19-2-2021

Calculo Diferencial

OBJECTOS DE ESTUDO : FUNÇÕES

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $\qquad n, m \in \mathbb{N}$

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ **DOMÍNIO** de f

$x = (x_1, \dots, x_n) \in D$

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$$

FUNÇÕES COMPONENTES de f

$f_i : D \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad 1 \leq i \leq m$

CONTRADOMÍNIO

$$f(D) = \{ f(x) : x \in D \}$$

$$= \{ y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in D \;\; y = f(x) \}$$

EXEMPLO 1

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0,\ y>0\}$$

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y) = (\underbrace{x+y}_{1^{\text{a}}\ \text{comp.}},\ \underbrace{\log(xy)}_{2^{\text{a}}\ \text{comp.}})$$

$$f_1, f_2 : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$f_1(x,y) = x+y$ 1ª componente

$f_2(x,y) = \log(xy)$ 2ª componente

$$\boxed{\begin{gathered} (s,t) = f(x,y) \\ \begin{cases} s = x+y \\ t = \log(xy) \end{cases} \end{gathered}}$$

$$f(D) = \{(s,t) : \exists x,y>0 \ \ s = x+y,\ t = \log(xy)\}$$

$$= \{(s,t) : s>0,\ \ t \leq 2\log\left(\tfrac{s}{2}\right)\}$$

$$xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2$$

$$t = \log(xy) \le 2\log\left(\frac{s}{2}\right)$$

$$\begin{cases} x+y = s \\ \log(xy) = t \end{cases} \iff \begin{cases} x+y = s \\ xy = e^t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = e^t/x \\ x + e^t/x = s \end{cases}$$

$$x^2 + e^t = sx \iff x^2 - sx + e^t = 0$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{s \pm \sqrt{s^2 - 4e^t}}{2} \\ y = \dfrac{s \mp \sqrt{s^2 - 4e^t}}{2} \end{cases}$$

$$s^2 - 4e^t > 0 \iff \frac{s^2}{4} > e^t$$

$$\iff \log\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2\right] > t \iff 2\log\left(\frac{s}{2}\right) > t$$

EXEMPLO 2

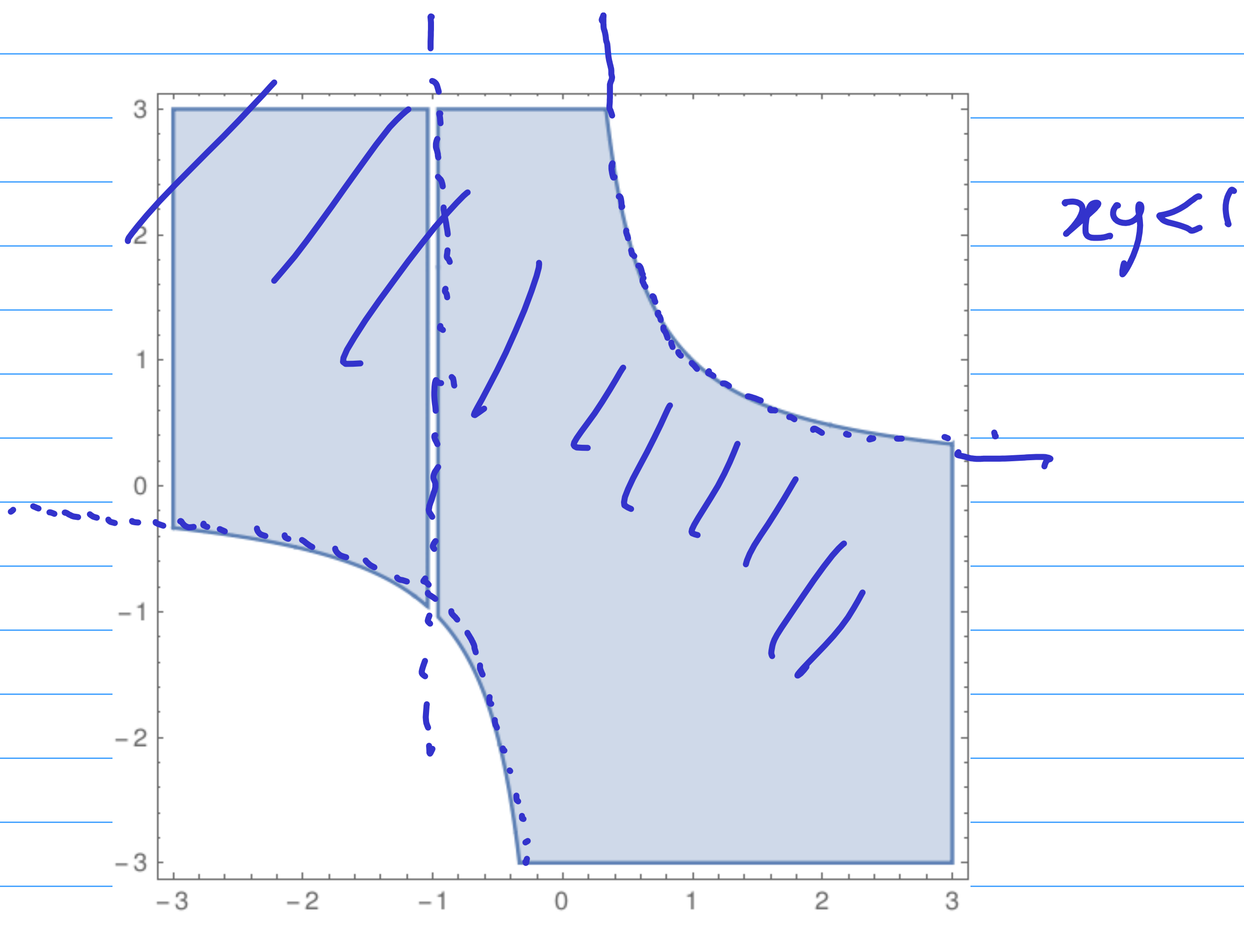
$$(u,v) = \left(\frac{1-y}{1+x}, \log(1-xy)\right)$$

$$(x,y) \overset{f}{\longmapsto} (u,v)$$

DOMÍNIO NATURAL DA EXPRESSÃO

Maior domínio onde todas as componentes estão bem definidas.

$$D_f = \{(x,y) : 1+x \neq 0,\ 1-xy > 0\}$$



PARA QUE SERVEM ?

O Cálculo Diferencial e Integral, e em particular a Matemática, podem ser vistos como uma

CAIXA DE FERRAMENTAS

para modelar o mundo real e em particular para resolver problemas de natureza científico-tecnológica.

As funções descrevem relações entre variáveis que representem grandezas físicas no contexto de algum problema real concreto.

O CÁLCULO COMO FERRAMENTA

PROBLEMA REAL

abstração

PROBLEMA MATEMÁTICO

resolução matemática

RESOLVER UMA EQUAÇÃO
OPTIMIZAR UMA FUNÇÂO REAL
. . .
. . .

solução
do
problema
real

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA (GRÁFICA) DE FUNÇÕES

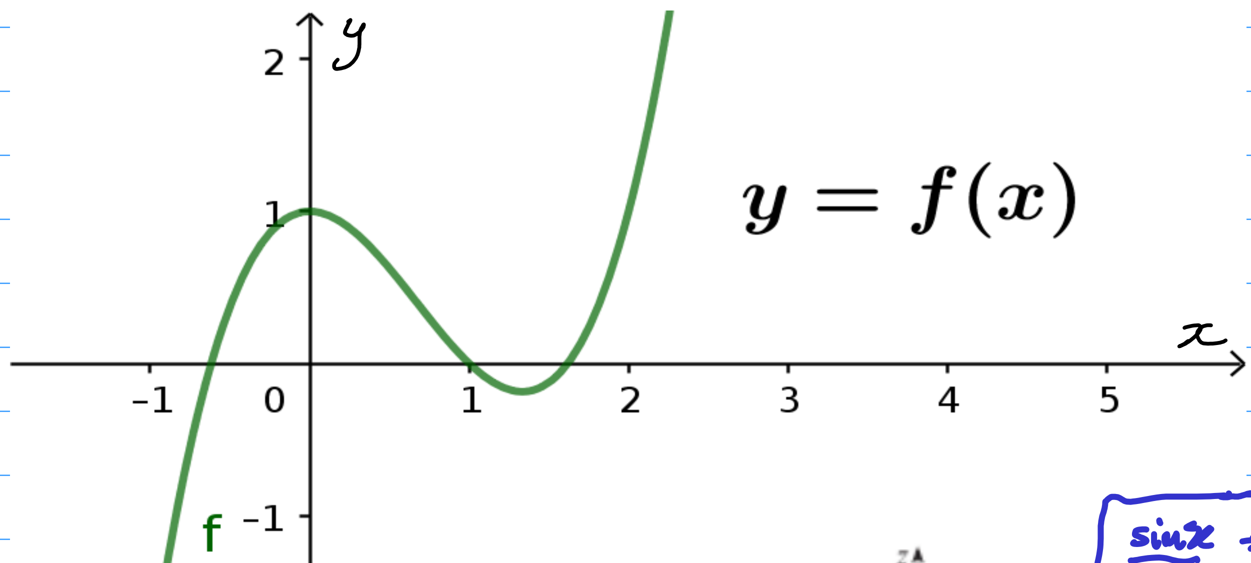
I - GRÁFICO DUMA FUNÇÃO

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} : x \in D,\ y = f(x)\}$$

Podemos visualizá-lo se $n+m \leq 3$.

