O Quadro

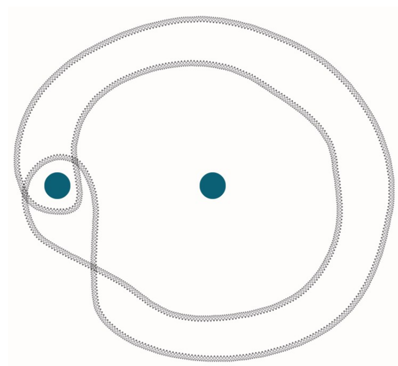
Como pendurar um quadro numa parede, enrolando o fio à volta de n pregos ($n \geq 2$) de modo que o quadro caia sempre que se remova qualquer um dos n pregos?

Solução:

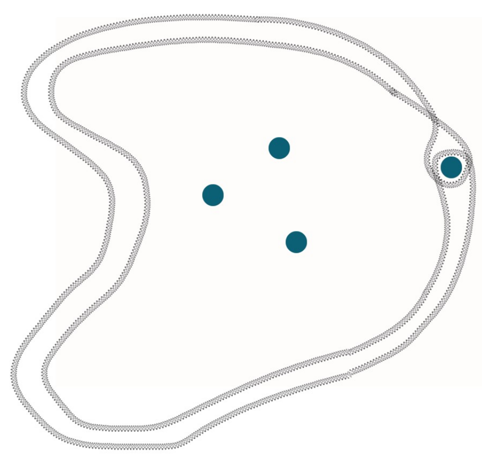
Podemos pensar no sistema quadro-fio como uma curva fechada no plano da parede que não passa pelos n pontos onde estão colocados os pregos. Este problema é equivalente ao seguinte

Dados n pontos $p_0, \ldots, p_{n-1} \in \mathbb{R}^2$, existe alguma curva fechada no domínio $X = \mathbb{R}^2 - \{p_0, \ldots, p_{n-1}\}$ que seja homotopicamente não trivial em X, mas tenha índice (winding number) nulo em torno de cada um dos pontos p_i?

A condição de homotopia não trivial corresponde ao quadro ficar pendurado. As condições de índice nulo traduzem o facto do quadro cair qualquer que seja o prego removido. A resposta a este problema é afirmativa. Para $n = 1$ a solução é trivial. A figura seguinte mostra a solução para $n = 2$.



O caso geral obtém-se indutivamente. Suponhamos que já sabemos construir uma curva com estas propriedades para $n - 1$ pontos. Fixemos o primeiro ponto p_0 e considermos a curva Γ como mostra a figura seguinte.



Tratando Γ como um laço duplo enrolamos esta 'curva dupla' em volta dos restantes $n - 1$ pontos $p_1, \ldots, p_{n-1}$ de acordo com caso anterior. O resultado é uma nova curva Γ' com as seguintes propriedades:

(1) Γ' é homotopicamente não trivial em $\mathbb{R}^2 - \{p_0, \dots, p_{n-1}\}$ em virtude do enlaçamento de Γ em torno dos outros pontos o ser.
(2) Γ' tem índice zero em torno de p_0, pois removendo p_0 o laço duplo Γ vira uma curva 'aberta' cujo enlaçamento em torno dos restantes pontos pode ser desfeito.
(3) Γ' tem índice zero em torno de cada um dos restantes pontos p_i porque removendo p_i podemos desfazer o enlaçamento em torno de p_j para cada $j \neq i$, $j \geq 1$. Em torno de p_0 também já que Γ tem índice zero em torno de p_0.

Mostramos a seguir o resultado desta construção para $n = 3$.