Soluções dos Exercicios adicionais de Dinâmica Populacional

Mod 13 . Crescimento com regulação dependente da densidade – a equação logística

1. a) r é a diferença entre as taxas instantâneas de natalidade e mortalidade (r=b-d) quando a população não tem quaisquer limitações de recursos (b é máximo e d é mínimo). Traduz portanto a capacidade "intrínseca" máxima da população para crescer, razão por que é designada também taxa intrínseca de crescimento.

K é o efectivo populacional que se encontra em equilíbrio com os recursos do meio num certo habitat, i.e., o efectivo máximo que a população pode manter no habitat de forma sustentada.

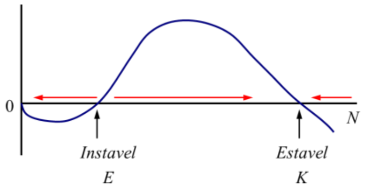
b) Diz-se de *equilíbrio* porque, de acordo com o modelo logístico, se N atingir K, daí em diante permanece em K. K é um valor pontual de N (daí dizer-se *um ponto* de equilíbrio).

c) Substituindo r e K na forma integral obtem-se $N_{10} = 74$

2. a) Se N<E, a combinação de produtos do lado direito da equação resulta negativa porque rN é positivo, (1-N/K) é positivo e (1-E/N) é negativo. Se dN/dt é negativo isso significa que a população diminui ainda mais. Afasta-se de E em direcção a 0 e extingue-se.
Se N=E, o factor (1-E/N) é nulo, e dN/dt resulta nulo: a população não varia.
Se E < N < K, a combinação de produtos do lado direito da equação resulta positiva; dN/dt é positivo e a população aumenta em direcção a K.

Se N> K, a combinação de produtos do lado direito resulta negativa e N diminui.

b) De acordo com a análise anterior, a forma do gráfico deveria ser:



c) E é um *ponto de equilíbrio instável*; se a população está em E não se altera, mas qualquer pequeno desvio de E faz a população 'fugir' para longe de E.

3. a) Tem 4 pontos de equilíbrio. São todos os pontos em que a linha curva corta o eixo dN/dt=0.
b) Apenas um, aquele em que N=0; é o primeiro a contar da esquerda. É um ponto instável porque se a população for ligeiramente maior que zero (por exemplo se chegarem colonos ao habitat) a população aumenta (dN/dt >0) e já não volta a 0.
c) Tem dois. São aqueles em que a curva corta o eixo dN/dt=0 com inclinação negativa
d) Nenhum. Todos os pontos de equilibrio estável têm um domínio de atracção que não é toda a gama de valores possiveis de N.
e) Tem dois. Por definição K é um equilíbrio não trivial e estável. São os dois da alínea c).

4. Começando por ‘discretizar’ o lado esquerdo e considerando um intervalo unitário, por exemplo 1 ano:

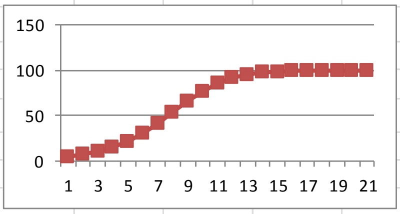
$\frac{N_{t+1}-N_t}{1} = rN\left(1-\frac{N_t}{K}\right)$ donde se obtém $N_{t+1} = N_t\left(1+r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)\right)$

O chamado modelo logístico discreto.

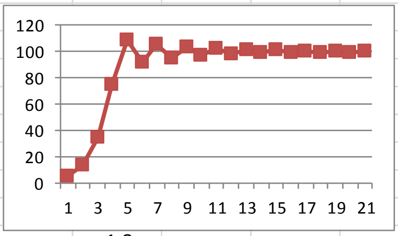
5. A imagem abaixo ilustra simulações em Excel da equação $N_{t+1} = N_t\left(1+r\left(1-\frac{N_t}{K}\right)\right)$

a) Se 0<r<1, as trajectorias da população são as familiares curvas em S que tendem para K
b) Se 1<r<2, ocorre ‘overshooting’, isto é, a população ultrapassa K, volta para baixo de K, volta a subir etc, mas acaba por estabilizar em K. Faz ‘oscilações amortecidas’ para K
c) Se 2<r<3, a população não converge para K, em vez disso oscila permanentemente dentro de limites definidos. Faz ‘oscilações sustentadas’.
d) Se r>3 a população torna-se negativa, extingue-se.