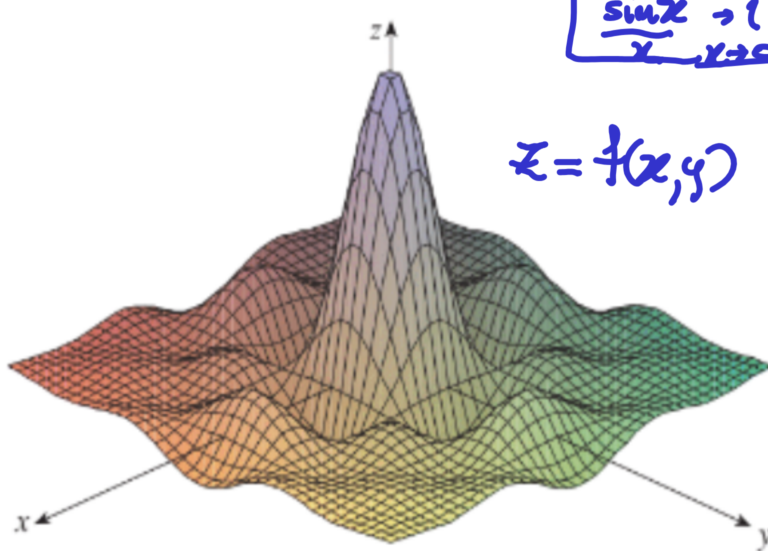
CASO $n=m=1$ $\quad f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



CASO $n=2,\ m=1$

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \frac{\sin x \sin y}{xy}$$

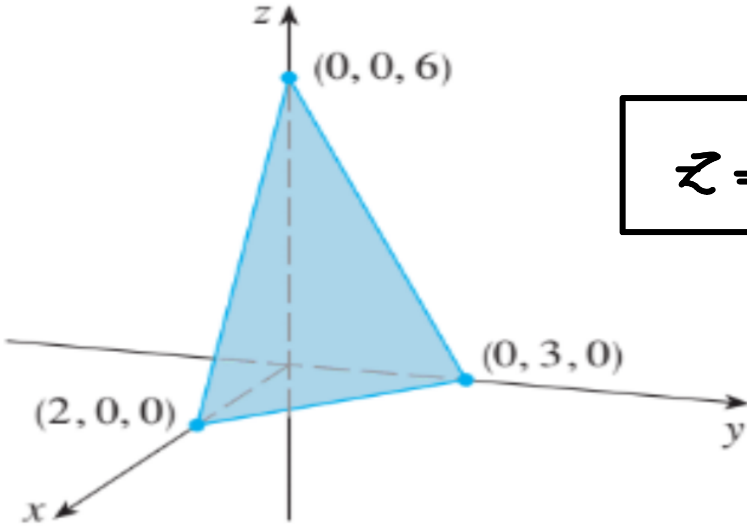


$\boxed{\frac{\sin x}{x} \to 1,\ x \to 0}$

$z = f(x,y)$

MAIS EXEMPLOS CASO $n=2$, $m=1$

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 6-3x-2y$

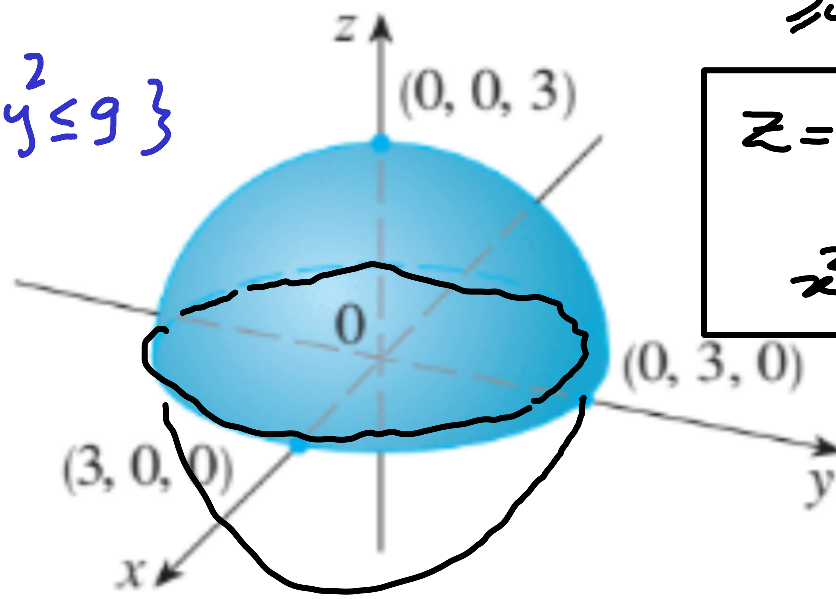


$\boxed{z = 6-3x-2y}$

$3x+2y+z=6$

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{\underbrace{9-x^2-y^2}_{\geq 0}}$

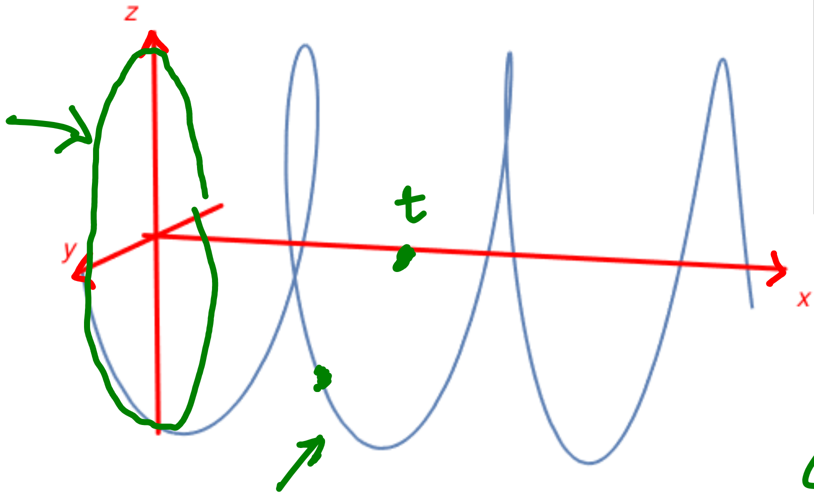
$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 9\}$



$$\boxed{\begin{array}{c} z = \sqrt{9-x^2-y^2} \\ \Downarrow \\ x^2+y^2+z^2=9 \end{array}}$$

CASO $n=1$, $m=2$ $\qquad f:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$

$f(t) = (\cos(6t), \sin(6t))$



$x = t$
$y = \cos(6t)$
$z = \sin(6t)$

$(t, \underline{y, z})$

$(y,z) = f(t)$

II CONJUNTOS DE NÍVEL

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$k \in \mathbb{R}^m$

$N_k = \{ x \in D : f(x) = k \}$

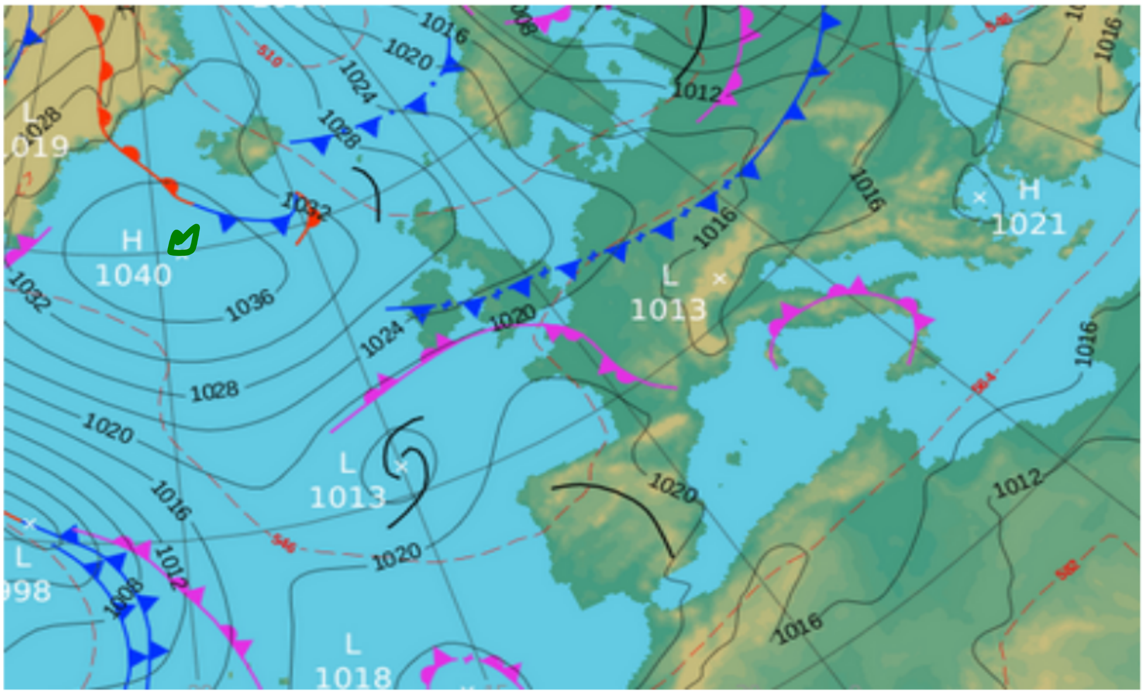
diz-se o <u>conjunto de nível</u> k de f.

Podemos <u>visualizá-los</u> se $m < n \leq 3$

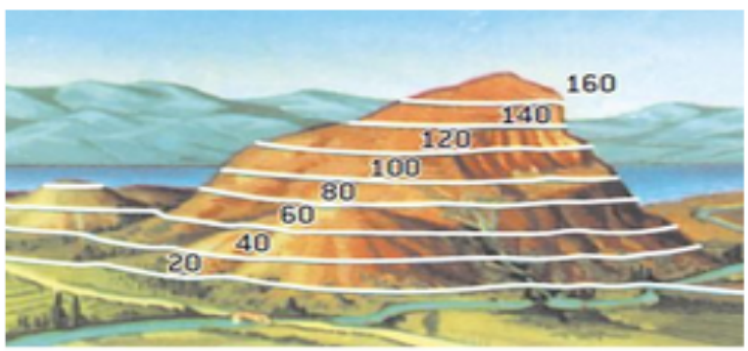
CASO $n=2,\ m=1$

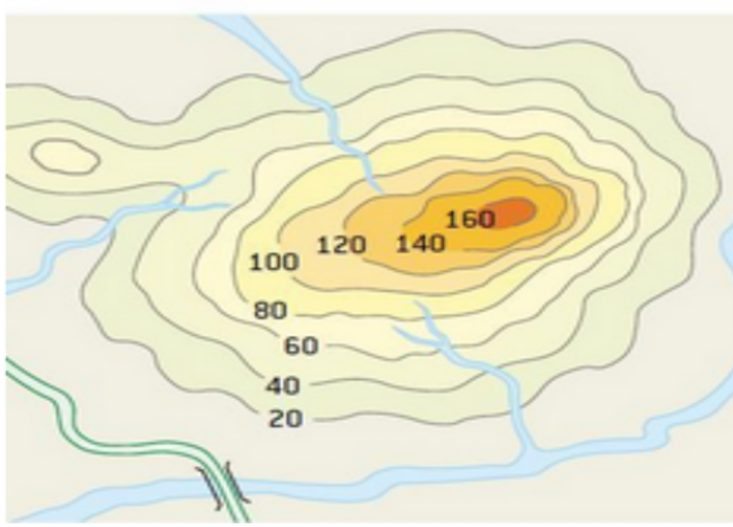
Neste caso os conjuntos de nível são tipicamente curvas, ditas <u>curvas de nível</u>.

