

Redes

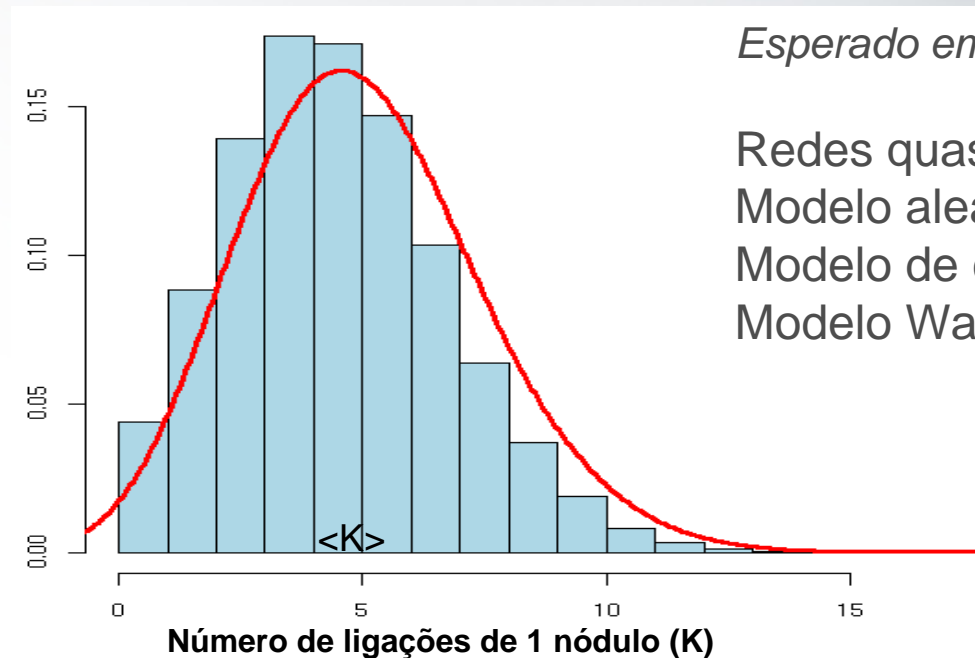
Redes sem escala



Distribuição **teórica** de frequências do número de ligações



Proporção de nódulos com K ligações

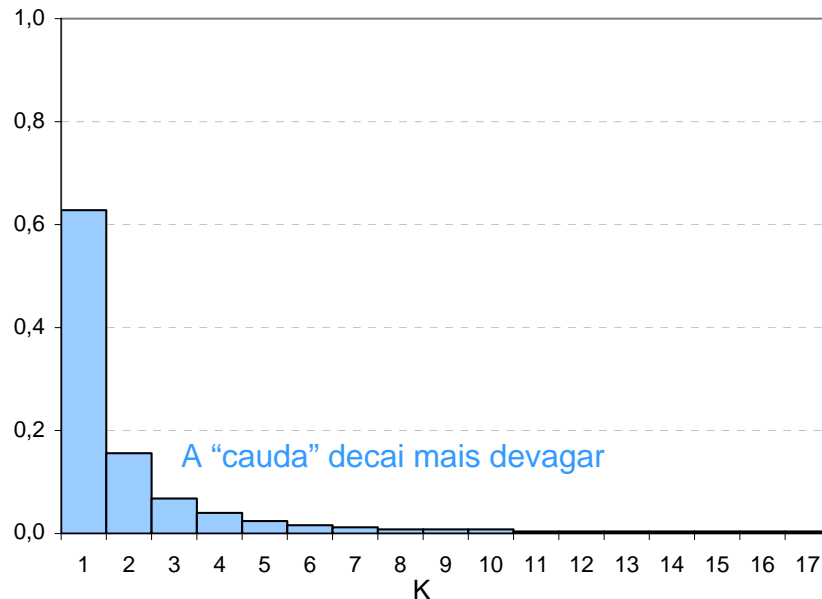


Esperado em:

- Redes quase regulares
- Modelo aleatório
- Modelo de clusters (Granovetter)
- Modelo Watts-Strogatz

$\langle K \rangle$ define a *escala* típica da rede

Distribuição **real** de frequências do número de ligações



Nº de nódulos altamente conectados muito maior do que esperado.

Coexistem com um número elevadíssimo de nódulos muito pouco conectados.