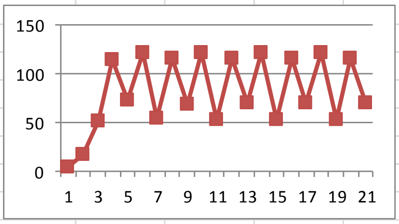
K =	100			
N_0 =	5			
r =	*0,5*	*1,8*	*2,5*	*3,1*
t	N_t	N_t	N_t	N_t
0	5	5	5	5
1	7,38	13,55	16,88	19,73
2	10,79	34,64	51,94	68,81
3	15,60	75,39	114,35	135,34
4	22,19	108,79	73,33	-12,94
5	30,82	91,58	122,22	
6	41,48	105,46	54,32	
7	53,62	95,10	116,35	
8	66,05	103,49	68,79	-
9	77,26	96,99	122,46	-
10	86,05	102,25	53,69	-
11	92,05	98,11	115,85	-
12	95,71	101,45	69,94	-
13	97,76	98,81	122,50	-
14	98,86	100,93	53,59	-
15	99,42	99,24	115,77	-
16	99,71	100,60	70,13	-
17	99,85	99,52	122,50	-
18	99,93	100,38	53,59	-
19	99,96	99,69	115,77	-
20	99,98	100,25	70,12	-



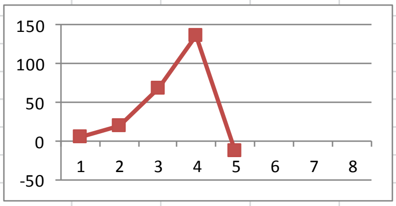
r = 0,5



r = 1,8



r = 2,5



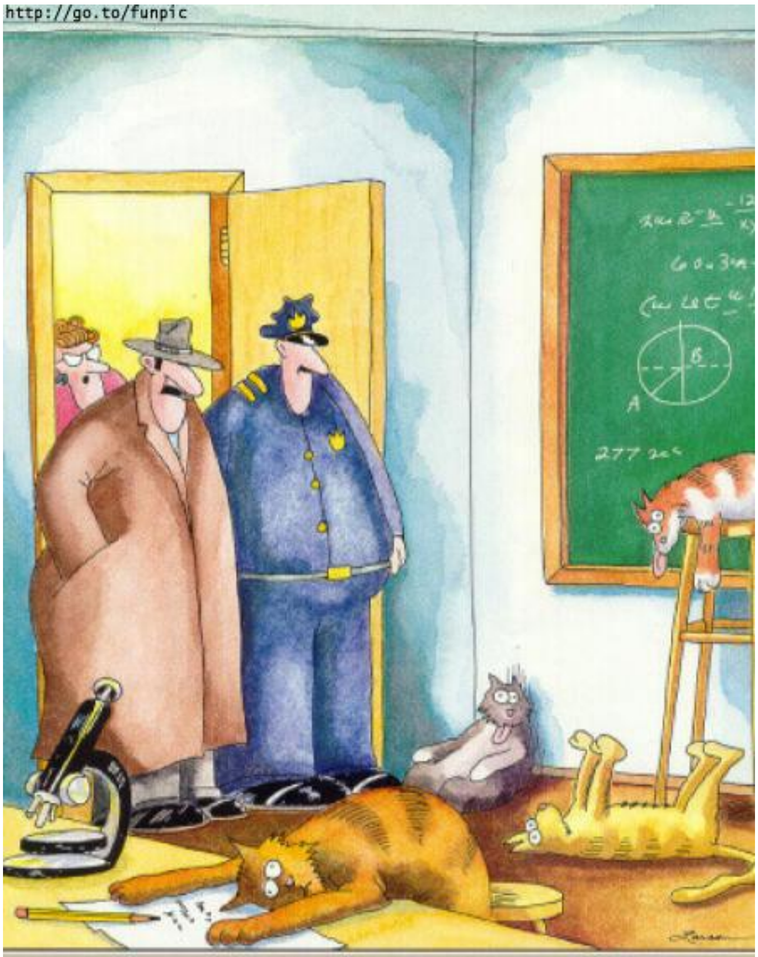
r = 3,1

Conclui-se que, ao contrário da logística em tempo contínuo, na logística discreta K não é necessariamente um ponto de equilíbrio estavel. A dinâmica da população depende do valor numérico de r. A razão tem a ver com os atrasos na regulação. Como o feedback não é instantâneo, a população ultrapassa K e, se r for suficientemente alto, a ultrapassagem pode ser tão grande que impede a convergência para K. Se for suficientemente grande, as consequências podem ser a extinção da população.

6. a) Para encontrar o máximo da função que relaciona dN/dt com N, há que derivar a função, igualar a derivada a zero e verificar qual o valor de N em que a derivada se anula.

A derivada de $rN\left(1-\frac{N}{K}\right)$ em ordem a N é $r\left(1-\frac{2N}{K}\right)$. Igualando a derivada a zero, facilmente se tira N=K/2.

b) Quando N é substituido por K/2 no lado direito da equação logística, obtem-se dN/dt = rK/4. Esta é a quantidade (máxima) H que pode ser removida sustentadamente.



"Notice all the computations, theoretical scribblings, and lab equipment, Norm. Yes, curiosity killed these cats."