x=0} l_x m_x$$

$$T \approx \frac{\sum_{x=0}^{L} x\, l_x m_x}{R_0}$$

2º método para estimar *r* a partir da LT

Assumindo a população em DEE,

Aumento do número de nascimentos

$$B_t = B_0 e^{r\,t}, \quad B_0 = B_t e^{-r\,t}$$

Número de nascimentos B_0 que sobrevive até à idade x

$$B_0 l_x$$

$$\underbrace{\left(B_t e^{-r\,x}\right)}_{B_0} l_x$$

Isto é o número de indivíduos com idade x, no ano t

A equação de Lotka

$\left(B_t e^{-r\,x}\right) l_x$ Número de indivíduos com idade x no ano t

m_x nascimentos por indivíduo

Núm nascimentos originados pela idade x $\quad B_t e^{-r\,x}\; l_x\, m_x$

Total de nascimentos no ano t $\quad \cancel{B_t} = \sum_{x=0}^{L} \cancel{B_t} e^{-r\,x} l_x m_x$

equação de Lotka $\quad 1 = \sum_{x=0}^{L} e^{-r\,x} l_x m_x$

$$[l_x][m_x]$$

$$r = \frac{Ln\, R_0}{T}$$

$$1 = \sum_{x=0}^{L} e^{-r\,x} l_x m_x$$

$$r = \frac{Ln\, R_0}{T}$$

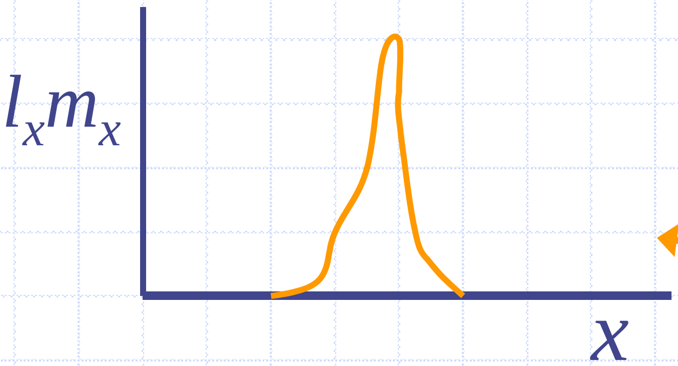
boa aproximação se:

$$R_0 \approx 1, \quad r \approx 0$$

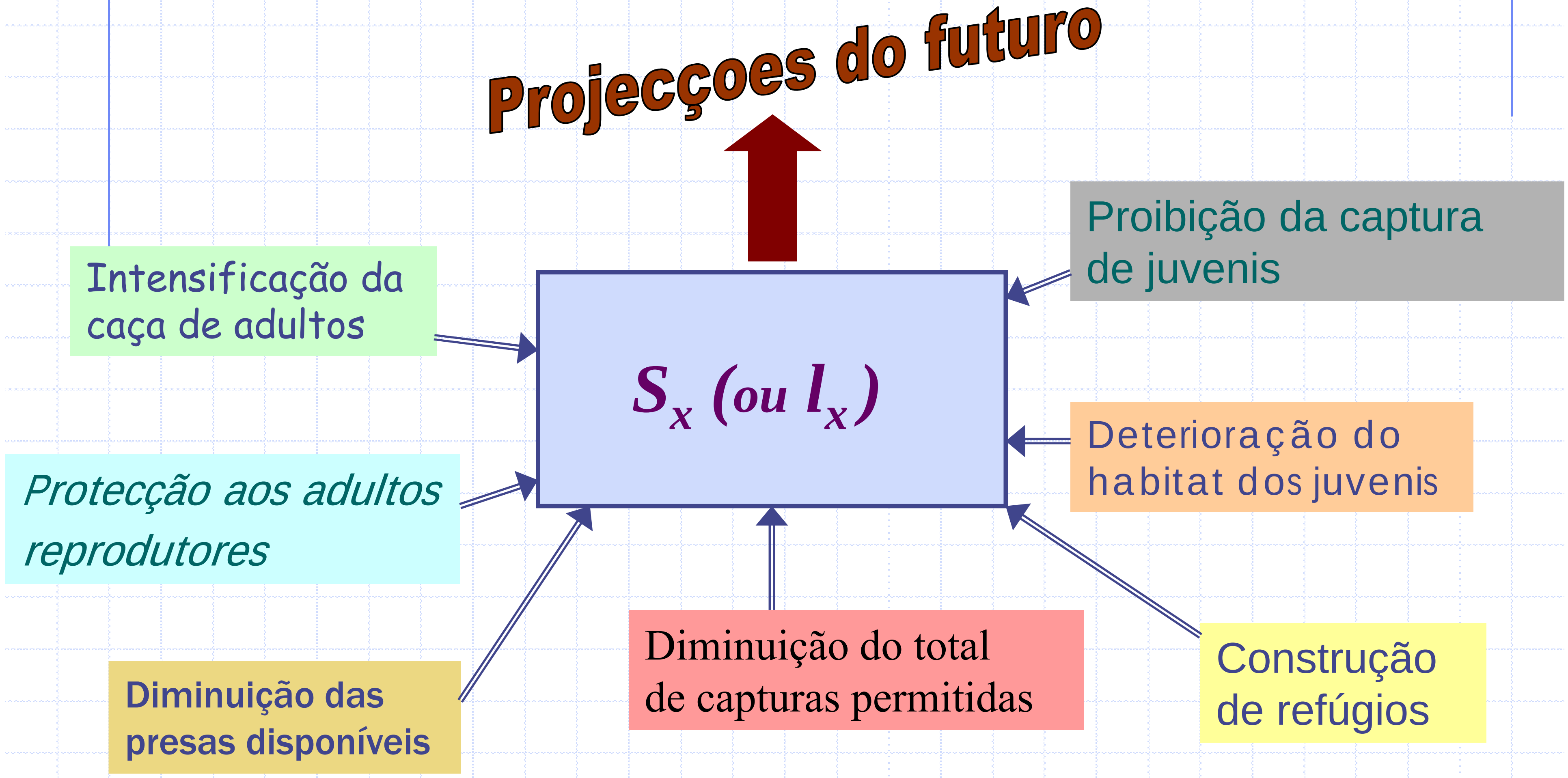
(população estacionária)

