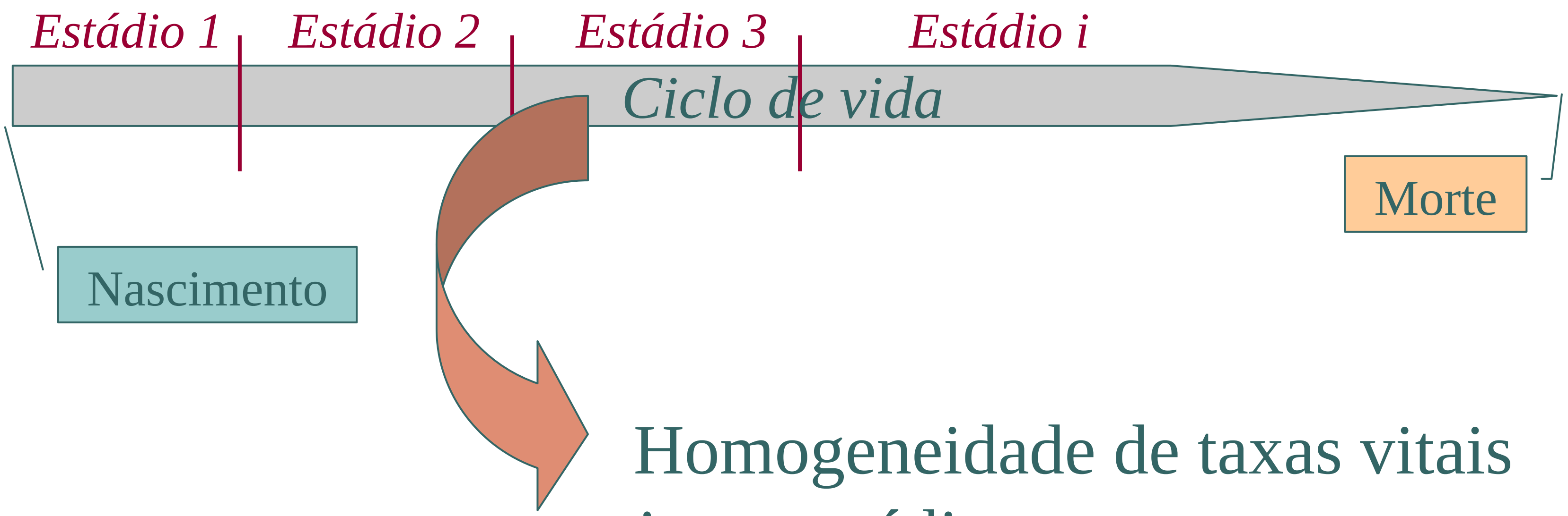
A Matriz de Leslie

Módulo 8

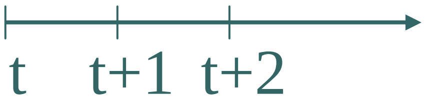
Populações estruturadas em estádios fisiológicos

<u>Estádios</u>:
idades, tamanhos corporais, estádios desenvolvimento ...



Homogeneidade de taxas vitais *intra*-estádios

Intervalos discretos *vs.* Tempo contínuo



Intervalos discretos: $N_{t+1} = \lambda\ N_t$

Eq. às diferenças

Tempo contínuo

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

Eq. diferencial

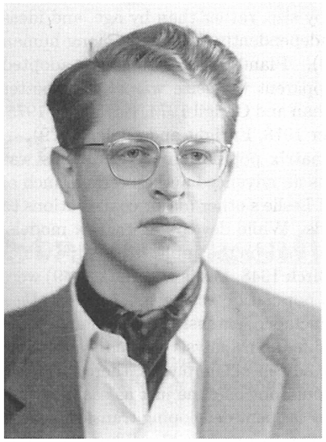
Tipos de modelos para populações estruturadas

Tempo biológico

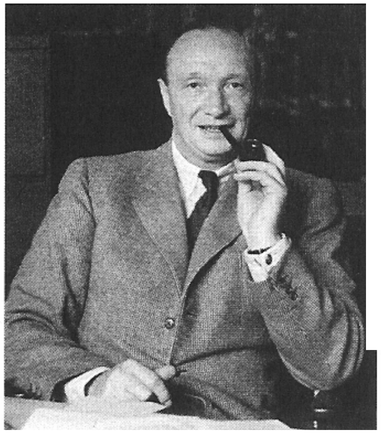
Tempo absoluto

	Estádios fisiol. discretos	Estádios fisiol. contínuos
Tempo discreto	***Modelos matriciais***	***Eqs Integro-diferenciais***
Tempo contínuo	***Eqs diferenciais com atrasos***	***Eqs às derivadas parciais***