Matematicamente, segue uma “lei de potência”

Rede sem escala própria
“Scale free” network

“Power law”



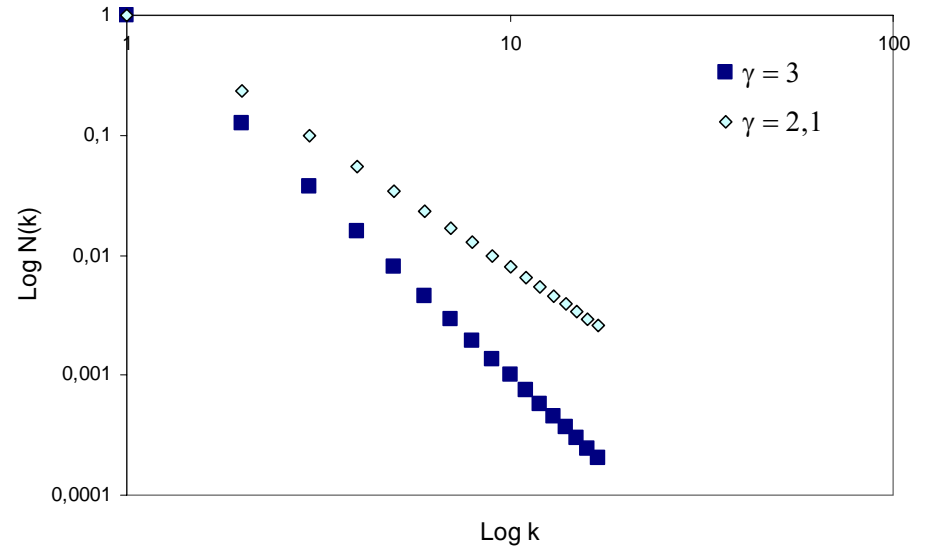
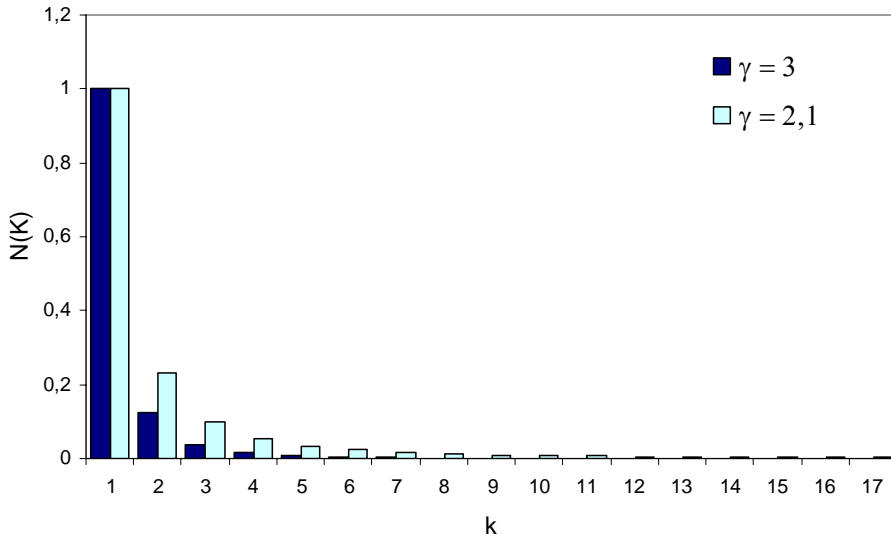
Expressão matemática da lei de potência,