curvas isobáricas

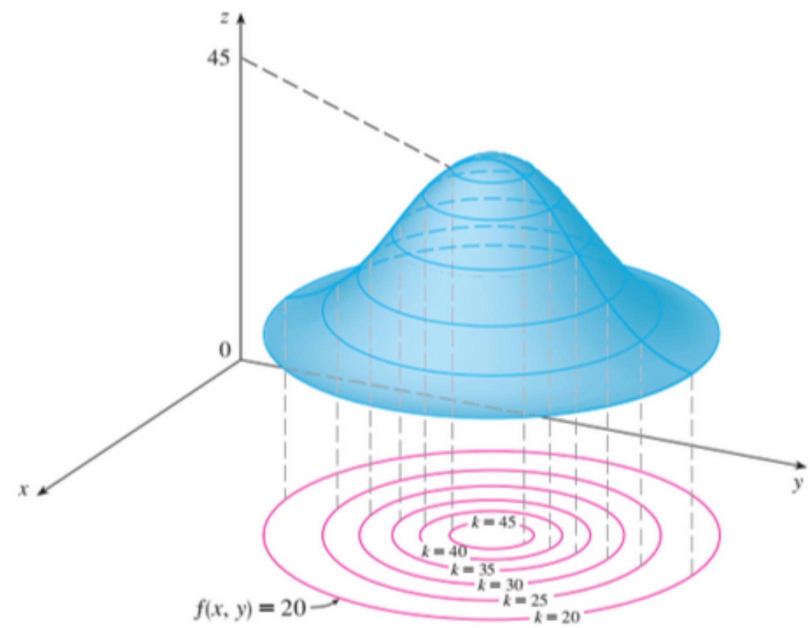


curvas de nível orográficas





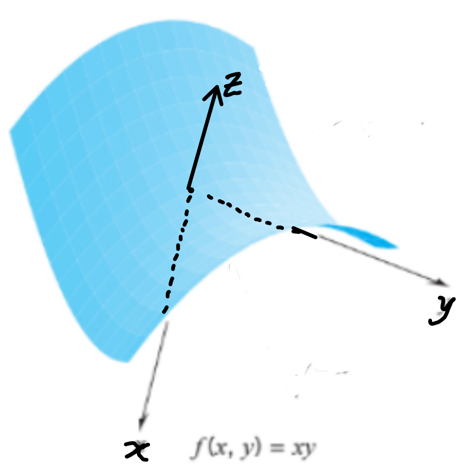
A curva de nível N_k de $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é a

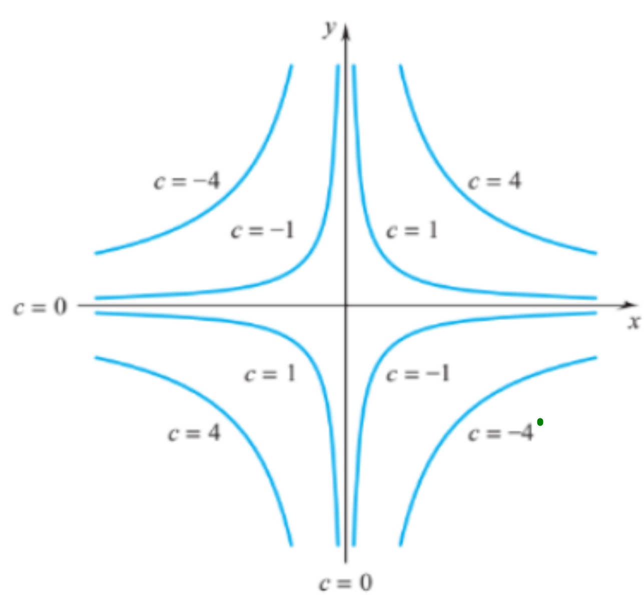


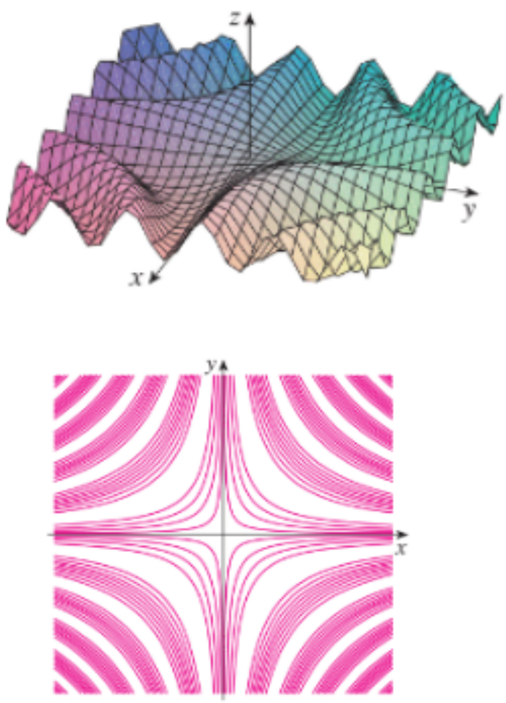
projeção no plano xOy da intersecção do gráfico de f com o plano $z = k$.

MAIS EXEMPLOS CASO $n=2$, $m=1$

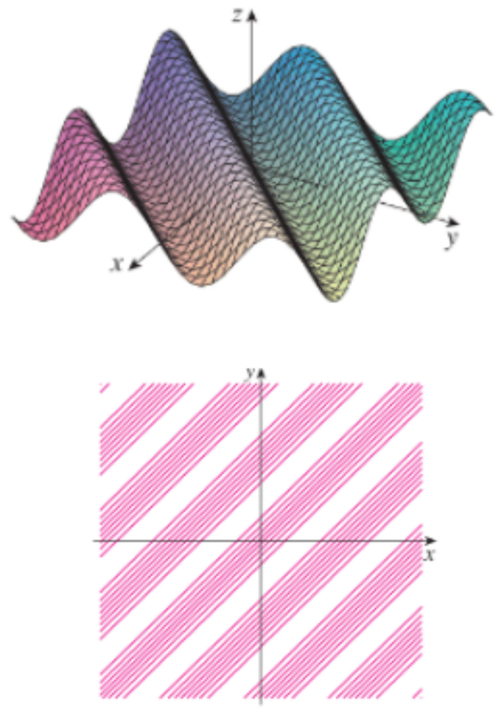
$f(x,y) = xy = c$



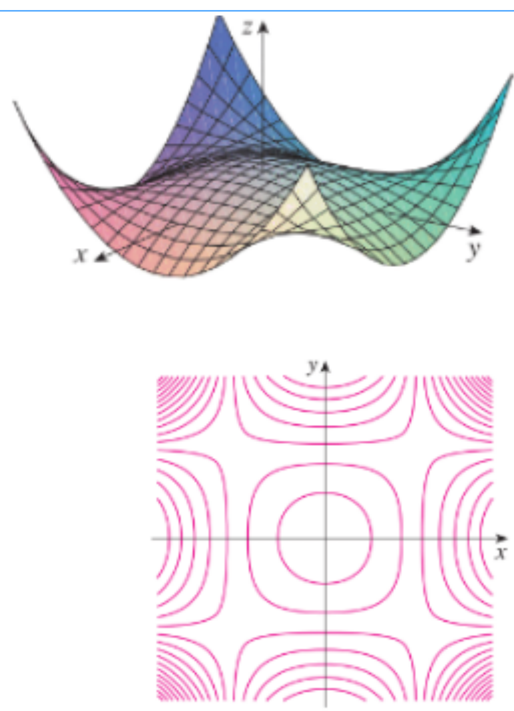




$(x, y) \mapsto \sin(xy)$



$(x, y) \mapsto \sin(x - y)$



$(x, y) \mapsto (1 - x^2)(1 - y^2)$

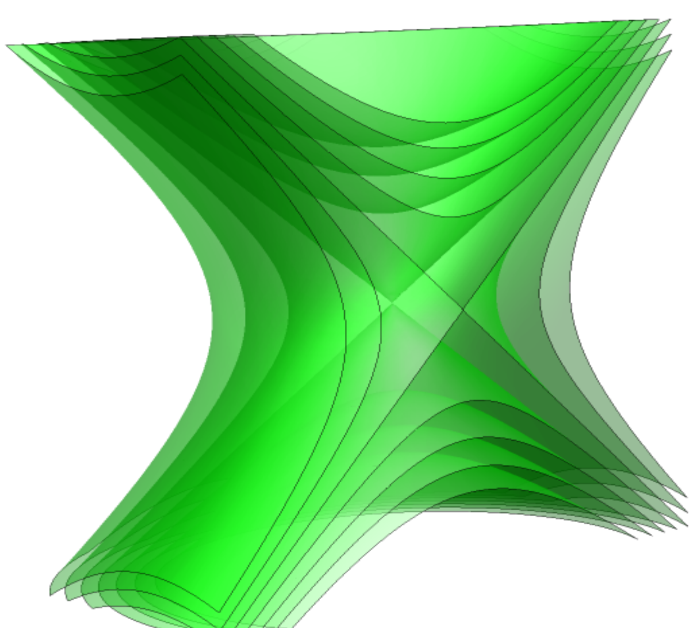
CASO $n=3$, $m=1$ $\qquad f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Neste caso os conjuntos de nível são tipicamente superfícies, ditas superfícies de nível.