E/ou $f(x) = l_x m_x$

tem pequena variância



A sobrevivência



4 práticas habituais

LT da coorte

Idades	1996	1997	1998	1999	2000	2001
0	**1000**					
1		**800**				
2			**600**			
3				**450**		
4					**300**	
5						**150**

LT vertical

Idades	1996
0	**1000**
1	**790**
2	**500**
3	**480**
4	**350**
5	**90**

4 práticas habituais (Contin.)

Misto, com
2 anos

Idades	1996	1997
0	**1000**	**1100**
1	**790**	**800**
2	**500**	**650**
3	**480**	**425**
4	**350**	**300**
5	**90**	**200**

Várias coortes
Vários anos

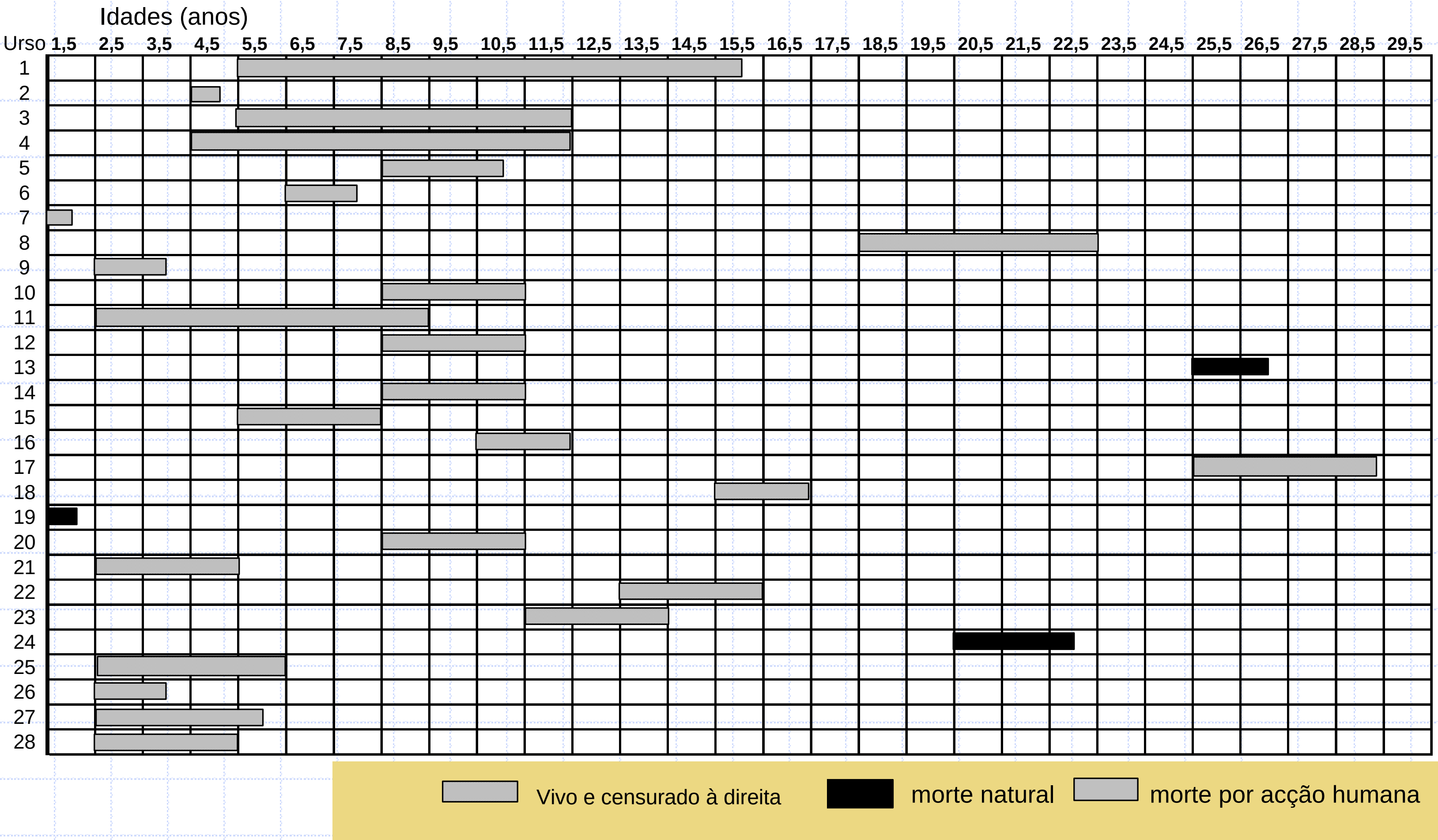
Idades	2000	2001	2002	2003	2004	2005
0	**10**			**20**		
1		**2**	**3**		**15**	
2				**3**		**12**
3	**6**					
4		**4**				
5			**2**			

métodos
Kaplan-Meier
Nelson-Aalen


www.duiops.net/seresvivos

28 animais marcados com rádio-emissores 1983-1993

Dptm of Fish & Game, Idaho, EUA (Skalski *et al* 2005)