$$N(k) \approx k^{-\gamma}$$

↓
Núm de nódulos
com K ligações

↘
Expoente da lei

$$\text{Log } N(k) \approx -\gamma \text{Log } k$$



Em termos de proporções



$$N(k) \approx k^{-\gamma}$$

$$\text{Log } N(k) \approx -\gamma \text{Log } k$$

Dividindo por N

$$P(K) = \frac{N(K)}{N}, \quad A = 1/N$$

Probabilidade de um nóculo ter K ligações

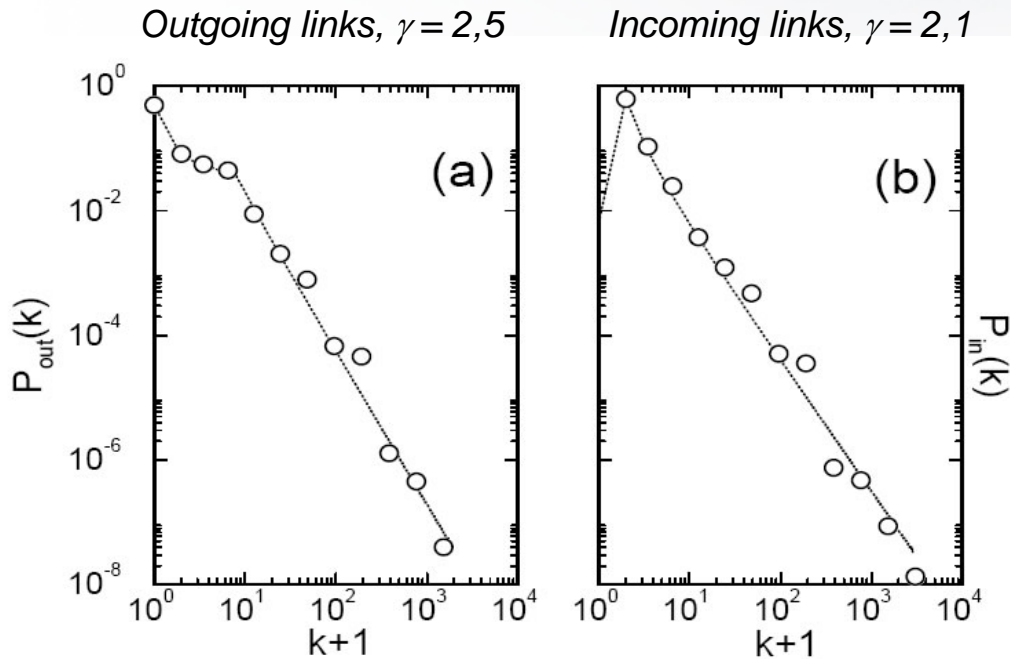
$$P(k) = Ak^{-\gamma}$$

$$\text{Log}[P(k)] = \text{Log}(A) - \gamma \text{Log}(k)$$

A WWW é uma rede sem escala



De 326 mil páginas WWW com
1,5 milhões de links



$$\text{Log}[P(k)] = \text{Log}(A) - \gamma \text{Log}(k)$$



Albert, Jeong, and Barabási. 1999.
Diameter of the World Wide Web. *Nature*
401:130-131.

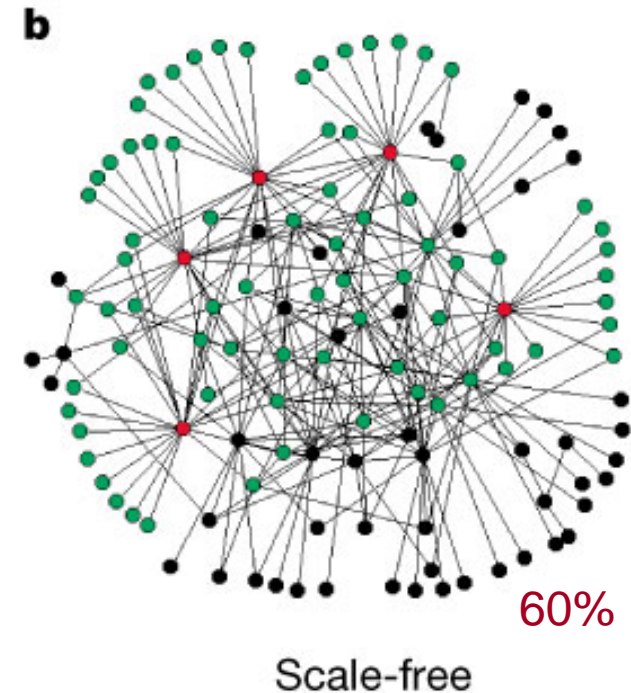
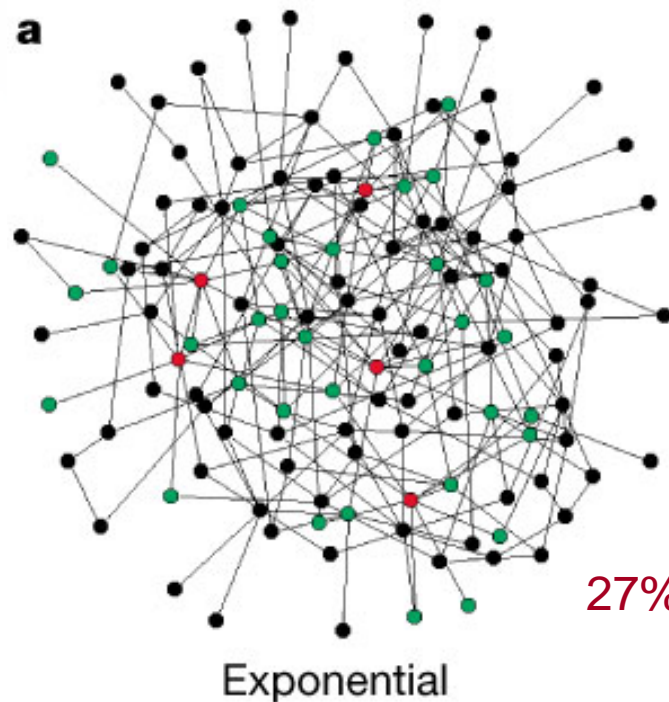
Redes sem escala por todo o lado



