Soluções dos Exercicios adicionais de Dinâmica Populacional

I . Crescimento desregulado

1. População portuguesa

periodo	r
1950 a 1970	0,0031
1970 a 2001	0,0047
2001 a 2011	0,0020

2. Condor da Califórnia

a) $r = \text{Ln}\ \lambda = -0.051$

b) n = 45.8 anos

3. População de microorganismos

a) $N_{t+1}=3\ N_t$

b) Tendo em atenção o resultado anterior: $N_{t+1}-N_t = 3\ N_t- N_t$, logo, $\Delta N = 2\ N_t$

c) $b_t - d_t= 2$, explicação:

$B_t/N_t - D_t/N_t = (B_t - D_t)/N_t$ mas observando a eq fundamental da demografia: $N_{t+1}=N_t + B_t- D_t$ constata-se que $(B_t- D_t) = N_{t+1}-N_t = \Delta N$, e da alínea anterior sabemos que isto é $2\ N_t$

Logo, $B_t/N_t - D_t/N_t = 2\ N_t /N_t = 2$, ou seja: $b_t - d_t= 2$

4. Insectos em lab:

Os sucessivos quocientes $\lambda= N_{t+1}/N_t$ mostram que o modelo geométrico não se ajusta bem a estes dados. A taxa de incremento é rápida no inicio mas depois abranda. Ao contrário do modelo de crescimento geométrico, não é constante. Contudo, nos primeiros intervalos de tempo (t=0, 1, 2, 3), λ é aproximadamente 1,5, portanto o modelo geométrico ajusta-se bem ao crescimento inicial.

5. Os modelos $N_t= a\ N_{t-1}$ e $\Delta N = h\ N_t$ representam populações em crescimento quando a é qualquer número na gama $a > 1$ e quando h é qualquer número na gama $h > 0$.

6. Ponto de equilíbrio

a) $\Delta N=0$

b) se quando o seu efectivo populacional é N*, já não muda mais, permanecendo em N*.

7. Se h <-1, num único intervalo de tempo a população teria diminuido mais do que N_t. Isso não tem significado biológico porque não há número negativo de indivíduos na população.

8. Crescimento exponencial de microorganismos. Se r=0.7944, obtem-se $N_5=106$, pressupondo que r permanece constante no periodo em estudo.

9. Usando a equação de crescimento exponencial: $60 = 39 \exp(r(12-8))$, donde r=0.1077 Recuando no tempo e assumindo que r se manteve constante: $39 = N_0 \exp(0.1077 \times 8)$, donde se obtem aproximadamente $N_0=16$.

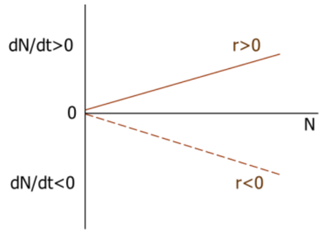
10. Bactérias em caixa de Petri.

a) A solução da equação é $N_t=10 \exp(ct)$, uma vez que $N_0=10$. Este c é o r do costume, mudei para c só para ver se se atrapalhavam. Na verdade podemos simboliza-lo como quisermos.

b) Se duplica em 20h, então $2N_0=N_0$ exp(ct), donde c=Ln 2/20 = 0.03466
c) $10N_0=N_0$ exp(0.03466 t), donde t= 66,4h

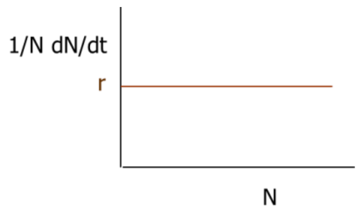
11. Crescimento exponencial em gráficos

a)



dN/dt representa “quantidade absoluta de variação num curto intervalo de tempo”. Esta quantidade é directamente proporcional a N. Quantos mais indivíduos há, maior a variação. (Na China, a variação em 1 dia é maior que em Portugal apenas porque eles são muito mais). A constante de proporcionalidade é r. Se r<0 a variação é sempre negativa, dN/dt <0, e é cada vez menor à medida que a população decresce. Se r>o a população está sempre a crescer, dN/dt>0 e a variação é cada vez maior.

b) A variação per capita é $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r$.



