Problema
Dados $a, b \in \mathbb{N}$ *tais que* $a\,b+1$ *divide* a^2+b^2, *prove que o quociente* $Q = \frac{a^2+b^2}{a\,b+1}$ *é um quadrado perfeito.*

Sugestão:
Usar um método iterativo do tipo Algorítmo de Euclides.

Solução:
Podemos supôr logo que $b > a > 0$, pois o caso $a = 0$ é trivial com $Q = b^2$. Dividindo b por a temos $b = a\,k + r$ com $0 \leq r < a$.

O caso $r = 0$**:** Neste caso temos que $a^2\,k + 1$ divide $a^2\,k^2 + a^2$ e facilmente se verifica que o quociente Q não pode ser nem menor que k, nem maior que k, ou seja, $Q = k$. Segue resolvendo a equação

$$(a^2\,k + 1)\,k = a^2\,k^2 + a^2 \ ,$$

que $b = a^3$ e $Q = a^2$.

O caso geral ($r \geq 1$**):** Vamos mostrar que o par a, $a - r$ satisfaz exactamente a mesma condição, isto é $a\,(a-r)+1$ divide $a^2 + (a-r)^2$ com o mesmo quociente $Q = \frac{a^2+(a-r)^2}{a\,(a-r)+1}$. Isto mostra que podemos aplicar repetidas vezes este procedimento até encontrarmos um par de números $b' > a' > 0$ em que o resto da divisão de b' por a' seja zero. Então, pelo caso acima, o quociente será um quadrado perfeito. Mas como o quociente se mantém constante ao longo de todo o procedimento resulta que o quociente original Q é um quadrado perfeito.

Resta justificar a afirmação feita. Temos

$$(a^2\,k + a\,r + 1)\,Q = a^2\,k^2 + 2\,a\,r\,k + r^2 + a^2 \ . \tag{0.1}$$

Facilmente se verifica que Q não pode ser menor que k, nem maior que $k+1$. Restam assim dois sub-casos a considerar: $Q = k$ e $Q = k+1$. Vejamos que o primeiro caso, $Q = k$, é impossivel. Simplificando (0.1) obtemos

$$(1 - a\,r)\,k = r^2 + a^2 \ ,$$

e esta equação só é possivel quando $r = 0$, o que contaria a hipótese $r \geq 1$. Logo $Q = k+1$, e a equação (0.1) é sucessivamente equivalente a

$$\begin{aligned}
&(a^2\,k + a\,r + 1)\,(k+1) = a^2\,k^2 + 2\,a\,r\,k + r^2 + a^2 \\
&\Leftrightarrow (a^2 - a\,r + 1)\,k = a^2 + r^2 - a\,r - 1 \\
&\Leftrightarrow (a\,(a-r)+1)\,k = (a-r)^2 + a\,r - 1 \\
&\Leftrightarrow (a\,(a-r)+1)\,(k+1) = (a-r)^2 + a^2 \\
&\Leftrightarrow (a\,(a-r)+1)\,Q = (a-r)^2 + a^2 \ .
\end{aligned}$$