

Transição para a DEE

Módulo 9

Projecção com a ML

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{i=K} F_i N_i \\ P_1 N_1 \\ P_2 N_2 \\ \dots \\ P_3 N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & \dots & F_K \\ P_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & P_{K-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ \dots \\ N_K \end{bmatrix}$$

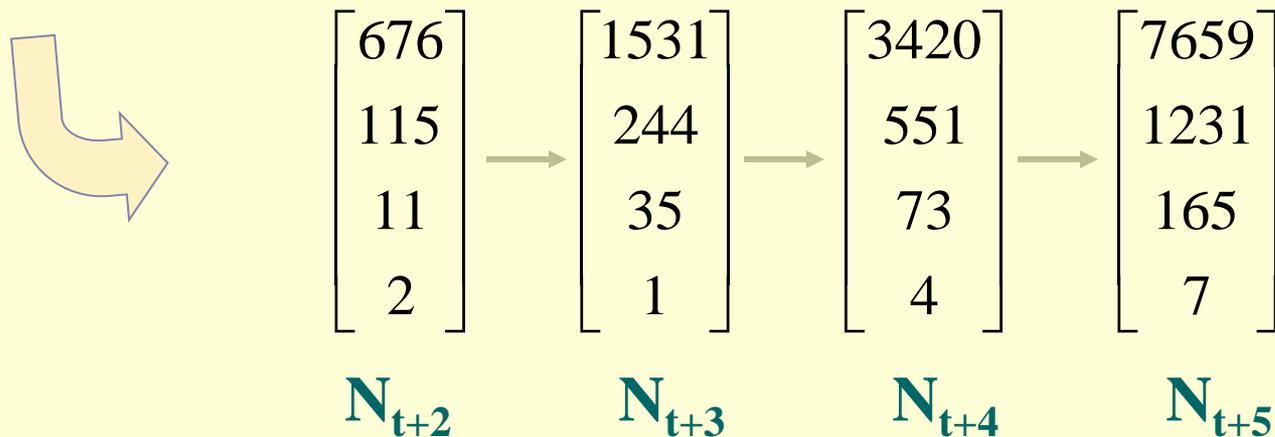
$$\mathbf{N}_{t+1} = \mathbf{A} \mathbf{N}_t$$

$$\mathbf{N}_{t+n} = \mathbf{A}^n \mathbf{N}_t$$

Aplicação sucessiva da ML

$$\begin{bmatrix} 320 \\ 36 \\ 15 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8 & 2.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{N}_{t+1} = \mathbf{A} \mathbf{N}_t$



Transição dos números

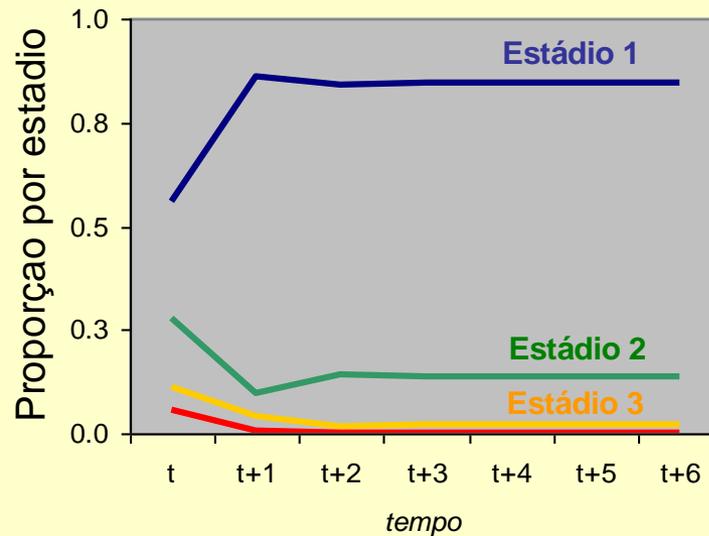
| | t | $t+1$ | $t+2$ | $t+3$ | $t+4$ | $t+5$ | $t+6$ |
|-----------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Estadio 1 | 100 | 320 | 676 | 1531 | 3420 | 7659 | 17144 |
| Estadio 2 | 50 | 36 | 115 | 244 | 551 | 1231 | 2757 |
| Estadio 3 | 20 | 15 | 11 | 35 | 73 | 165 | 369 |
| Estadio 4 | 10 | 2 | 2 | 1 | 4 | 7 | 17 |
| TOTAL | 180 | 373 | 804 | 1811 | 4048 | 9062 | 20287 |
| λ | | 2.07 | 2.16 | 2.25 | 2.24 | 2.24 | 2.24 |