O balanço entre mortalidade e natalidade *por indivíduo*, é constante no modelo exponencial. É o próprio r. Compare-se com o gráfico correspondente do modelo logístico (módulo 13).

c) Para graficar *Ln N* contra *t*, é necessário resolver a equação diferencial e logaritmizar o resultado, obtendo-se: $Ln\ N_t = Ln\ N_0 + r\,t$. O gráfico é uma linha recta com inclinação igual a *r*.

12. Crescimento exponencial com r variável.

Dica: Vai aos apontamentos teóricos do módulo 2, no site da cadeira e vê como se chegou à solução $N_{t+\Delta t} = N_t e^{r\Delta t}$ (equação 2.17). Repara no que se fez do lado direito da equação: ao assumir-se r constante, isso permitiu retirá-lo para fora do sinal de integral. Se r não fosse constante não se podia fazer isso. Seria necessário conhecer a função r(t) para resolver o integral. Como nada é dito sobre essa função, temos de manter o integral de r(t) no expoente.

13. Dinâmica das fêmeas de afídios

O número de descendentes das fêmeas na geração n+1, deve ser $p_{n+1}= f\,a_n$
Destes descendentes, *(1-m)r* devem ser as fêmeas que sobrevivem até à idade adulta. Logo, o número de fêmeas na geração n+1 deve ser dado por esta equação às diferenças:

$a_{n+1}= fr\,(1-m)\,a_n$ onde *fr (1-m)* é a produção de fêmeas-filhas por fêmea-mãe

O número de fêmeas na geração n+2 deve ser:

$a_{n+2}= fr\ (1-m)\ a_{n+1}$; substituindo a equação para a_{n+1} , obtem-se,

$a_{n+2}= [fr\ (1-m)]^2\ a_n$

de um modo geral, a solução desta equação às diferenças é: $a_n = [fr\ (1-m)]^n\ a_0$

onde a_0 é o número de fêmeas na geração inicial.

14. Dinâmica das plantas anuais

a) $N_n = aS^1_n + bS^2_n$

Variáveis dependentes: N, S^1 e S^2

Variáveis independentes: n

Parâmetros: a, b

b) São a fração de S^1_n que não germina e sobrevive mais um ano, ou seja, $s(1-a)S^1_n$

c) $S^1_{n+1} = s\ g\ N_n$

d) Adaptando o resultado de (a) à geração n+1:

$$N_{n+1} = aS^1_{n+1} + bS^2_{n+1}$$

Substituindo nas parcelas à direita, respectivamente, o resultado das alíneas (c) e (b):

$$N_{n+1} = asg\ N_n + bs(1-a)S^1_n$$

Desta forma, N_{n+1} é escrito em função de N_n e de S^1_n. Mas da alínea (c) podemos retirar:

$S^1_n = s\ g\ N_{n-1}$, logo:

$N_{n+1} = asg\ N_n + bs^2(1-a)g\ N_{n-1}$

Esta ultima expressão é uma equação às diferenças de 2ª ordem porque N é determinado por si próprio nas duas gerações anteriores. Pode ser re-escrita para N_n:

$$N_n = asg\ N_{n-1} + bs^2(1-a)g\ N_{n-2}$$

e) $asg\ N_{n-1}$ número de semestes produzidas pelas plantas da geração anterior que sobreviveu 1 inverno e germinou

$bs^2(1-a)g\ N_{n-2}$ número de sementes produzidas há dois anos atrás que sobreviveram ao 1º inverno, não germinaram no 1º ano, sobreviveram ao 2º inverno e germinaram.


WHAT POPULATION PROBLEM?