História



L. Lefkovitch, 1965



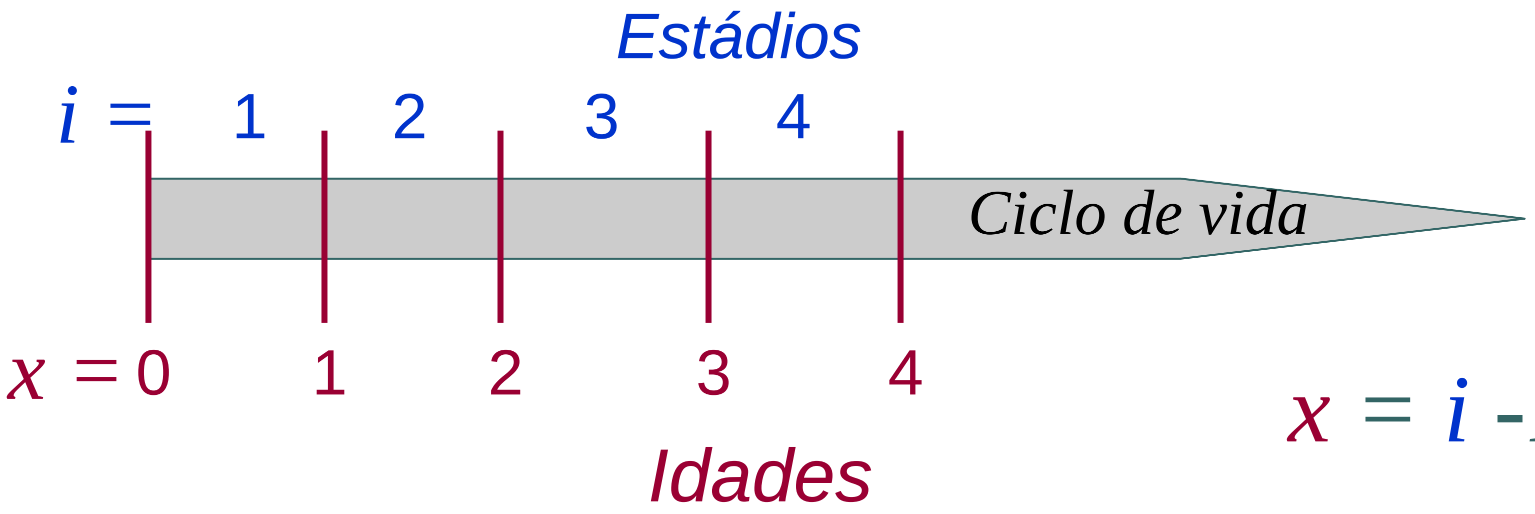
Patrick Leslie, 1945

C. Elton
Bureau of Animal Populations, Oxford

Hal Caswell

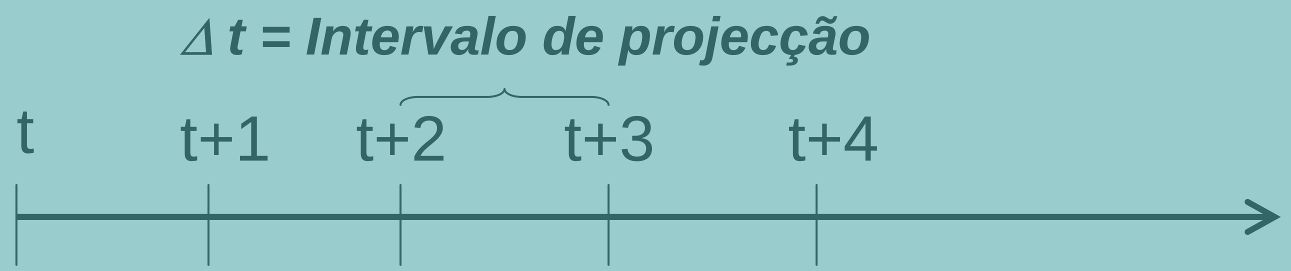
Caswell, H. 2001. *Matrix Population Models. Construction, Analysis and Interpretation*. Sinauer

Estádios *vs.* idades



$$x = i - 1$$

Tempo absoluto



$$\begin{bmatrix} N_{t,0} \\ N_{t,1} \\ N_{t,2} \\ \ldots \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} N_{t+1,0} \\ N_{t+1,1} \\ N_{t+1,2} \\ \ldots \end{bmatrix} \quad [\ldots] \quad \begin{bmatrix} N_{t+4,0} \\ N_{t+4,1} \\ N_{t+4,2} \\ \ldots \end{bmatrix}$$