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$f(x,y,z) = c$

$$f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$$

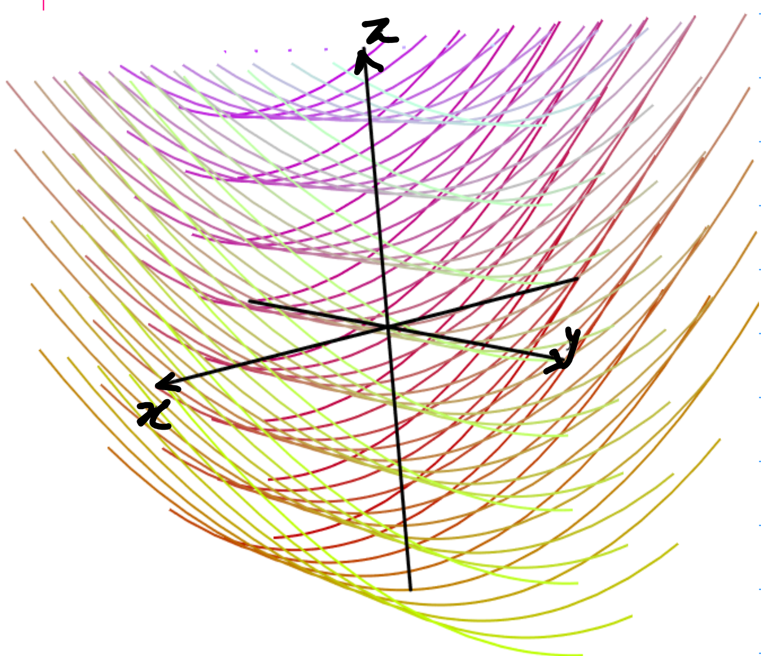


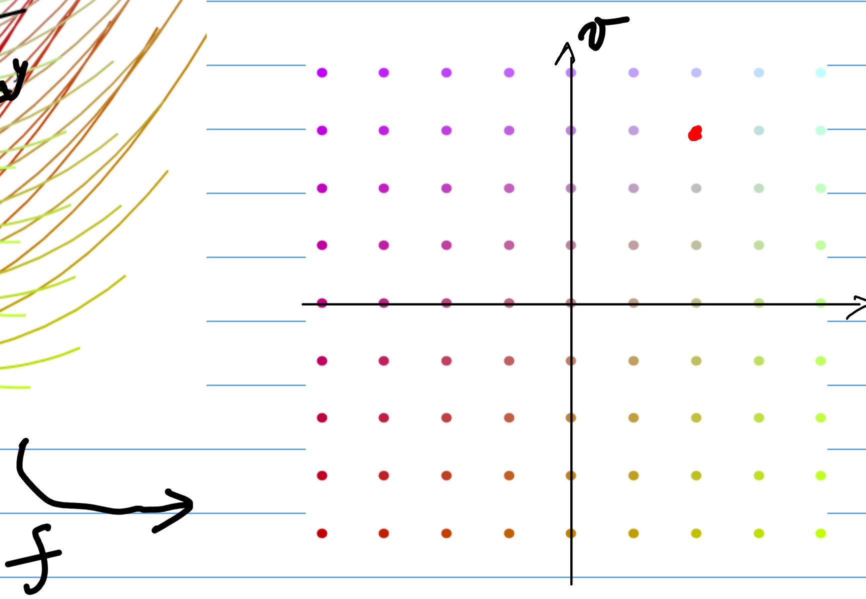
$f(x,y,z) = c$

CASO $n=3$, $m=2$ $\quad f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Neste caso os conjuntos de nível são tipicamente curvas, ditas curvas de nível.

$$f(x,y,z) = \left(x+y,\ z - \frac{x^2}{2}\right) = (u,v)$$





III PARAMETRIZAÇÃO DO DO CONTRADOMÍNIO

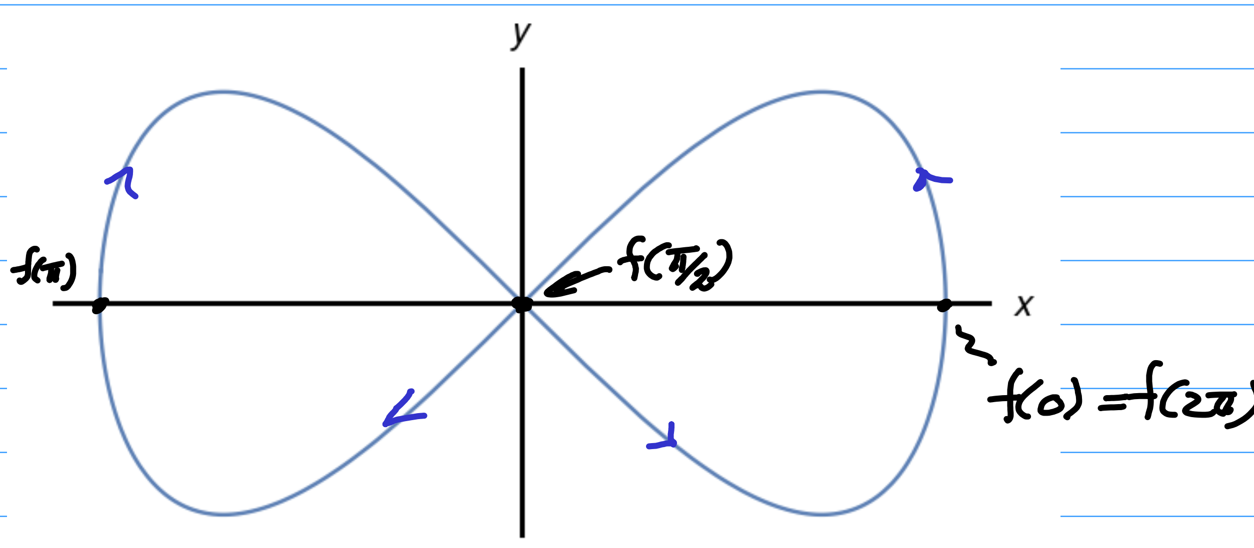
$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

Chama-se <u>curva coordenada</u> à imagem por f duma linha recta no domínio paralela a um dos eixos coordenados

Podemos <u>visualizar</u> as curvas coordenadas se $n \leq m \leq 3$

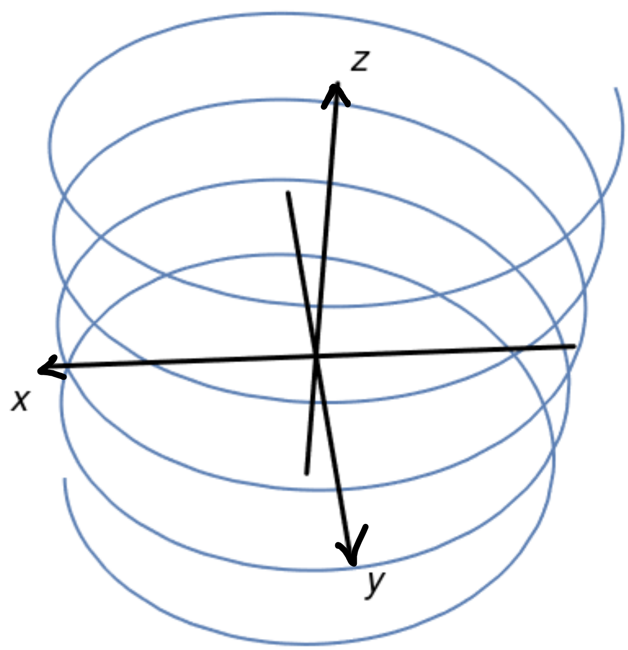
<u>CASO $n=1$, $m=2$</u> $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$f(t) = (2\cos t, \sin(2t))$$



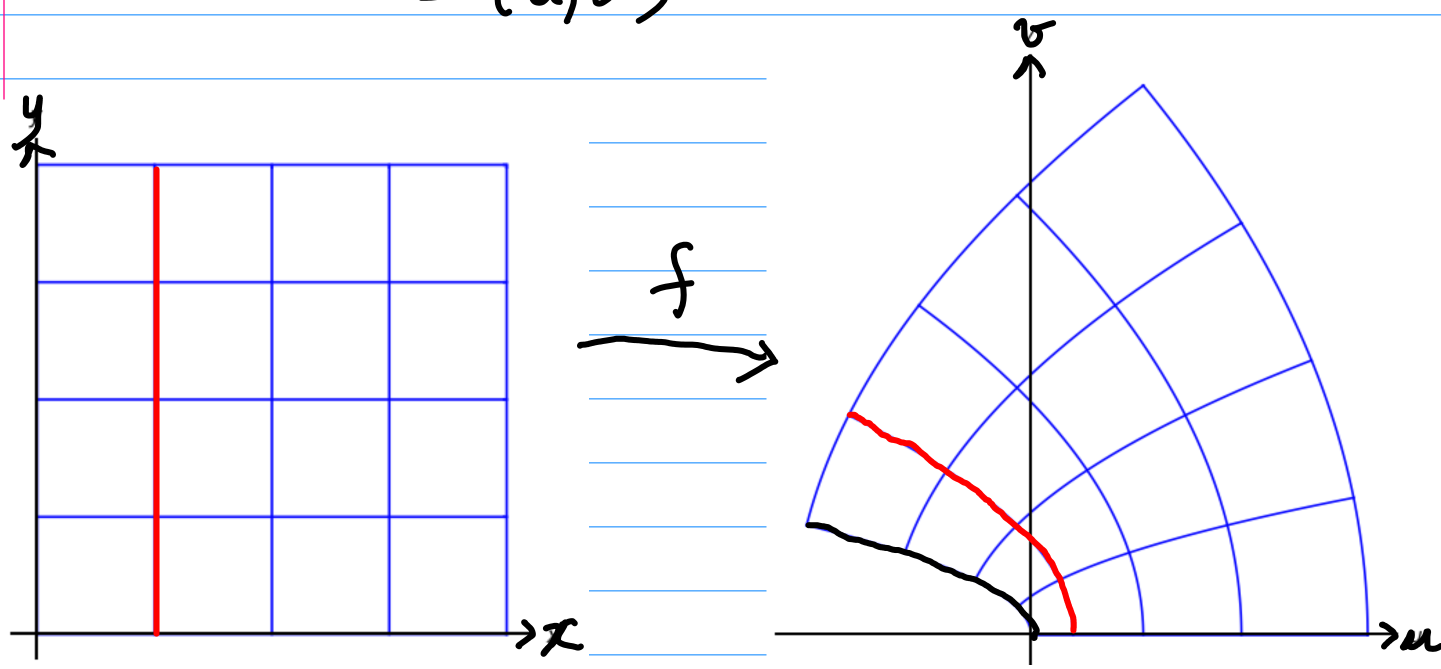
CASO $n=1,\ m=3$ $\qquad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$

$$f(t) = (\cos(3t), \sin(3t), t/2)$$



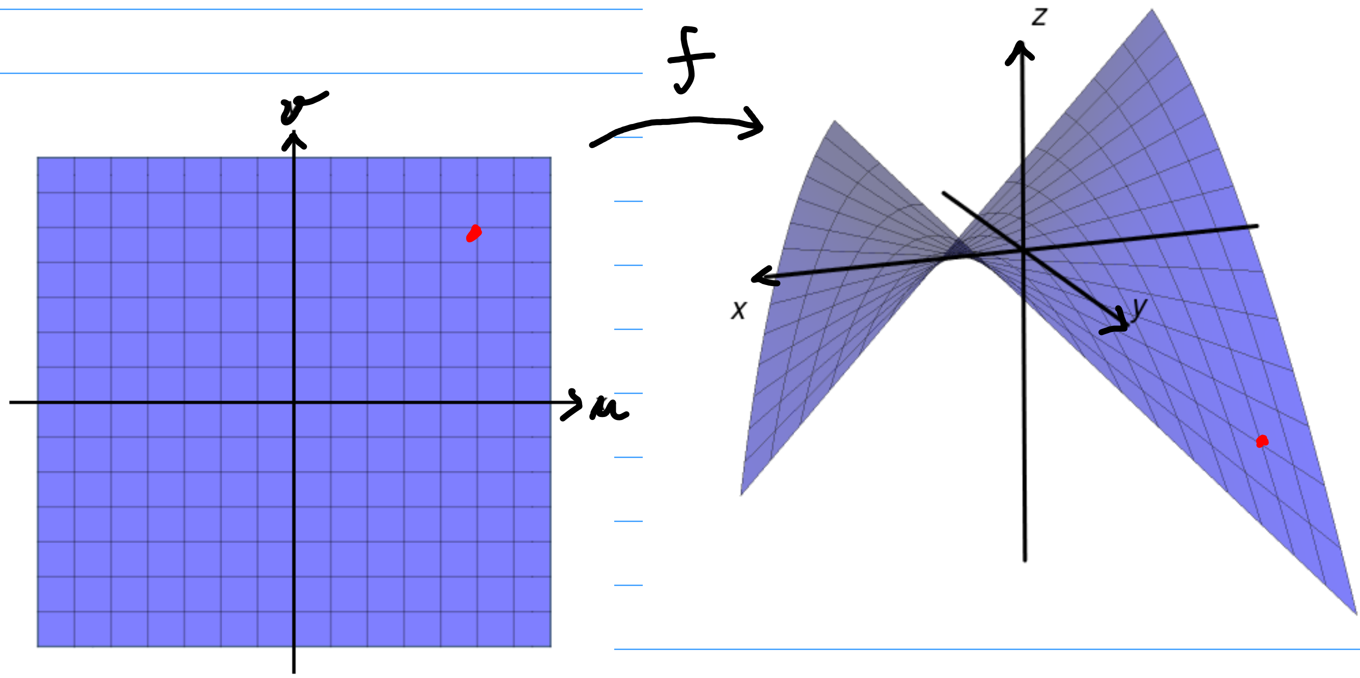
CASO $n=m=2$ $\qquad f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (x+x^2-y^2,\ y+2xy)$$
$$= (u,v)$$



