O Mágico

O ajudante do mágico dá oito cartas a alguém, a vítima, que escolhe uma e depois as baralha dispondo-as em cima da mesa à frente do ajudante, umas para cima, as restantes para baixo. O ajudante vira uma única carta tapando-a ou destapando-a. Quando o mágico chega adivinha a carta escolhida.

Solução:

A disposição das oito cartas pela vítima é uma configuração V que corresponde a um vértice num grafo G. Ao virar uma carta nessa configuração o ajudante escolhe um vértice V' vizinho de V. O mágico lê o valor da carta escolhida pela vítima como o valor $f(V')$ no vértice V' duma função $f : G \to \{0, \ldots, 7\}$ definida sobre o conjunto dos vértices de G. Resumindo: A vítima do truque escolhe um vértice $V \in G$ e um número m entre 0 e 7. O ajudante escolhe o único vértice V' vizinho de V tal que $f(V') = m$. O Mágico lê o valor $m = f(V')$ da carta escolhida pela vítima.

Para o truque funcionar cada vértice $V \in G$ deve ter pelo menos 8 vértices vizinhos e a função f deve tomar 8 valores distintos em 8 vértices vizinhos de V. O grafo das configurações é claramente o hipercubo $\{0,1\}^8$. Cada vértice do hipercubo representa uma das possíveis configurações escolhidas pela vítima. O truque funciona em geral com 2^n cartas. Seja I_n o hipercubo $\{0,1\}^{2^n}$ com 2^{2^n} vértices. Neste grafo cada vértice tem exactamente 2^n vizinhos. A função pretendida é a seguinte $f : I_n \to \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$

$$f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2^n}) := \alpha_1 \oplus 2\alpha_2 \oplus 3\alpha_3 \oplus \ldots \oplus (2^n - 1)\, \alpha_{2^n - 1} \ ,$$

onde $\oplus$ representa a soma nim de números inteiros positivos. Por outras palavras, $f(A)$ é a soma nim das $2^n - 1$ primeiras cartas viradas para cima. O adjectivo "primeiras" refere-se ao valor intrínseco das cartas e não à ordem em que estas são dispostas. Esta função f goza da seguinte propriedade, *se A e A' são vértices vizinhos que diferem na $p-$ésima coordenada então $f(A') = f(A) \oplus p$* , que por sua vez implica que f tome 2^n valores distintos nos 2^n vértices vizinhos de cada vértice do hipercubo I_n. Dado um vértice $A \in I_n$ sejam $m = f(A)$ e $0 \leq m' \leq 2^n - 1$ o número escolhido pela vítima. Tomando $p = m' \oplus m$ tem-se $m' = m \oplus p$, e o vértice A' vizinho de A que difere de A na $p-$ésima coordenada satifaz $f(A') = f(A) \oplus p = m \oplus p = m'$.