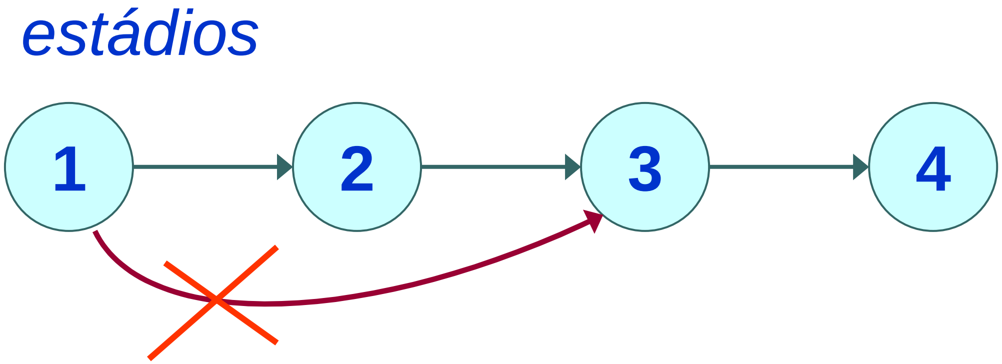
2 regras

O intervalo de projecção é sempre constante

Intervalo projecção ≤ duração do menor estádio

1 estádio de cada vez

Um indivíduo não pode saltar 2 ou mais estádios biológicos em 1 intervalo projecção



Parâmetros de projecção

P_i

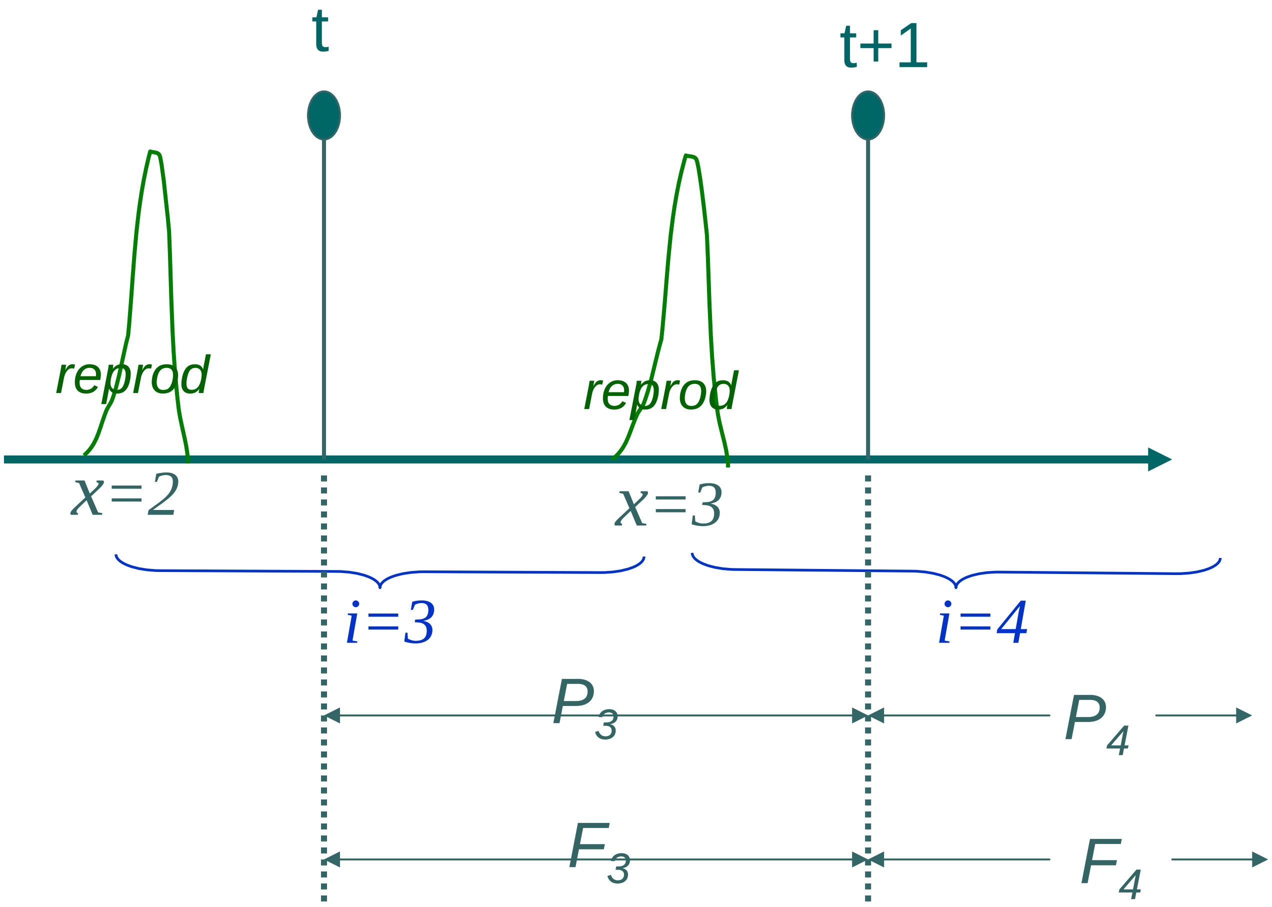
Probabilidade de que 1 indivíduo no estádio i, no instante t, sobreviva e esteja no estádio i+1 no census de t+1