Kaplan-Meier

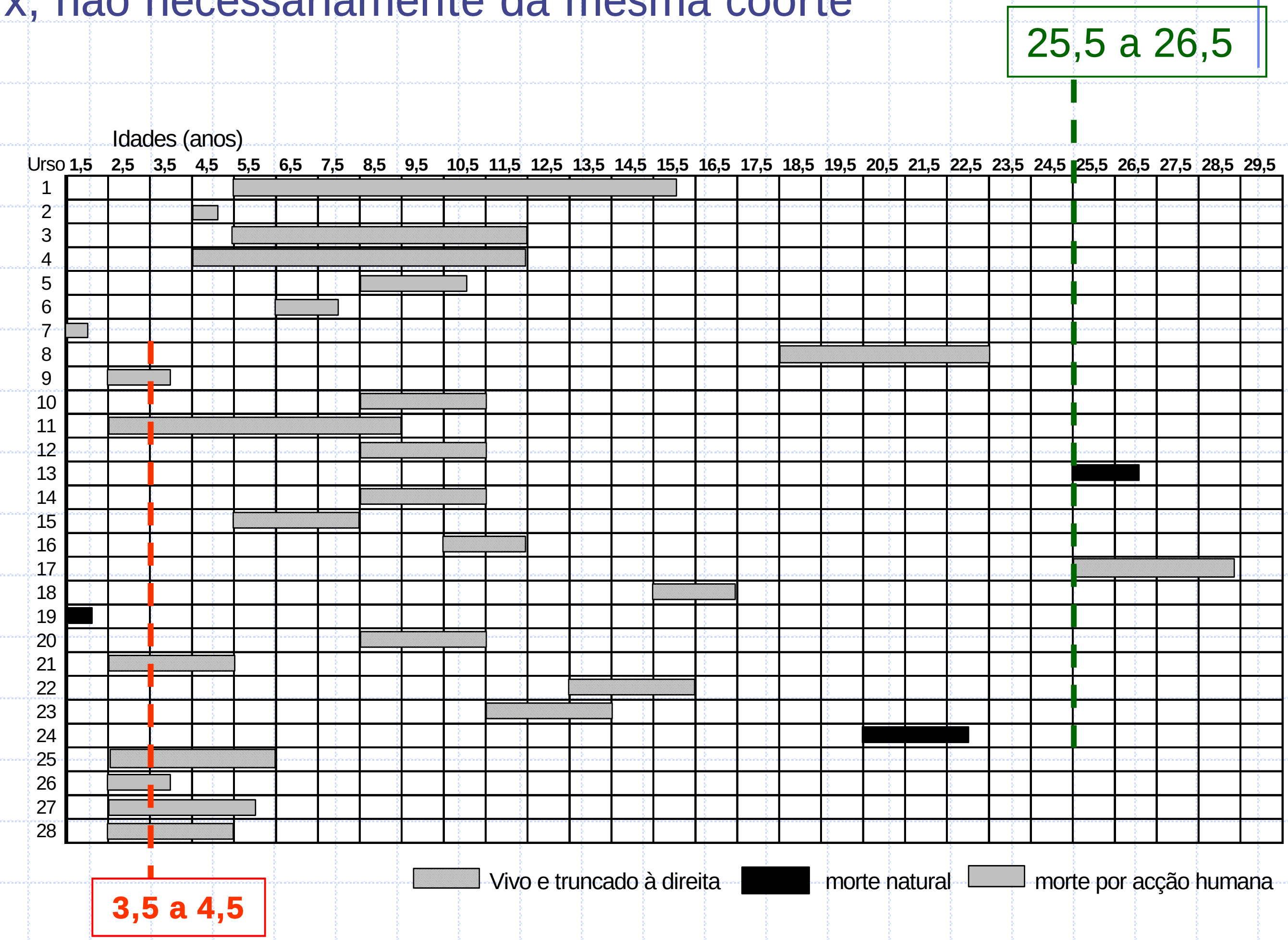
Estimar S_x com base em todos os animais vivos
no início da idade x, não necessariamente da mesma coorte

Explos,

$S_{3,5}=5/7$

$S_{25,5}=2/2$

$$l_{[2.5,5.5]} = S_{2.5}S_{3.5}S_{4.5}$$



Nelson-Aalen

Kaplan-Meier

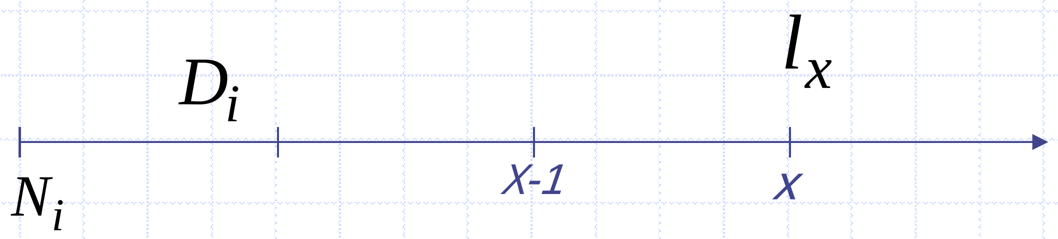
$$l_x = S_0 S_1 S_2 ,\dots, S_{x-1}$$

Demasiado sensível a pequenas amostras (erros em S_x propagam-se demasiado)
Não definido para idades em que, na amostra, N_x=0 (=> S_x=0)