$$N_{x,t+1} = N_{x,t} \lambda$$

$$N_{t+1} = AN_t = \lambda N_t$$


Transição das proporções para DEE

| | t | $t+1$ | $t+2$ | $t+3$ | $t+4$ | $t+5$ | $t+6$ |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Estadio 1 | 0.556 | 0.858 | 0.841 | 0.845 | 0.845 | 0.845 | 0.845 |
| Estadio 2 | 0.278 | 0.097 | 0.143 | 0.135 | 0.136 | 0.136 | 0.136 |
| Estadio 3 | 0.111 | 0.040 | 0.014 | 0.019 | 0.018 | 0.018 | 0.018 |
| Estadio 4 | 0.056 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 |



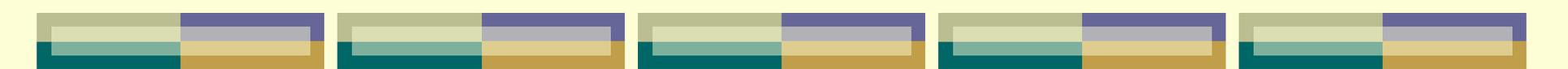
λ é valor próprio de A

$$N_{t+1} = AN_t$$
$$N_{t+1} = \lambda N_t$$

Autovector de A
Vector próprio de A
Eigenvector

$$AN = \lambda N$$

Autovalor de A
Valor próprio de A
Eigenvalue


$$\mathbf{N}_{t+1} = \lambda \mathbf{N}_t$$

Equação de recorrência

$$\mathbf{N}_{t+2} = \lambda \mathbf{N}_{t+1} = \lambda^2 \mathbf{N}_t$$

Generalização

...

$$\mathbf{N}_{t+n} = \lambda^n \mathbf{N}_t$$

Solução



Ainda os valores próprios

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

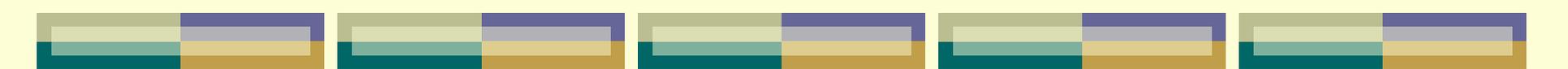
Uma matriz quadrada (n, n) tem em geral n valores próprios diferentes:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$$

Ordem decrescente

Determina o crescimento populacional em DEE

$$\mathbf{N}_{t+1} = \lambda_1 \mathbf{N}_t$$



e os vectores próprios

Cada valor próprio tem o seu correspondente vector próprio
 $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \dots, \mathbf{V}_k$

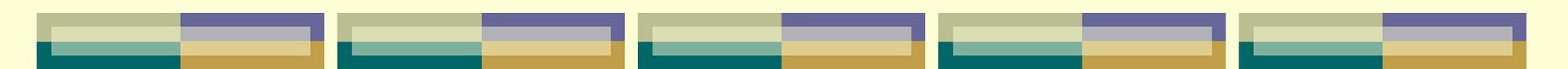
$$A\mathbf{N} = \lambda\mathbf{N}$$



Se \mathbf{N} é vector próprio de A correspondente a λ ,

$c\mathbf{N}$ também é vector próprio de A correspondente a λ , $c = \text{constante}$





Revisão

- Uma população com taxas vitais constantes (l_x e m_x ou P_i e F_i) tende para a DEE
 - Em DEE, cresce geometricamente, com taxa λ . Este é λ_1 , o maior valor próprio de A
 - O vector próprio, v_1 , correspondente a λ_1 , é a própria DEE
- 



Quanto tempo até à DEE ?



Velocidade de convergência

Velocidade de convergência é proporcional a:

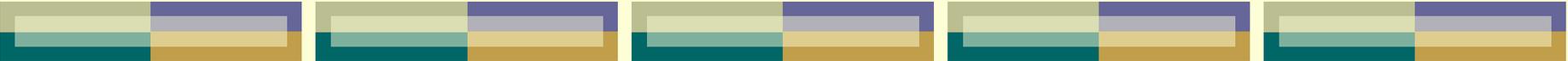
$$z = \frac{\lambda_1}{|\lambda_2|}$$

$z = 1$ não tende para a DEE

$z \gg 1$ tendência rápida para a DEE

m = Núm intervalos tempo até λ_1
ser u vezes mais influente que λ_2
na determinação de \mathbf{N}_{t+1} :