F_i

Número filhas viáveis duma fêmea no estádio i, produzidas durante o intervalo de projecção (t, t+1).

"viáveis"= ainda estão vivas no instante t+1

Intervalo de aplicação



Projecção com P_i e F_i

t	$t+1$	$t+2$	...
$N_{1,t}$	$N_{1,t+1}$		
$N_{2,t}$	$N_{2,t+1}$		
$N_{3,t}$	$N_{3,t+1}$		
...	...		

$$N_{1,t+1} = F_1 N_1 + F_2 N_2 + F_3 N_3 + \ldots + F_K N_K$$

$$N_{2,t+1} = P_1 N_1$$

$$N_{3,t+1} = P_2 N_2$$

...

Representação matricial

$$\begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \dots & F_K \\ P_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & P_{K-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ \dots \\ N_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1N_1 + F_2N_2 + F_3N_3 + \dots + F_KN_K \\ P_1N_1 \\ P_2N_2 \\ \dots \\ P_iN_i \end{bmatrix}$$

A Matriz de Leslie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \dots & F_K \\ P_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & P_{K-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz quadrada (K, K)

K = nº estádios

$$\mathbf{N_{t+1} = A\ N_t}$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{i=K} F_i N_i \\ P_1 N_1 \\ P_2 N_2 \\ \ldots \\ P_3 N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \ldots & F_K \\ P_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & P_{K-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ \ldots \\ N_K \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N_{t+1} = A\ N_t}$$

(K, 1) (K, K) (K, 1)

A^n determina o futuro

$$\mathbf{N_{t+1}} = \mathbf{A\,N_t}$$ equação de recorrência

Assumindo A constante

$$\mathbf{N_{t+2}} = \mathbf{A\,N_{t+1}} = \mathbf{A\,A\,N_t} = \mathbf{A^2 N_t}$$

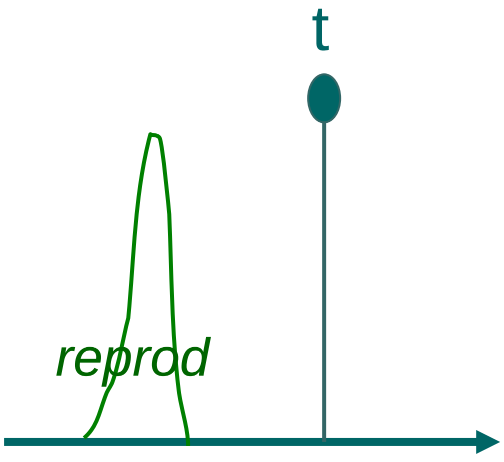
$$\mathbf{N_{t+n}} = \mathbf{A}^n\mathbf{N_t}$$ após n intervalos projecção