Nelson-Aalen

Um estimador de l_x mais satisfatório para amostras pequenas

$$l_x = e^{-\sum_{i_{inicial}}^{x-1} \frac{D_i}{N_i}}$$

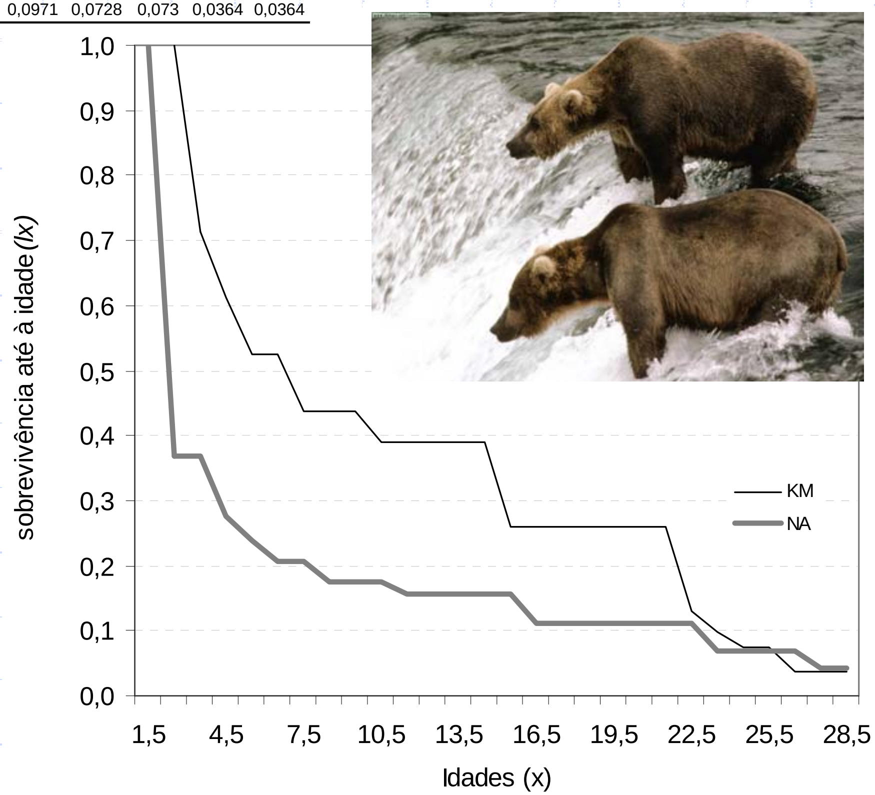


Curva de sobrevivência dos ursos

Idades (anos)

	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5	13,5	14,5
N_i	2	7	7	7	7	6	6	9	8	9	5	2	3	2
D_i	2	0	2	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
S_i	0	1	0,714	0,857	0,857	1,000	0,833	1,000	1,000	0,889	1,000	1,000	1,000	1,000
l_x		1	1	0,714	0,6119	0,5244	0,524	0,437	0,4368	0,4368	0,3883	0,388	0,3883	0,3883

	15,5	16,5	17,5	18,5	19,5	20,5	21,5	22,5	23,5	24,5	25,5	26,5	27,5	28,5
N_i	3	1	ND	1	1	2	2	2	ND	ND	2	2	1	1
D_i	1	0	ND	0	0	0	0	1	ND	ND	0	1	0	0
S_i	0,667	1	ND(1)	1	1	1	1	0,5	ND(0,75)	ND(0,75)	1	0,5	1	1
l_x	0,3883	0,259	0,259	0,259	0,259	0,259	0,259	0,259	0,1295	0,0971	0,0728	0,073	0,0364	0,0364



Mais detalhes:
Texto teórico e aula prática

Sondagens e census

População

$$\begin{bmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \\ \dots \end{bmatrix}$$

Recenseamento ou census
(= contagem exaustiva)

$$\begin{bmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \\ \dots \end{bmatrix}$$

Sondagem ou amostragem
(= tomada de amostra(s))

- *Capturas comerciais*
- *Transects*
- *Captura-recaptura*
- *Quadrats*
- *Etc.*

(Estimadores)

$$\begin{bmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \\ \dots \end{bmatrix}$$

Usado para estimar S_x

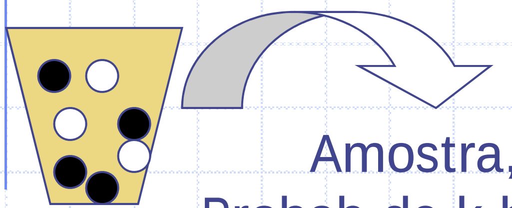
$$\hat{S}_x$$

I.C.