$$m = \frac{\text{Ln } u}{\text{Ln } z}$$



Estratégias de vida e demografia

Que tipos de estratégia de vida
(i.e. $[l_x]$, $[m_x]$) promovem:

$$z \gg 1$$

$$z > 1$$

$$z \approx 1$$

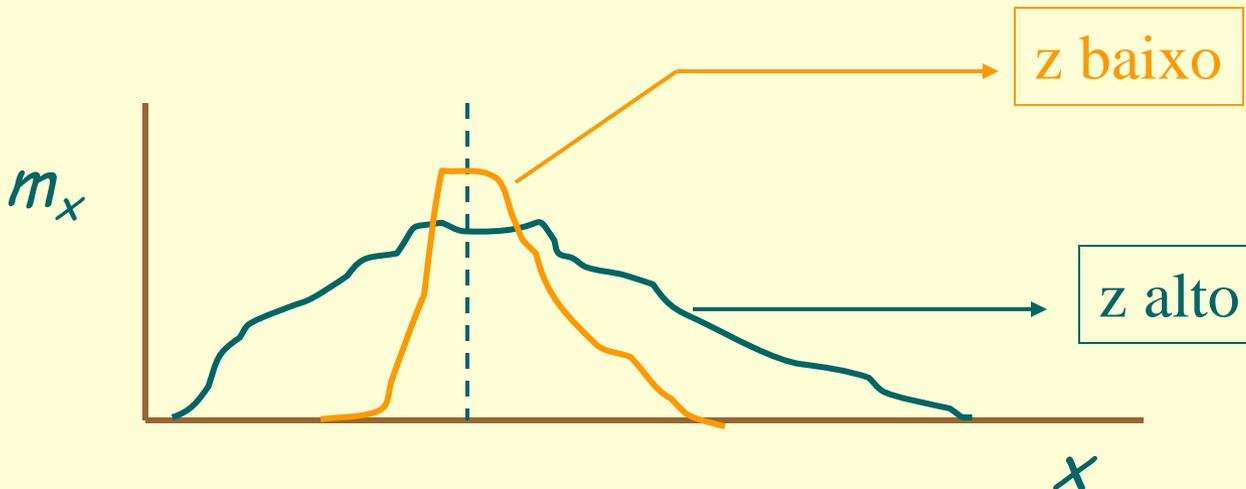
?



Factores que promovem z alto

m_x distribui-se simetricamente em torno da idade média de reprodução por vasta gama de idades

Idade de 1ª maturação ocorre cedo



Revisão

Dada a matriz A : determinar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$

Se $z > 1$

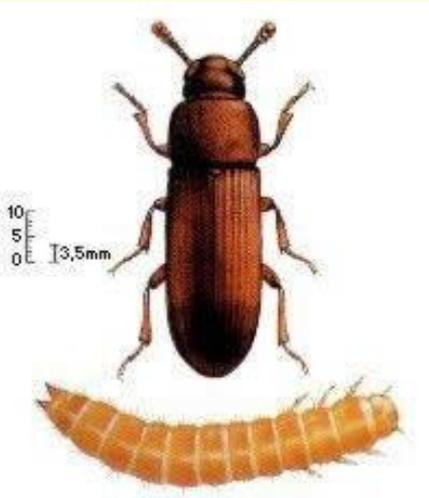
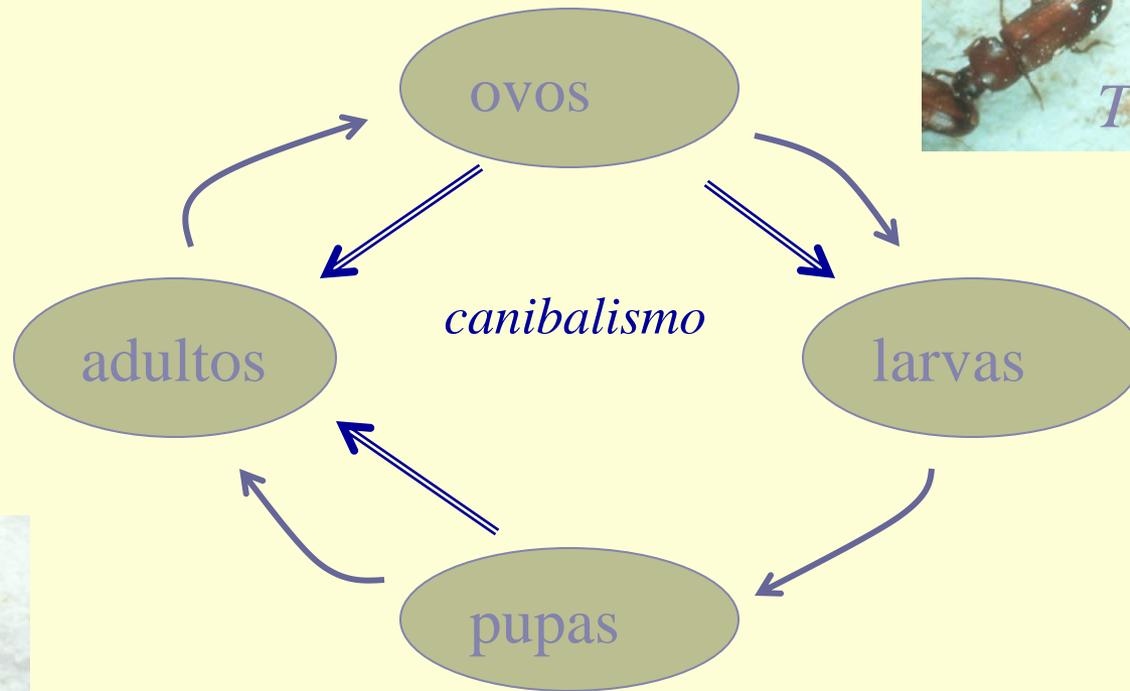
λ_1 determina crescimento/decrescimento
Estrutura Etária tende para DEE