Determina o futuro após n intervalos

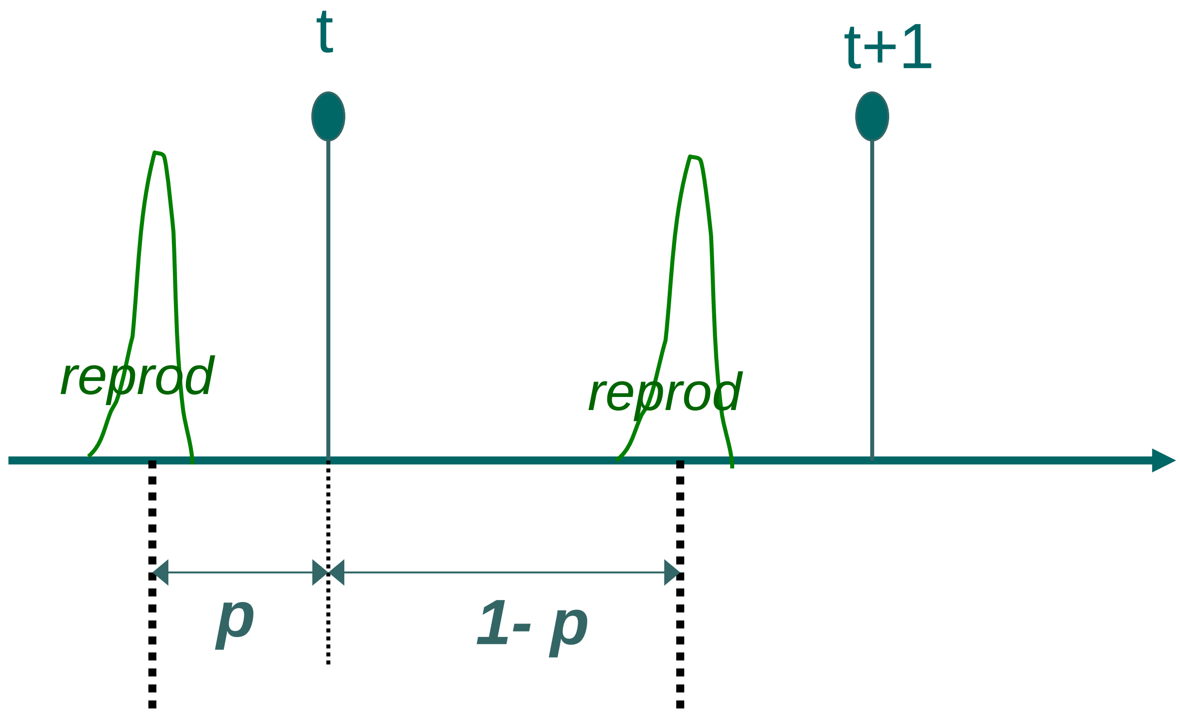
Da LT para a Matriz de Leslie

$[l_x]\ [m_x]$ $\xrightarrow{\ ?\ }$ P_i F_i

Reprodutores sazonais



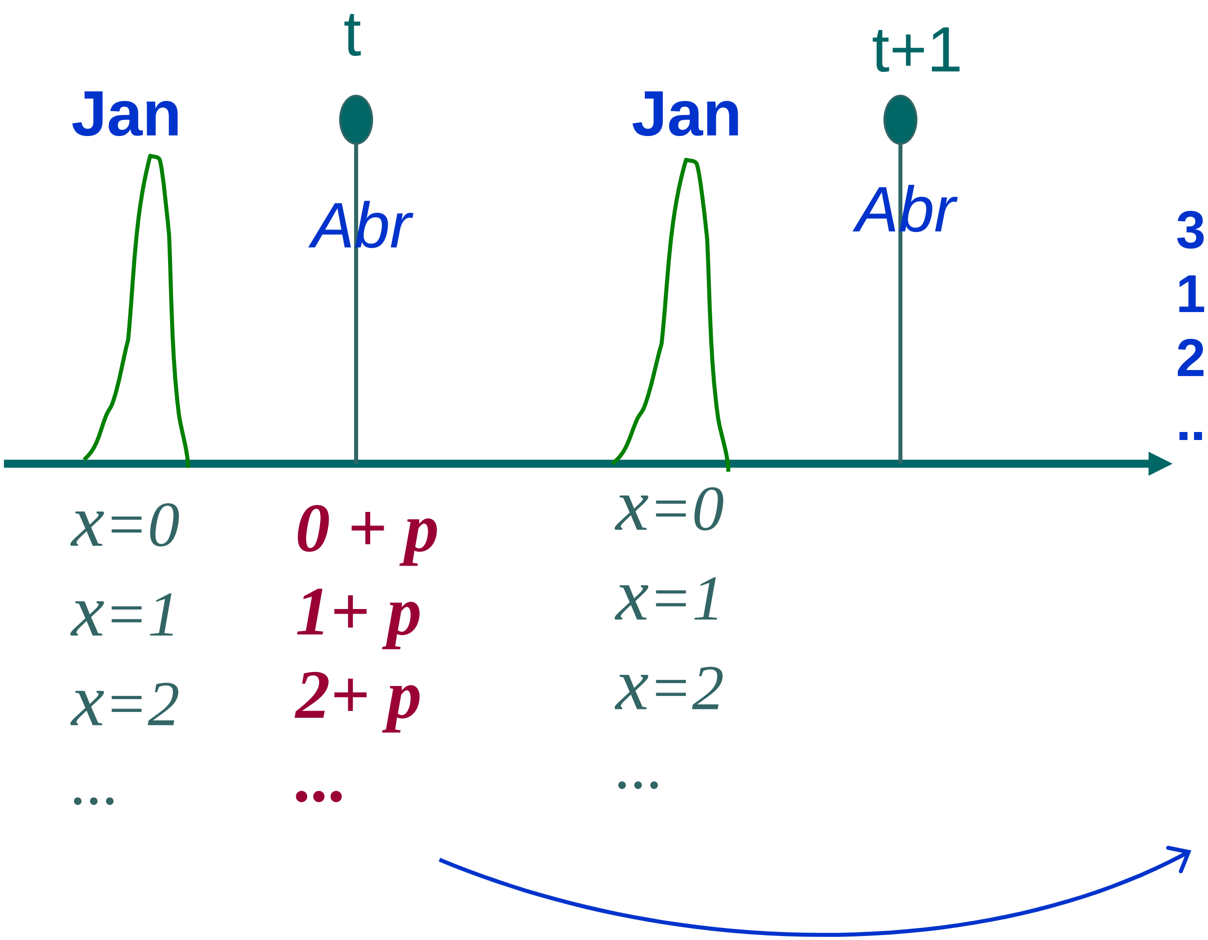
Reprodutores sazonais



Census imediatamente após reprodução, *p = 0*

Census imediatamente antes da reprodução, *p = 1*

Idades na data do census

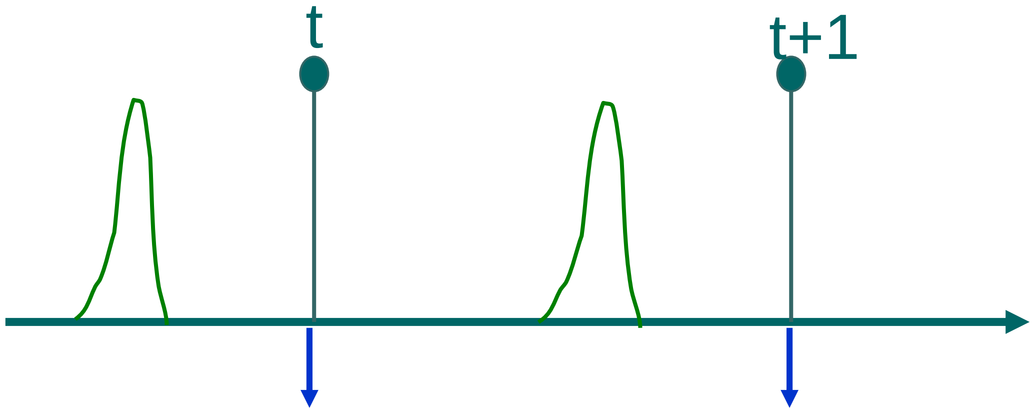