CASO $n=2,\ m=3$ $\qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$f(u,v) = \left(u, v, uv - \frac{v^2}{4}\right) = (x,y,z)$$



IV CAMPOS DE VECTORES

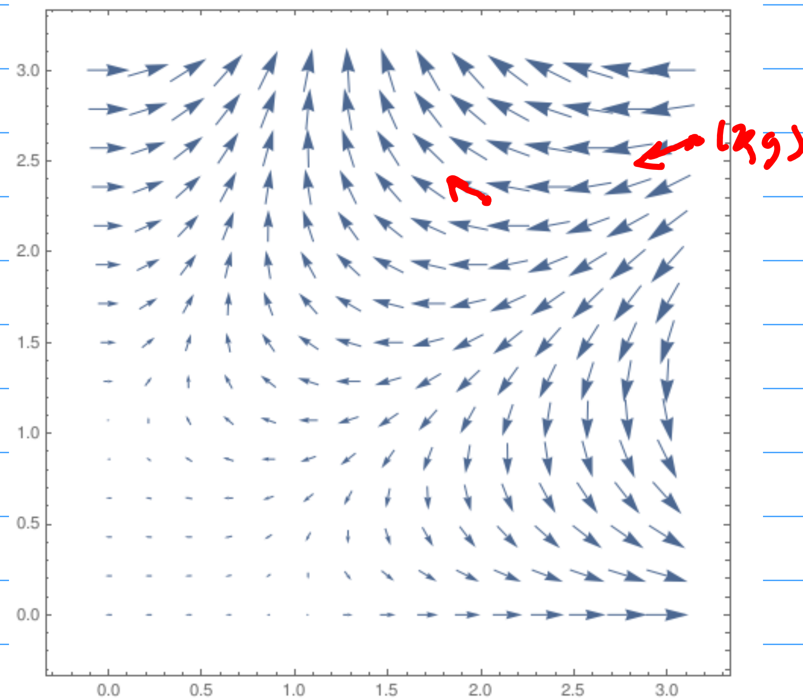
$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Esta aplicação diz-se um <u>campo de vectores</u> quando vemos $f(x) \in \mathbb{R}^n$ como representando um vector aplicado no ponto $x \in D$.

Para visualizar precisamos $n \leq 3$.

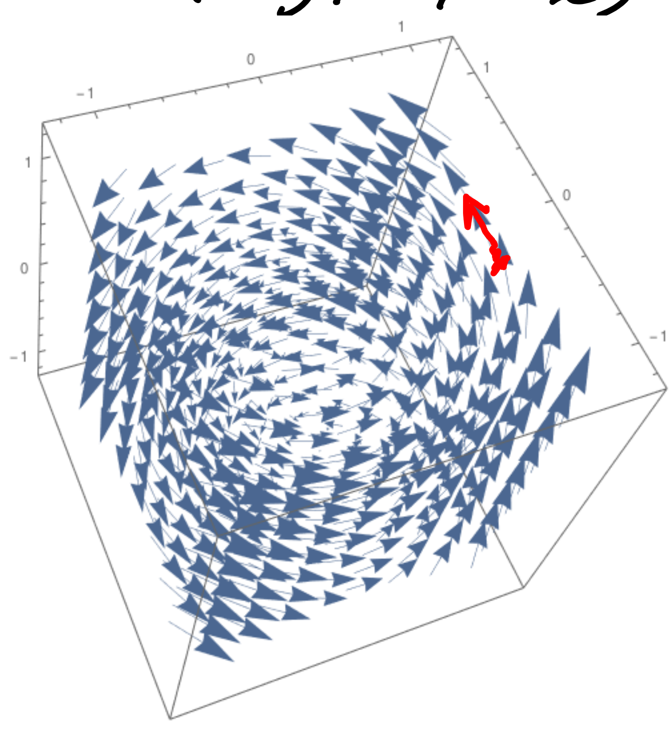
CASO $n=2$ $\quad f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x,y)=(x^4+y^4-6x^2y^2-1,\ 4xy^3-4x^3y)$$



CASO $n=3$ $\quad f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z)=(-y,\ x,\ z/2)$$



23-2-2021

NOÇÕES TOPOLÓGICAS

Propriedades topológicas do domínio da função $\Longrightarrow$ Propriedades da função

ALGUNS FACTOS SOBRE FUNÇÕES $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Noções topológicas $\rightsquigarrow$ Definição de limites, continuidade, derivadas e diferenciabilidade

Domínio conexo (intervalo) $\rightsquigarrow$ Teorema do valor intermédio de Bolzano

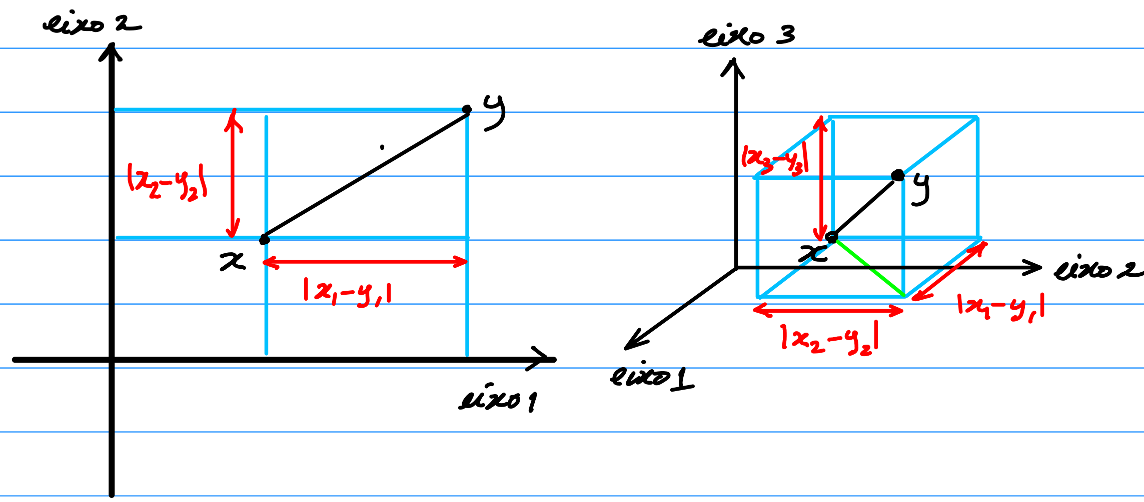
Domínio compacto (fechado e limitado) $\rightsquigarrow$ Teorema do Weierstrass (Princípio do máximo)

Domínio aberto $\rightsquigarrow$ Critério para identificar máximos e mínimos como zeros da derivada

DISTÂNCIA EUCLIDEANA

$x = (x_1, \dots, x_n)\ ,\quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\begin{aligned} d(x,y) &= \|x-y\| = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \\ &= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2} \end{aligned}}$$



BOLAS (ABERTAS e FECHADAS)

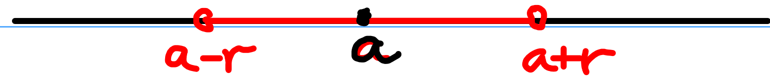
Centro $\quad a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

raio $\quad r > 0$

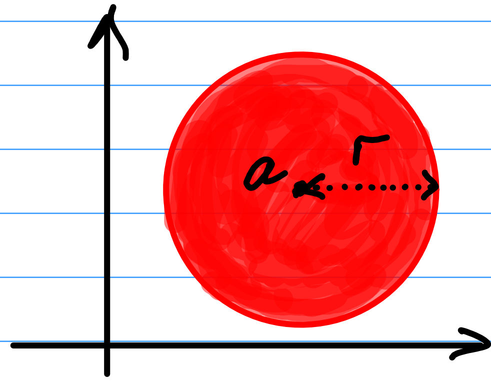
$B_r(a) = \{ x \in \mathbb{R}^n : d(x,a) < r \}$ (aberta)

$\overline{B}_r(a) = \{ x \in \mathbb{R}^n : d(x,a) \leq r \}$ (fechada)

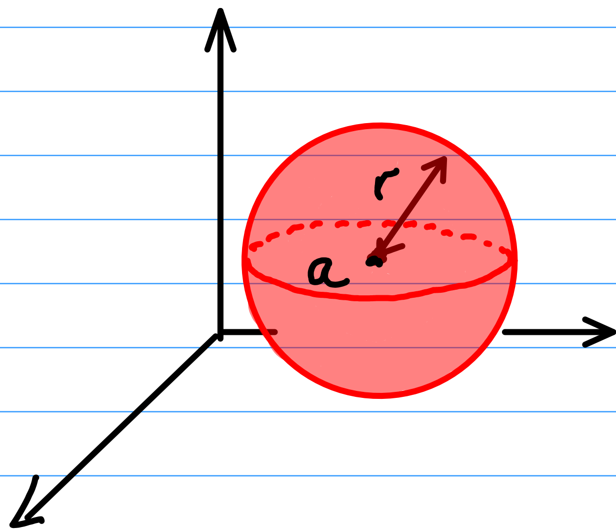
$n=1$



$n=2$

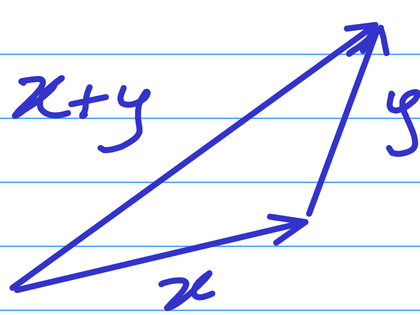


$n=3$



DESIGUALDADE TRIANGULAR (NORMA)

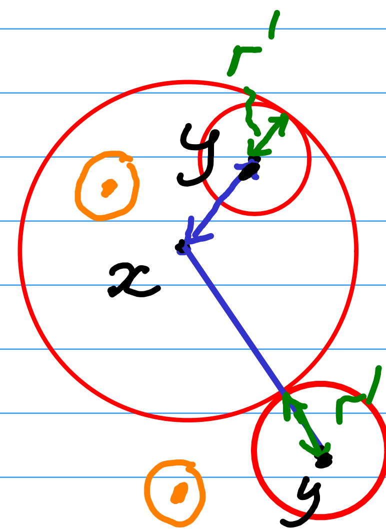
$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$$



<u>DESIGUALDADE TRIANGULAR (DISTÂNCIA)</u>

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

<u>Exerc</u>



(a) $y \in B_r(x)$ e $r' = r - d(x,y)$

$\Longrightarrow \quad B_{r'}(y) \subseteq B_r(x).$

$y \notin \overline{B}_r(x)$ e $r' = d(x,y) - r$

$\Longrightarrow \quad B_{r'}(y) \cap \overline{B}_r(x) = \emptyset$

DEF. Um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se

<u>aberto</u> se $\forall a \in D \; \exists r > 0 \;\; B_r(a) \subseteq D$

<u>fechado</u> se $D^c = \mathbb{R}^n \setminus D$ fôr aberto.