Se $z \gg 1$ população “mais previsível”

Se $z = 1$

λ_1 determina crescimento/decrescimento
Estrutura Etária oscila sem tender
para DEE

Expo: o escaravelho da farinha



O modelo para *Tribolium*

3 estádios: larvas, pupas, adultos

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & F_3(N) \\ P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2(N) & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}_t$$

$F_3(N)$ = função da taxa canibalismo dos ovos por Adultos (N_3) e Larvas (N_1)

$P_2(N)$ = função da taxa canibalismo das pupas por Adultos (N_3)

$$F_3(N) = be^{-c_{oa}N_3 - c_{ol}N_1}$$

$$P_2(N) = e^{-c_{pa}N_3}$$

Referências:

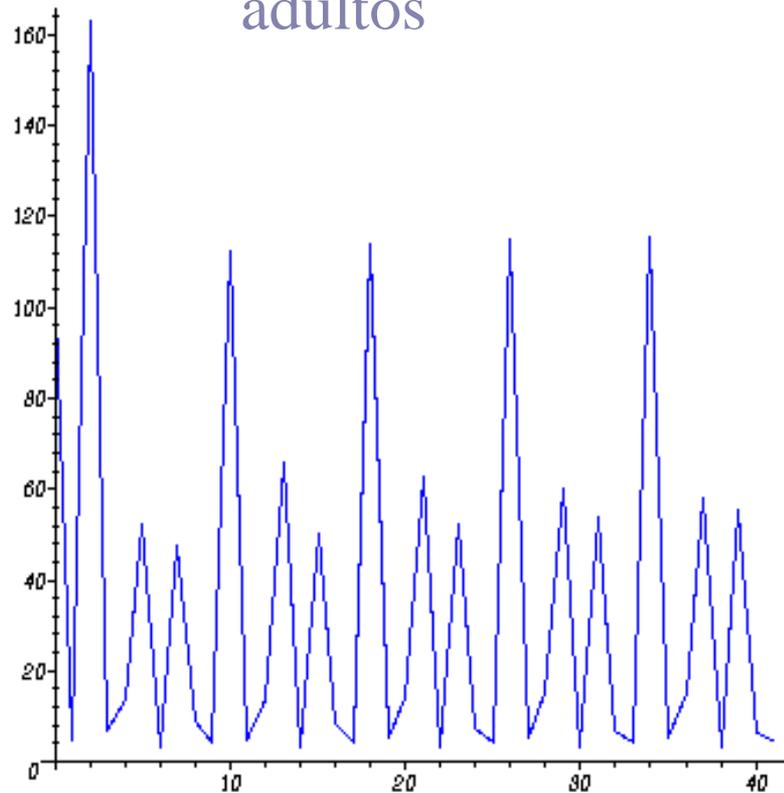
<http://www.math.sc.edu/~miller/411/projects/tribolium/tribolium1.html>

Constantino, RF, RA Desharnais, JM Cushing and B Dennis. 1997. Chaotic dynamics in an insect population. *Science* 275: 389-391