3 meses;
1 ano e 3 meses;
2 anos e 3 meses
...

Idades:

0,25
1,25
2,25
3,25
...

P_i em reprod. sazonais



Os indivíduos do estádio i têm

$\underbrace{i\text{-}1}_{x}+p$ *anos*

Mesmos indivíduos aqui têm

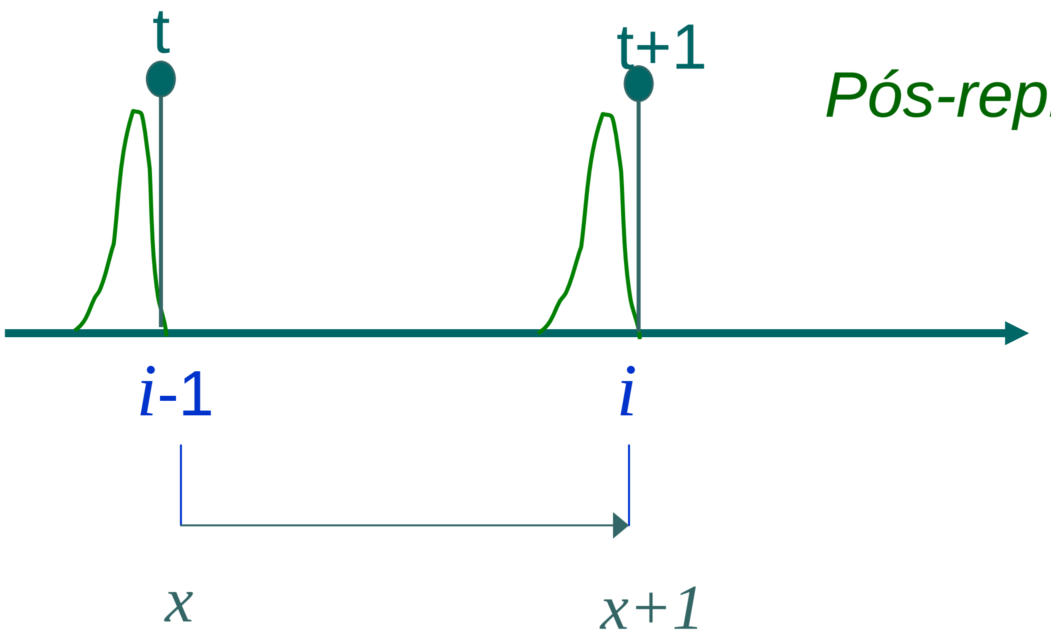
i+p anos

$$P_i = \frac{l_{i+p}}{l_{i-1+p}}$$

Probab. de que um indivíduo do estádio i no census em t, sobreviva e esteja no estádio i+1 em t+1