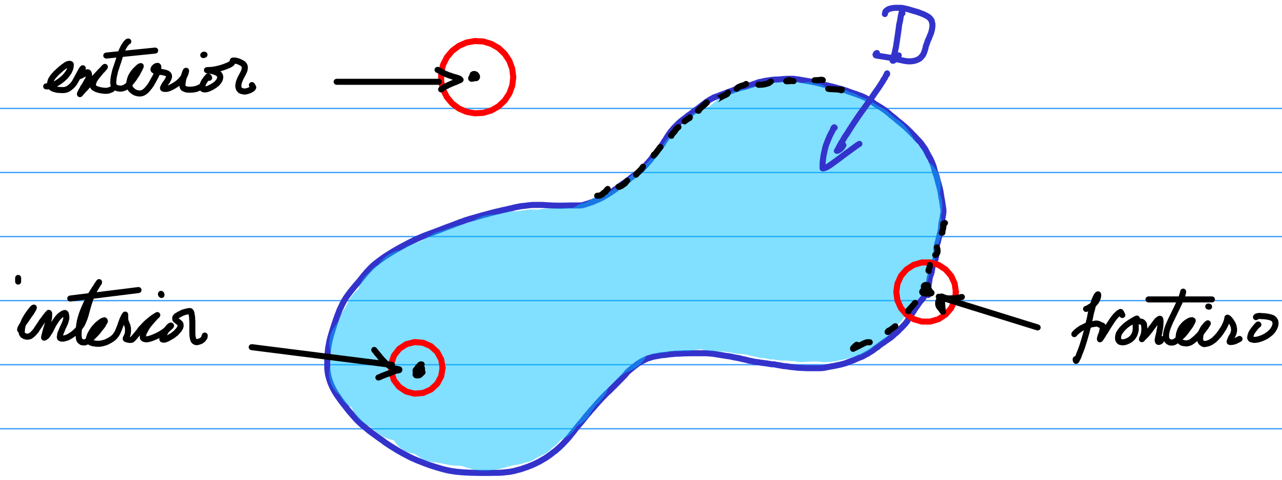
DEF. Dados $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ dizemos que

x é <u>interior</u> a D se $\exists r > 0 \;\; B_r(x) \subseteq D$

x é <u>exterior</u> a D se $\exists r > 0 \;\; B_r(x) \cap D = \emptyset$

x é <u>fronteiro</u> a D se $\forall r > 0 \;\; B_r(x) \cap D \neq \emptyset$ e $B_r(x) \cap D^c \neq \emptyset$

$V \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se uma <u>vizinhança</u> de $a \in \mathbb{R}^n$ se a for interior a V.



Ser <u>interior</u>, <u>exterior</u> ou <u>fronteira</u> a um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ são condições exaustivas e mutuamente exclusivas

$$\operatorname{int} D = \{ x \in \mathbb{R}^n : x \text{ é interior a } D \}$$

$$\operatorname{ext} D = \{ x \in \mathbb{R}^n : x \text{ é exterior a } D \}$$

$$\operatorname{fr} D = \{ x \in \mathbb{R}^n : x \text{ é fronteira a } D \}$$

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{int} D \cup \operatorname{ext} D \cup \operatorname{fr} D$$

disjuntos 2 a 2

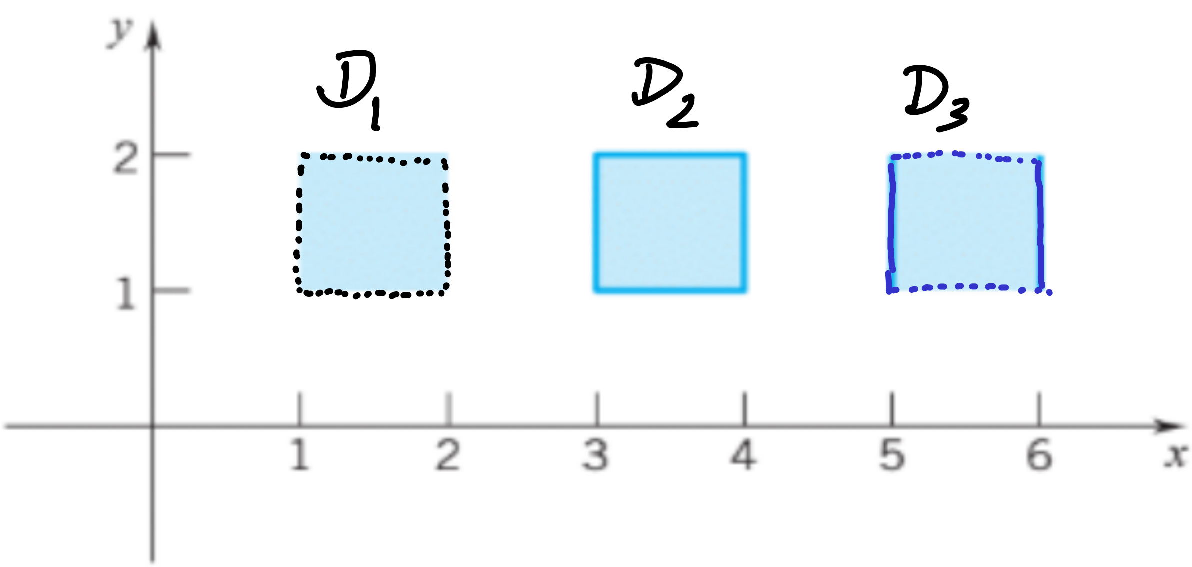
PROP Dado $D \subseteq \mathbb{R}^n$,

- $\text{fr}\, D = \text{fr}\, D^C$
- D é aberto $\iff$ $\text{int}\, D = D$

  D é fechado $\iff$ $\text{fr}\, D \subseteq D$ $\Leftrightarrow$ $D^C = \text{ext}(D)$

  int(D) e ext(D) são abertos

EXEMPLOS



aberto $D_1 = \{(x,y) : 1 < x < 2, \quad 1 < y < 2\}$

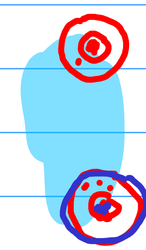
fechado $D_2 = \{(x,y) : 3 \leq x \leq 4, \quad 1 \leq y \leq 2\}$

não é aberto nem fechado $D_3 = \{(x,y) : 5 \leq x \leq 6, \quad 1 < y < 2\}$

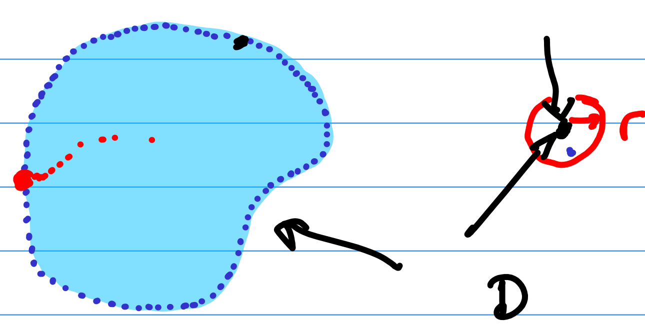
$D = \{(0,0), (1,1)\}$

DEF. Dado $D \subseteq \mathbb{R}^n$,
$a \in D$ diz-se um ponto isolado de D se $\exists r > 0 \quad D \cap B_r(a) = \{a\}$

Se $a \in D$ não fôr um ponto isolado de D
$\forall r > 0 \quad \# D \cap B_r(a) = \infty$
Estes pontos dizem-se pontos de acumulação de D.



Chama-se fecho de D ao conjunto
$$\overline{D} = D \cup \operatorname{fr} D$$
Chama-se derivado de D ao conjunto
$$D' = \{ x \in \overline{D} : x \text{ é ponto de acumulação de } \overline{D} \}$$

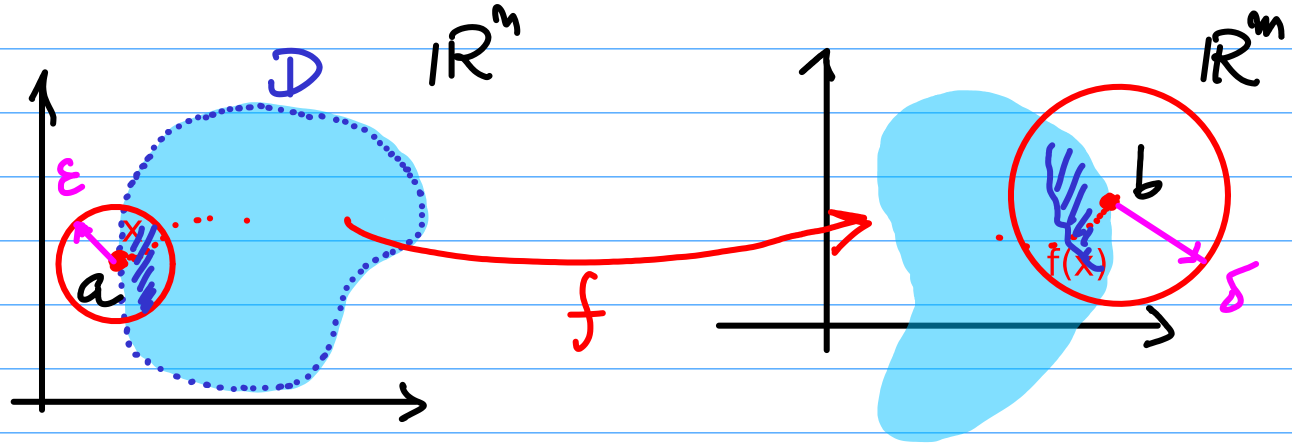


LIMITES

DEF. Dados $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\quad \underline{a \in D'}$, $\underline{b \in \mathbb{R}^m}$

dizemos que $b = \lim_{x \to a} f(x)$ se

$\forall \delta > 0 \; \exists \varepsilon > 0 \quad x \in D,\ 0 < d(x,a) < \varepsilon \Rightarrow d(f(x), b) < \delta$