S_x como parâmetro binomial

S_x = Probabilidade de 1 individuo sobreviver entre idades x e x+1

$S_x + q_x = 1$



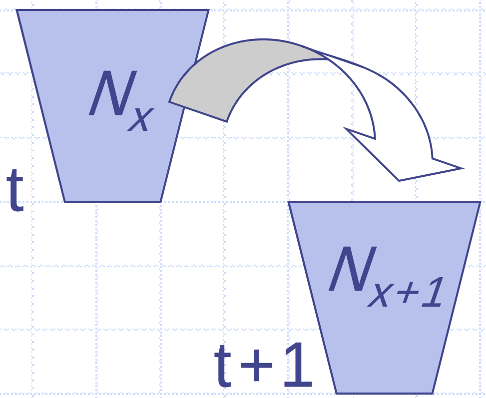
Amostra, n

Probab de k brancas ?

$$\text{Prob}\,(K\ \text{brancas}) = \frac{n!}{K!\,(n-K)!}\,p^{K}\,q^{n-K}$$

Bin(n, p)

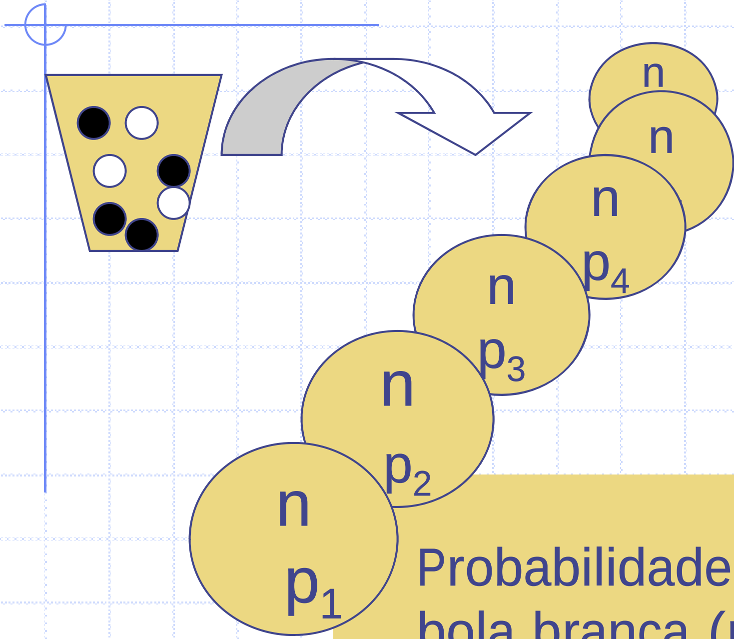
Probab de ser branco



Amostra, N_x

Probab de N_{x+1} sobreviventes ? *Bin* (N_x, S_x)