Pós-reprodução

$$P_i = \frac{l_{i+p}}{l_{i-1+p}}$$



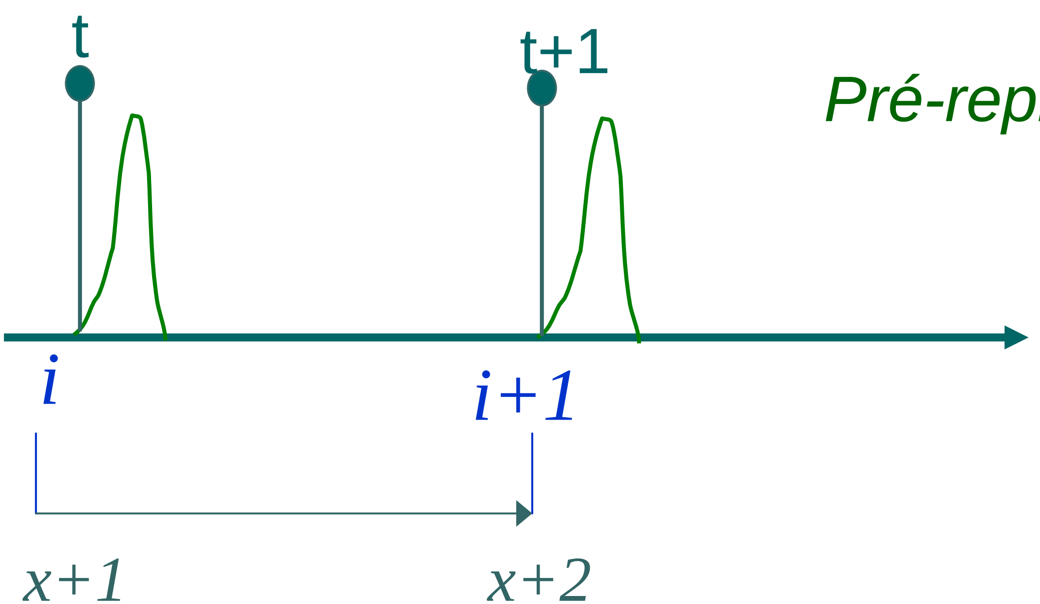
Pós-reprodução, p=0

$$P_i = \frac{l_i}{l_{i-1}}$$

$$P_i \equiv S_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Pré-reprodução

$$P_i = \frac{l_{i+p}}{l_{i-1+p}}$$



Pré-reprodução, p=1

$$P_i = \frac{l_{i+1}}{l_i}$$

$$P_i \equiv S_{x+1} = \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}}$$