EXEMPLOS

- $d(f(x), b) \leq 10\, d(x,a)$
- $d(f(x), b) \leq \sqrt{d(x,a)}$
- $d(f(x), b) \leq e^{d(x,a)} - 1$

$x \to a \Rightarrow f(x) \to b$

$\Rightarrow b = \lim_{x \to a} f(x)$

$\delta \quad \boxed{\varepsilon = \delta^2} \quad d(x,a) < \delta^2 \Longrightarrow d(f(x), b) \leq \sqrt{d(x,a)} < \sqrt{\delta^2} = \delta$

PROP

Se existir $\phi : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ tal que

$$\lim_{t\to 0} \phi(t) = 0 \quad \text{e}$$

$$d(f(x),b) \leq \phi(d(x,a)) \quad \forall x \in D$$

então $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = b$

$d(x,a) \to 0 \Rightarrow \phi(d(x,a)) \to 0 \Rightarrow$
$d(f(x),b) \to 0$

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$$

$$|f(x,y) - 0| = |f(x,y)| = \frac{|x^2 y|}{x^2+y^2}$$

$$\le \underbrace{\boxed{\frac{x^2}{x^2+y^2}}}_{\le 1} |y| \le |y| \le \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$$

$$\le d((x,y),(0,0))$$

24-2-2021

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$a \in D'$ $\qquad$ $b \in \mathbb{R}^m$

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \underset{x \in D}{0 < d(x,a) < \delta} \Rightarrow d(f(x), b) < \varepsilon$$

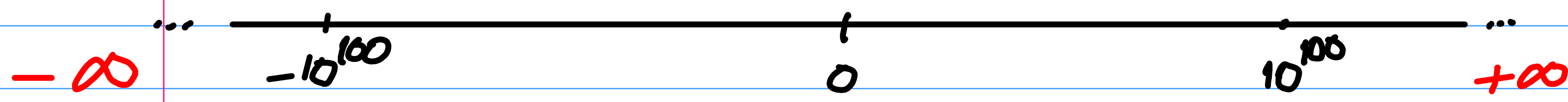
$$\Updownarrow$$

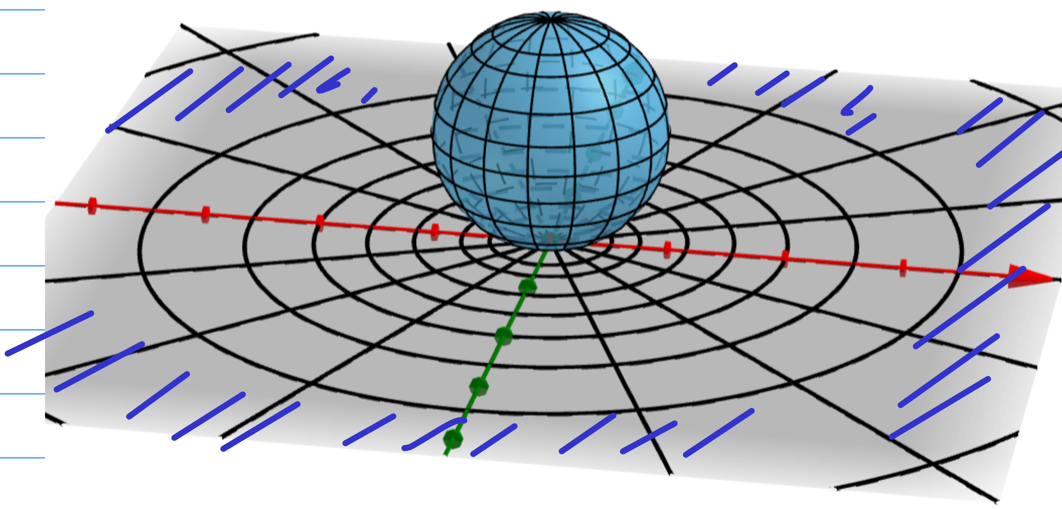
$$d(f(x), b) \leq \phi(d(x,a))$$

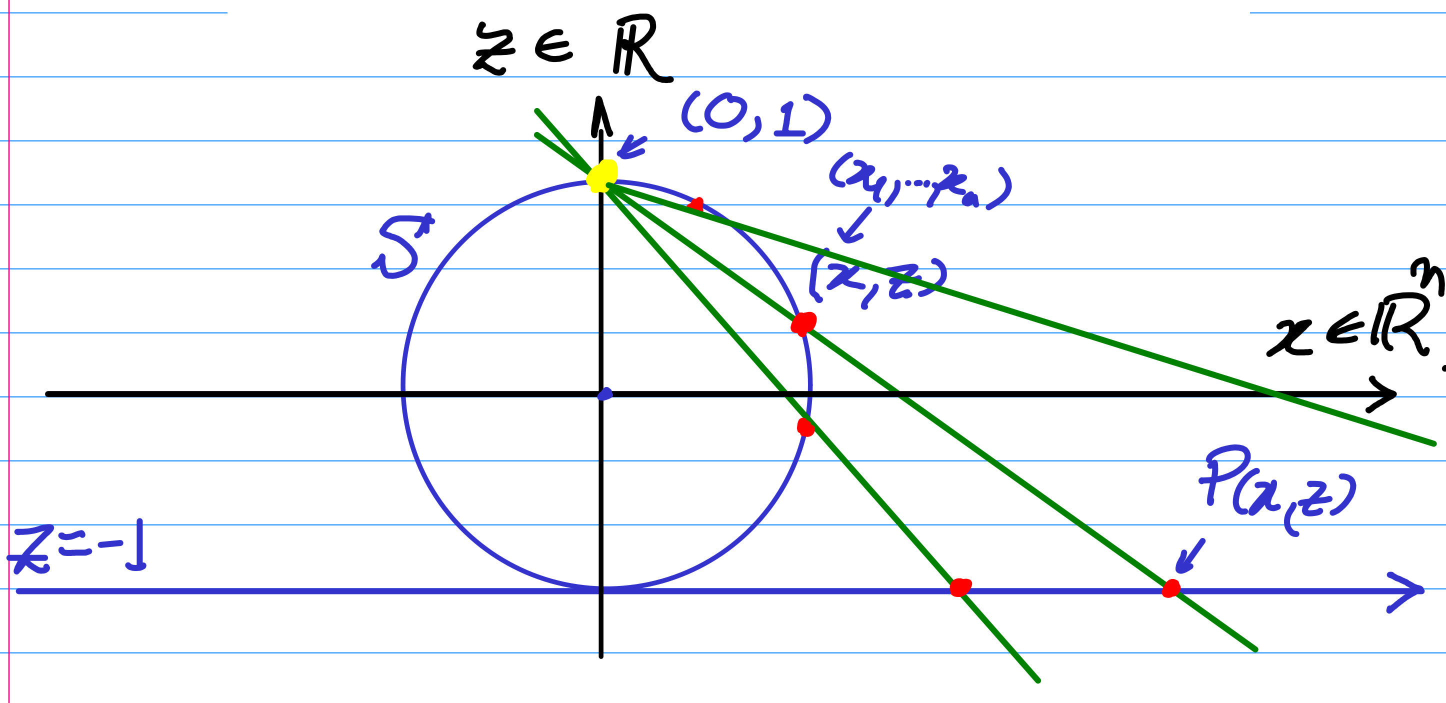
onde $\qquad \lim_{t \to 0} \phi(t) = 0$

PONTO NO INFINITO

A PROJECÇÃO ESTEREOGRÁFICA







$x_1^2 + \cdots + x_n^2 + z^2 = 1$

$$S = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|x\|^2 + z^2 = 1\}$$

$$1 - z^2 = \|x\|^2$$

$$P : S \setminus \{(0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$P(x, z) = \frac{2}{1-z} \cdot x$$

$$\boxed{P(0,1) = \infty}$$

no sentido que

$$\lim_{\substack{(x,z) \to (0,1) \\ (x,z) \in S}} \|P(x,z)\| = +\infty$$

DISTÂNCIA AO INFINITO

$$\text{dist}(x, \infty) = \frac{1}{\|x\|} < r$$

$$B_r(\infty) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > \tfrac{1}{r}\}$$

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se limitado $\iff \exists R > 0 \quad D \subseteq \overline{B}_R(0)$

∞ é um ponto de acumulação de D

$\iff$ D fôr ilimitado

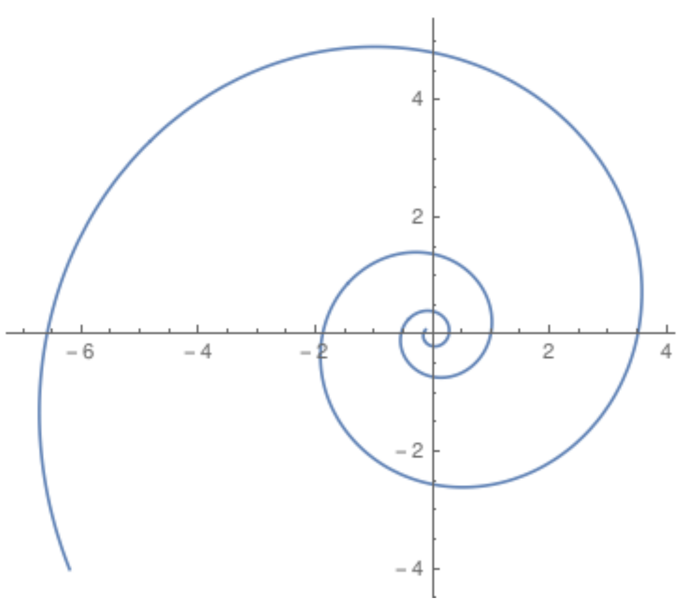
Com a definição anterior podemos dar sentido aos limites

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \iff \lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = b$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \iff \lim_{x \to a} \|f(x)\| = \infty$$

EXEMPLOS

$$\lim_{t \to \infty} (e^t \cos t, e^t \sin t) = \infty$$



$\|(e^t \cos t, e^t \sin t)\|$

$= e^t \underbrace{\|(\cos t, \sin t)\|}_{=1}$

$= e^t \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty$

de facto

$$\|(e^t\cos t, e^t\sin t)\| = e^t \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$$

LIMITES RELATIVOS

$f: D\subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $\qquad$ $A\subseteq D$

A função $f|_A : A\to\mathbb{R}^m$ definida por

$$f|_A(x) = f(x) \quad \forall x\in A$$

diz-se a restrição de f ao subconjunto A

$a\in D'$ $\qquad$ $\lim_{x\to a} f(x) = b$

Se $a\in A'$,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) \underbrace{:=}_{\text{igual por definição}} \lim_{x\to a} f|_A(x)}$$

EXEMPLOS

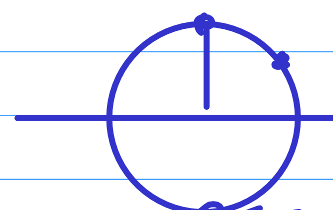
① Se $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $a \in D$ os limites laterais

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$$

são exemplos de limites relativos.