Uma dinâmica complexa: adultos e larvas

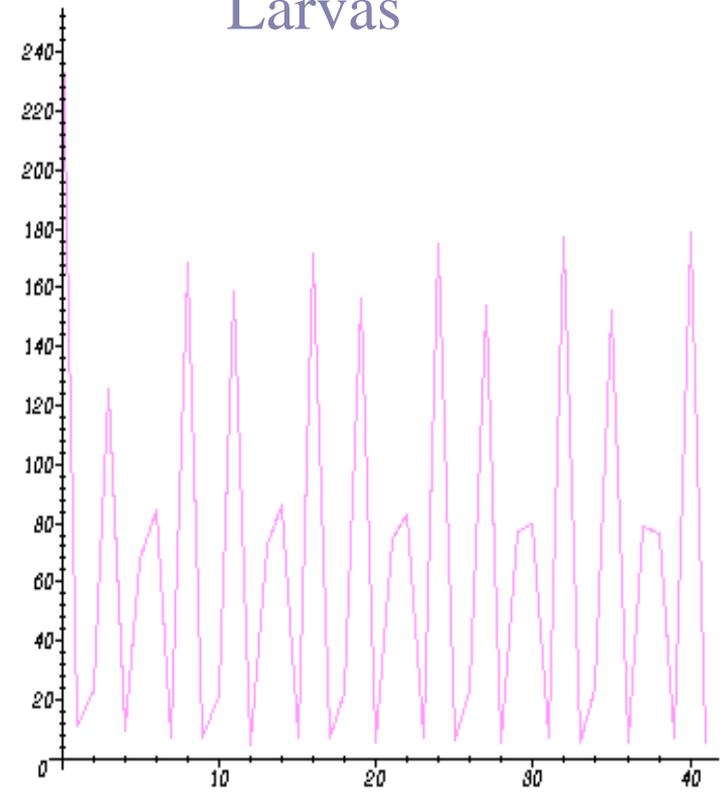
$A[t]$ over time for $Cpa=.5e-1$

adultos



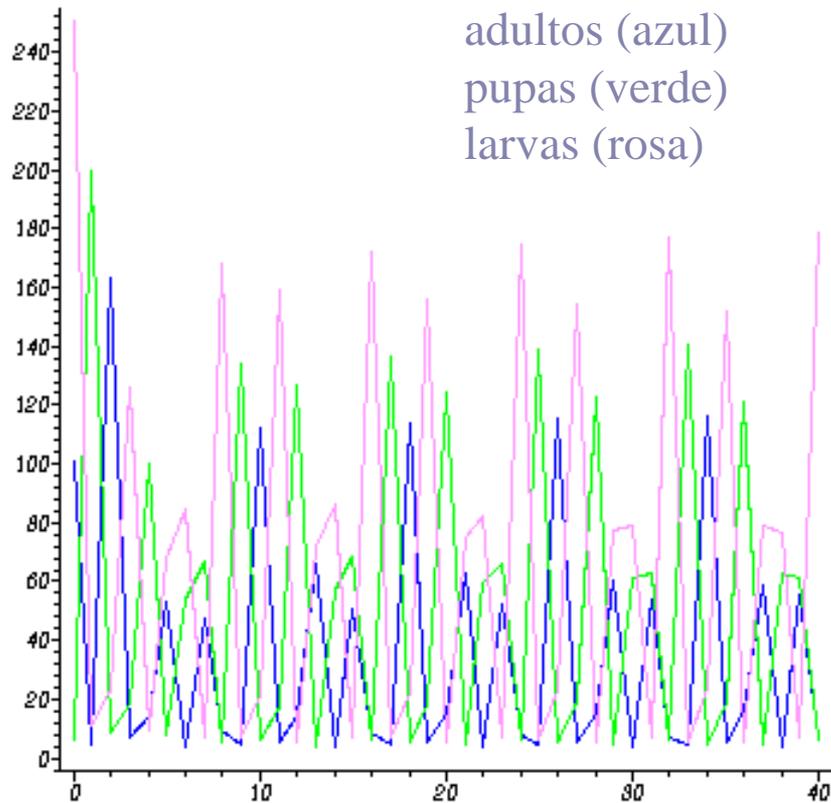
$L[t]$ over time for $Cpa=.5e-1$

Larvas



Uma dinâmica complexa II

$A[t]$, $P[t]$ and $L[t]$ vs t when $Cpa = .5e-1$



Total population over time when $Cpa = .5e-1$