F_i em reprod. sazonais

Núm filhas viáveis de 1 fêmea do estádio *i*, produzidas no intervalo *(t, t+1)*

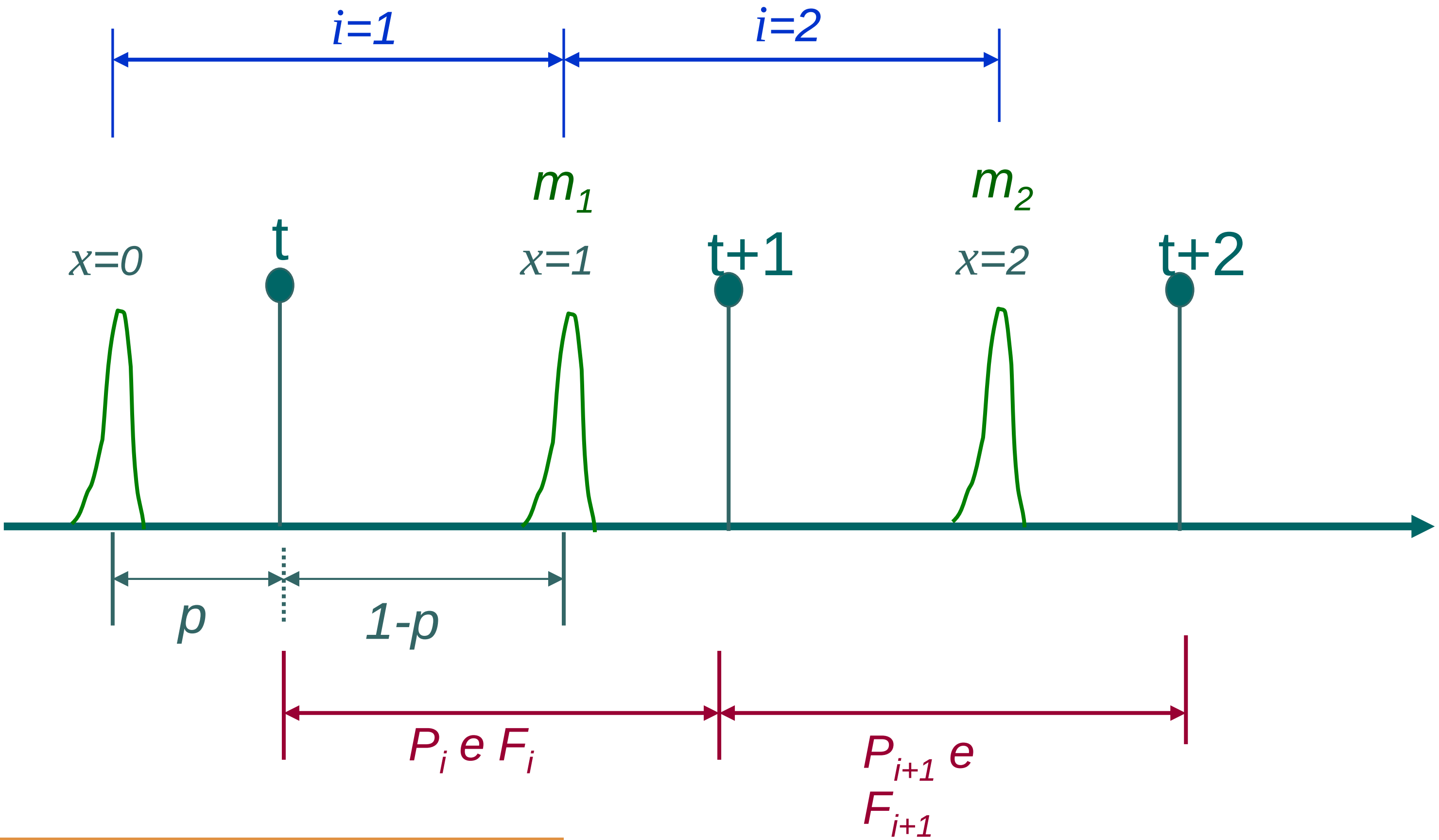
$$F_i = P_i^{1-p} m_i \, l_p$$

Probabilidade de chegar de t até à idade x = i

Descendentes do estádio i, quando é celebrado o i-ésimo aniversário

Probabilidade de recem-nascido aparecer no census em t+1

F_i em reprod. sazonais



$$F_i = P_i^{1-p} m_i \, l_p$$

Census pré- e pós-reprodução

$$F_i = P_i^{1-p} m_i \, l_p$$

em geral

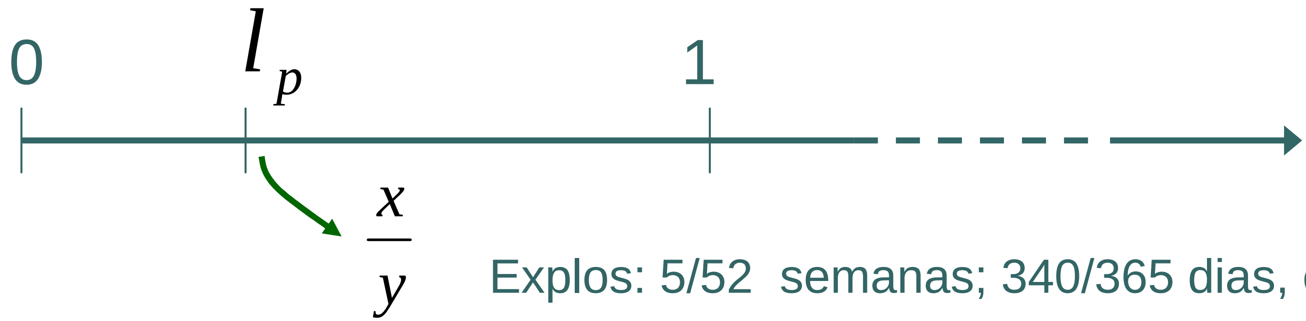
Imediatamente pós-reprodução, *p*=0

$$F_i = P_i m_i$$

Imediatamente pré-reprodução, *p*=1

$$F_i = l_1 m_i$$

Cálculo de l_p quando $0<p<1$



Explos: 5/52 semanas; 340/365 dias, etc.

$$l_p = l_1^{x/y} = \sqrt[y]{l_1^x}$$

Ou então:

$$l_1 \longrightarrow \mu_1$$

$$\mu_p = \mu_1 \frac{x}{y}$$

$$l_p = e^{-\mu_p}$$