1999-2001

Estudos empíricos da topologia de,
Redes eléctricas
SN do nemátodo *C. elegans*
Redes metabólicas celulares
Colaborações entre cientistas
Actores de cinema

Em geral $2,1 < \gamma < 3$



Consequências



- Redes muito resistentes a “erros”: i.e., perturbações aleatórias a nós.
e, simultaneamente...
- Altamente vulneráveis a “ataques” dirigidos aos grandes conectores

Contrasta com redes com escala própria

erros aleatórios e ataques dirigidos a nós mais conectados têm consequências quase idênticas

Strogatz 2001. Exploring complex networks. *Nature* **410**:268-276.

Perguntas



Como é que surge uma topologia dominada por grandes conectores ?

Qual a relação entre estrutura (topologia) e função em redes sem escala própria ?

Há mais consequências práticas em cada contexto ?
(ecologia, bioquímica, epidemiologia ...)

Nova dimensão: o tempo !

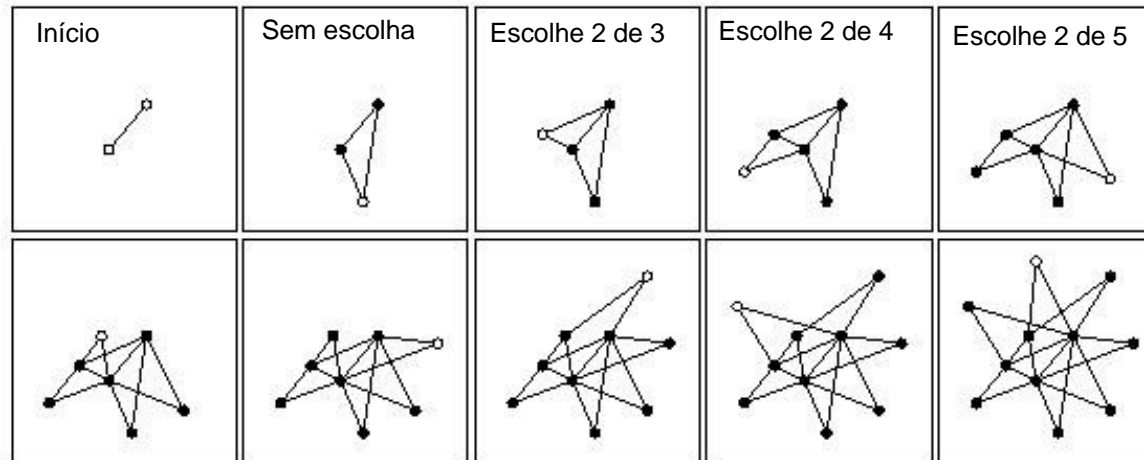


- Nos modelos até 1998, as ligações eram colocadas sobre um conjunto de N nódulos estáticos, pré-definidos.
- Mas as redes reais não param de crescer.
- Quais são as consequências do crescimento ?

O crescimento cria grandes conectores



Processo de crescimento com $K=2$ ligações por cada novo nó



Mesmo com escolha totalmente aleatória, os nós mais antigos ficam mais conectados que os mais recentes.

Mas não é suficiente para explicar a Lei de Potência !

A cauda da distribuição ainda decai demasiado depressa...