Média e variância de *p*

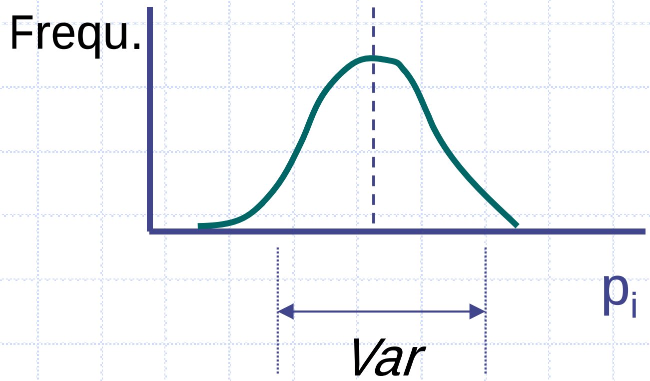


Probabilidade de bola branca (p) = *p*

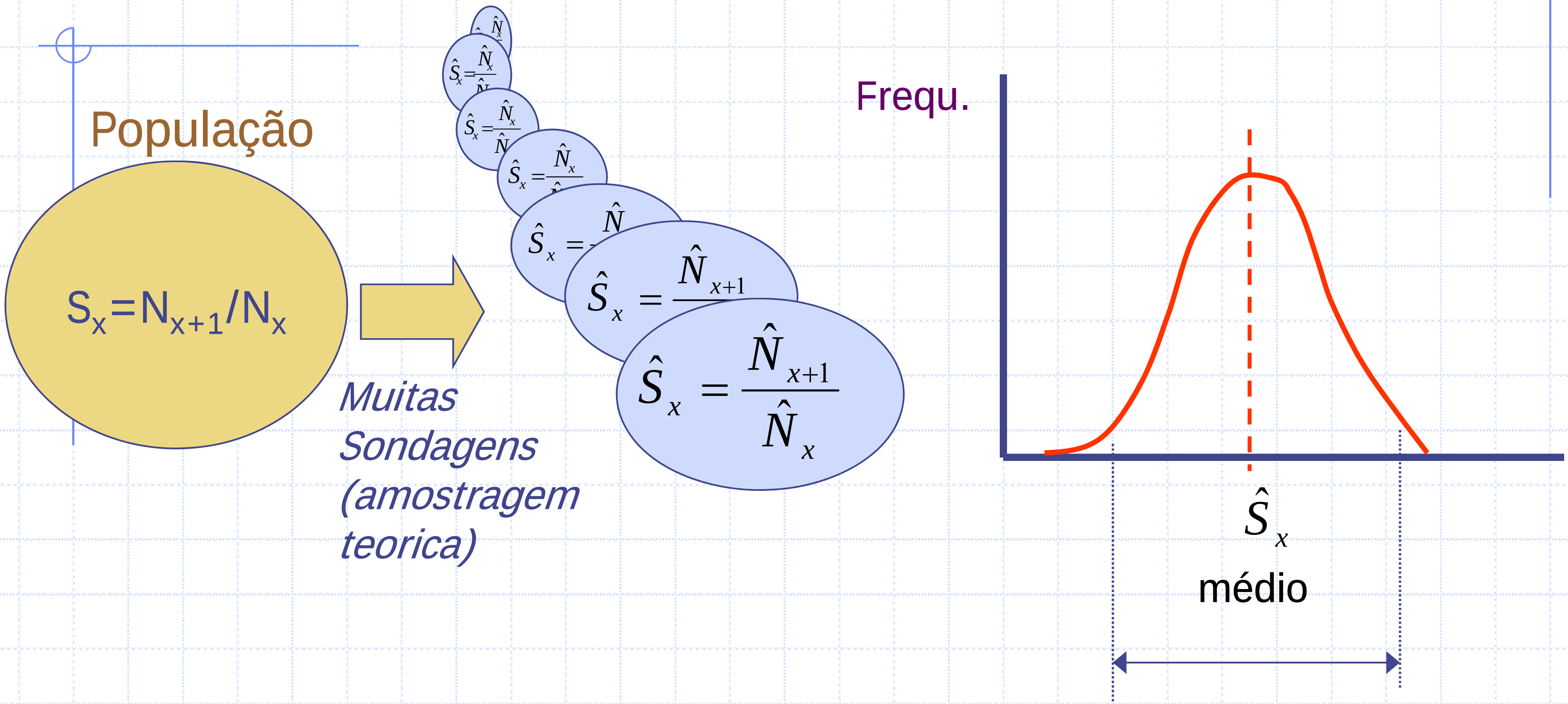
Variância (p) = *pq/n*

Estimada por $\dfrac{\hat{p}\,\hat{q}}{n-1}$

Para cada amostra: $p_i = K_i/n$



Média e variância de S_x



$$Var\ (S_x) = \frac{\hat{S}_x \hat{q}_x}{N_x - 1}$$

Intervalos de confiança

se $\quad K \cap B(n, p), \qquad Lim_{(n \to +\infty)} \dfrac{K - np}{\sqrt{npq}} = N(0,1)$

Teorema DeMoivre-Laplace

Intervalo confiança para S_x

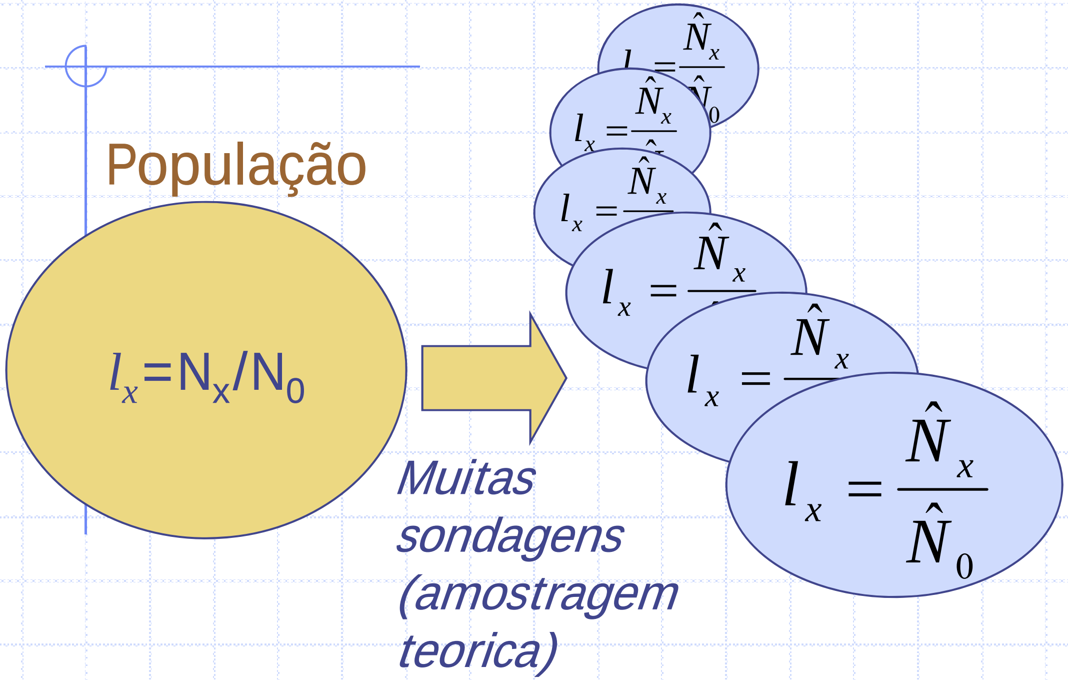
$$\hat{S}_x \pm z_{\alpha/2} \sqrt{Var\, \hat{S}_x}$$

$$\hat{S}_x \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{S}_x \hat{q}_x}{N_x - 1}}$$

Quantil da *N(0,1)* para $\alpha/2$

Se α=0.05, $Z_{\alpha/2}$ =1.96

O mesmo para l_x



Variância de l_x

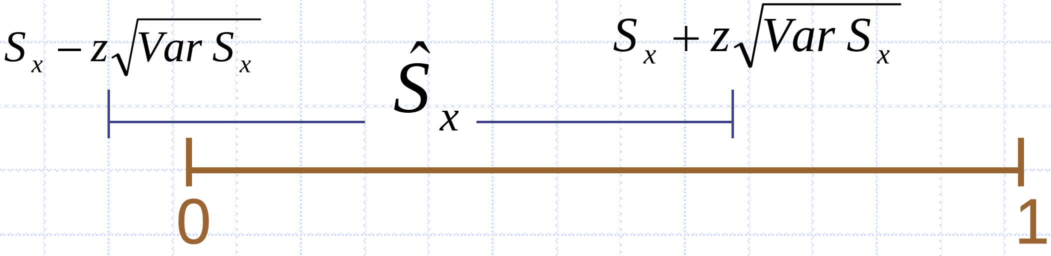
$$Var(l_x) = \frac{l_x(1 - l_x)}{N_0 - 1}$$

I.C. para l_x

$$\hat{l}_x \pm z_{\alpha/2}\sqrt{Var\, l_x}$$

Duas dificuldades

1. Os I.C.'s para S_x (ou I_x) podem sair fora do intervalo [0, 1]



2. Se S_x (ou I_x) estimado forem 0 ou 1, o I.C. é nulo

$$\hat{S}_x \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{S}_x \hat{q}_x}{N_x - 1}}$$

Método Agresti-Coull

Qual o tamanho da amostra ?

Pretende-se conhecer S_x (ou l_x)

Quantos indivíduos, N_x, devo seguir ?

A definir:

1. Qual o <u>erro</u> (*E*) que se está disposto a tolerar ?

$$\hat{S}_x \in S_x \pm E$$

2. Qual a probabilidade de errar, i.e. α, tal que:

$$\Pr ob\left(\hat{S}_x \in S_x \pm E\right) = 1-\alpha$$

O tamanho da amostra

Por outras palavras, usando os limites do IC:

$$\hat{S}_x + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_x q_x}{N_x}} \leq S_x + E \qquad \hat{S}_x - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_x q_x}{N_x}} \geq S_x - E$$

Explicitando para N_x

$$N_x \geq \frac{z_{\alpha/2}^2 \hat{S}_x \hat{q}_x}{E^2}$$

$Z_{0.025}=1.96$
E = pré-definido, e.g. E=0.1

S_x é desconhecido
usar estimativa preliminar ou
usar $S_x=0.5$