Crescimento e ligação preferencial



- A escolha dos nódulos aos quais ligar NÃO é aleatória
Para que páginas direccionamos links na nossa página Web ?
Que presas selecciona um predador invasor ?
- A escolha preferencial aos nódulos mais conectados origina uma cauda em Lei de Potência

O modelo Barabási-Albert



1º) Em cada passo liga-se um novo nóculo

2º) Cada novo nóculo liga-se aos existentes por m ligações

3º) Seja k_j o número ligações do nóculo j

$\sum_j^N k_j$ é o total de ligações numa rede com N nóculos

A probabilidade do nóculo j receber uma ligação é

$$k_j / \sum k_j$$



L. Barabási



Reka Albert

Barabási and Albert. 1999. Emergence of scaling in random networks. *Science* **286**:509-512.

Estas regras conduzem a uma lei de potência, com $\gamma=3$

Dorogovtsev, Mendes, and Samukhin. 2000. Structure of growing networks with preferential linking. *Phys Rev Lett* **85**(21): 4633-4636

Diversidade em redes



- Nem todas as redes são *scale free*. Em algumas a relação $P(k)$ vs K adapta-se bem aos modelos com escala (Gaussiano, Poisson)
- Nas redes *scale free*, em geral $2,1 < \gamma < 3$

Mecanismos não previstos no modelo BA

- a) Aparecimento de novas ligações entre nódulos existentes
- b) Nódulos que redireccionam as suas ligações (“rewiring”)
- c) Nódulos que perdem capacidade para receber mais ligações

Rearranjos *versus* crescimento

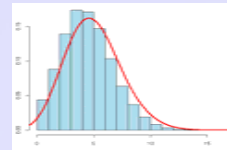


- a) Aparecimento de novas ligações
- b) Redireccionamento de ligações

Se Frequência de (a) \ll Frequência (b)

(Preponderância de rearranjos internos relativamente a crescimento)

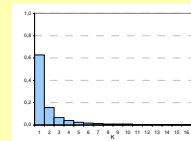
Topologia tende para rede com escala



No caso extremo em que pára de crescer \rightarrow Topologia tipo Erdos-Rényi ou Watts-Strogatz

Se Frequência de (a) elevada (Preponderância de crescimento)

Rede sem escala, γ contido em $[2, +\infty[$



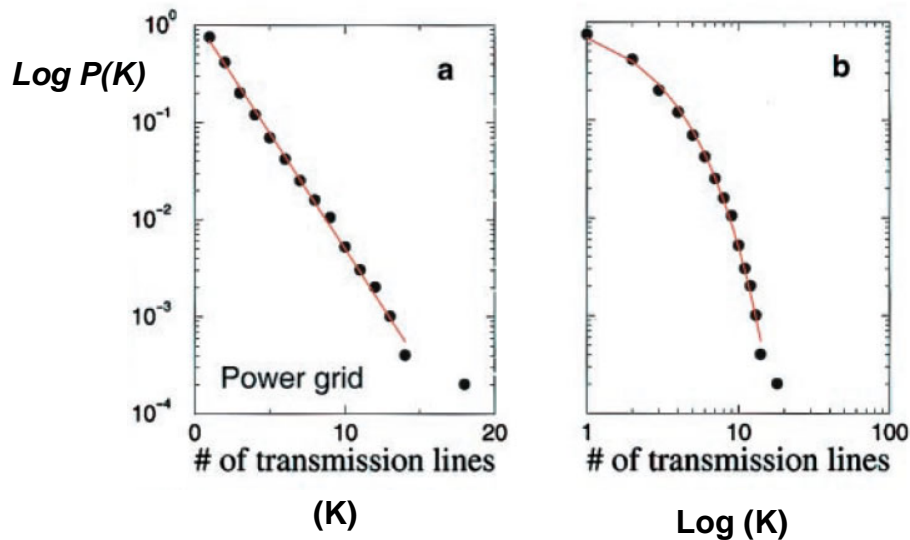
γ depende da frequência relativa de (a) e (b) e de m (núm médio de novas ligações por nóduo novo)

Limitações de ligação



Moléculas, aeroportos, centrais eléctricas, pessoas...etc estão superiormente limitadas quanto ao estabelecimento de novas ligações por razões físicas, económicas, de falta de tempo...etc

Esta limitação faz a “cauda da distribuição” de $P(k)$ contra K cair depressa demais



Conclusão



- As redes reais devem variar num leque entre redes com escala e sem escala.
- As redes sem escala devem ser mais regra do que exceção, especialmente se houver crescimento