Dom. Natural $\{(x,z)\in\mathbb{R}^{n+1} : z \neq 1\}$

② $$\lim_{\substack{(x,z)\to(0,1)\\ (x,z)\in S}} \frac{2}{1-z}\cdot x = \infty$$



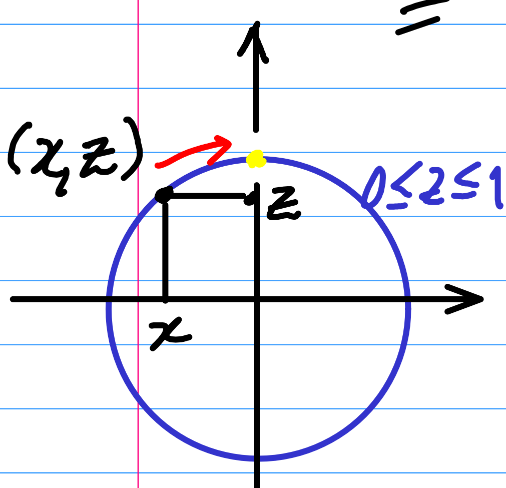
$0<z<1$

$$\|P(x,z)\| = \left\|\frac{2}{1-z}\,x\right\| = \frac{2}{1-z}\|x\| =$$

$\frac{(1+z)}{(1+z)}$ ×

$$= \frac{2(1+z)}{1-z^2}\|x\| = \frac{2(1+z)}{\|x\|^{\cancel{2}}}\cancel{\|x\|}$$

$$\geq \frac{2}{\|x\|} \longrightarrow \infty$$



quando $x \to 0$

"d"$(P(x,z),\infty) \leq \frac{\|x\|}{2} \longrightarrow 0$

CRITÉRIO PARA A NÃO EXISTÊNCIA DE LIMITE

Se $A, B \subseteq D$ com $a \in A' \cap B'$

e apesar de existirem os seguintes limites temos

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x)$$

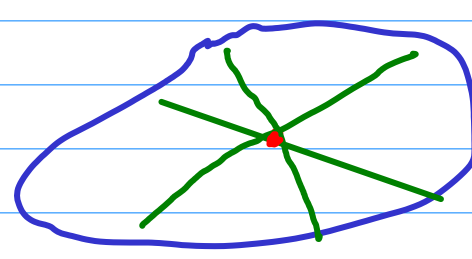
então não existe

$$\lim_{x \to a} f(x).$$

Um limite relativo $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$

diz-se um limite direcional quando

A é uma recta, semi-recta ou segmento de recta e a é um ponto de A ou uma extremidade de A.

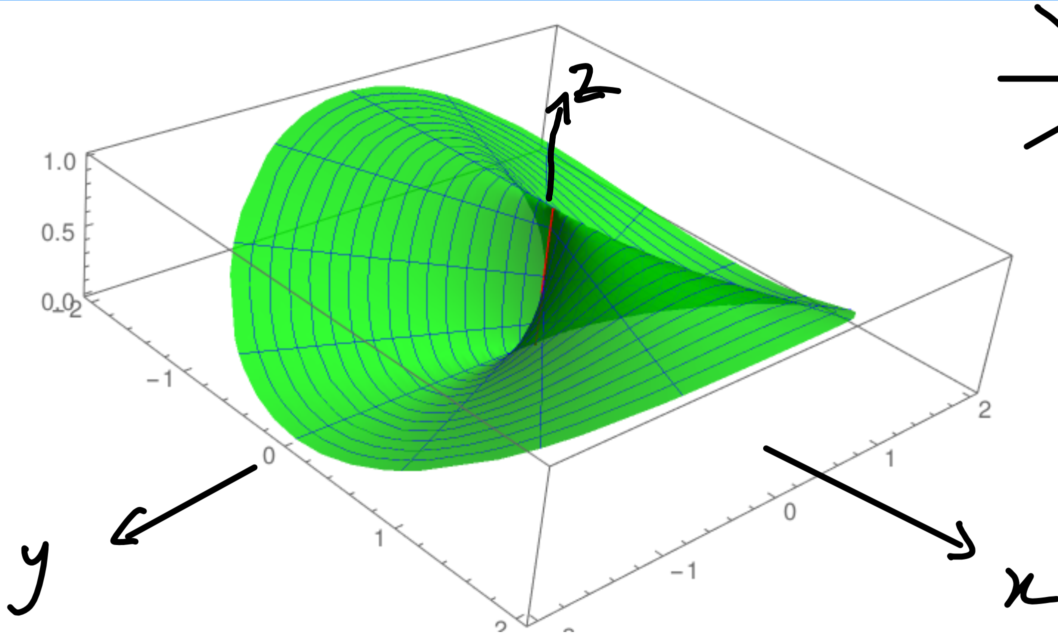


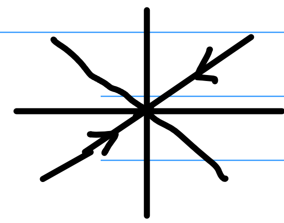
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2} \quad \text{NÃO EXISTE}$$

$A = \{(x,y) : y = mx\}$ recta $(0,0) \in A$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+m^2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = \frac{1}{1+m^2}$$





DEF: $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diz-se limitada se $\exists M > 0$ tal que $\forall x \in D \ \ \|f(x)\| \leq M$.

$$f,g : D \to \mathbb{R}^n$$

Des. Cauchy Schwarz
$|u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|$

PROP

$f(x)$ é limitada e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0$$

$|f(x) \cdot g(x)| \leq \|f(x)\| \|g(x)\|$
$\leq M \underbrace{\|g(x)\|}_{\to 0}$

EXEMPLO

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (1,2) \\ x \neq 2}} (x-1) \underbrace{\cos\left(\frac{y+1}{x-2}\right)}_{\text{limitada}} = 0$$

infinitésimo

$|x-1| \leq d((x,y),(1,2))$

PROPRIEDADES DOS LIMITES

$f,g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad a \in D'$

$$f(x) = (\underline{f_1(x), \ldots, f_m(x)})$$

(a) $\lim_{x \to a} f(x) = \left(\lim_{x \to a} f_1(x), \ldots, \lim_{x \to a} f_m(x)\right)$

(b) $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

(c) $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad a \in D'$$

$$\lambda: D \to \mathbb{R}$$

(d) $$\lim_{x\to a} \lambda(x) f(x) = \lim_{x\to a} \lambda(x) \lim_{x\to a} f(x)$$

(e) $$\lim_{x\to a} \|f(x)\| = \| \lim_{x\to a} f(x) \|$$

(f) $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g: E \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$

$f(x) \in E \quad \forall\, x \in D$

$a \in D'$, $b \in E'$ e $c = g(b)$ quando $b \in E$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = b \\ \displaystyle\lim_{y\to b} g(y) = c \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} g(f(x)) = c$$

$$\left.\begin{array}{l} x\to a \Rightarrow f(x) \to b \\ y \to b \Rightarrow g(y) \to c \end{array}\right\} \Rightarrow \left[x \to a \Rightarrow g(f(x)) \to c \right]$$

(c)

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \qquad \lim_{x\to a} g(x) = c$$

$$|f(x)\cdot g(x) - b\cdot c| \le |f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot c| + |f(x)\cdot c - b\cdot c|$$

$$\le |f(x)\cdot(g(x)-c)| + |(f(x)-b)\cdot c|$$

$$\le \underbrace{\|f(x)\|}_{\le M}\, \|g(x)-c\| + \|f(x)-b\|\,\|c\|$$

$$\le M\cdot\underbrace{\|g(x)-c\|}_{\to 0} + \|c\|\,\underbrace{\|g(x)-c\|}_{\to 0}$$

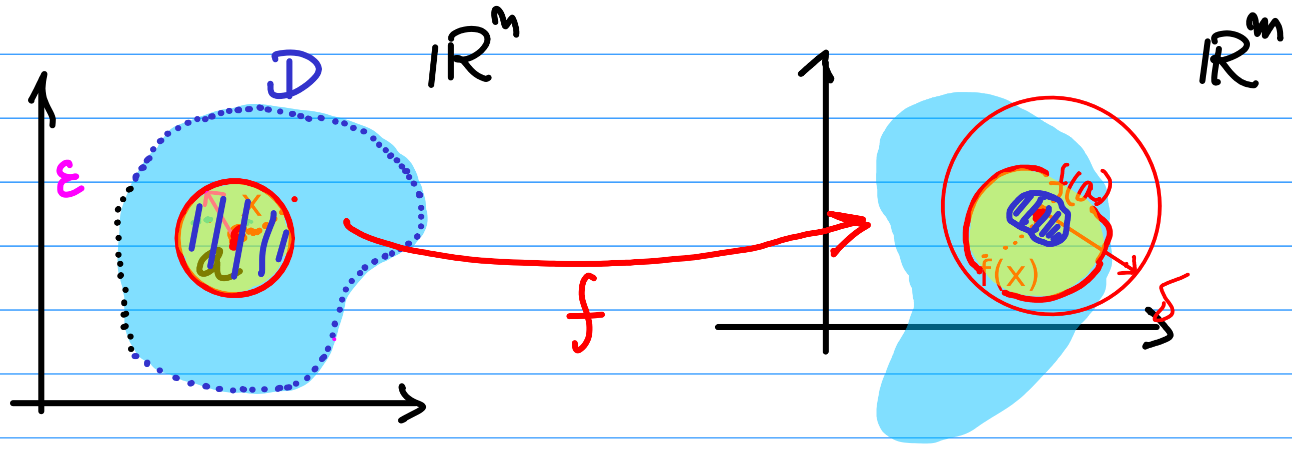
quando $x \to a$

CONTINUIDADE

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

DEF. f diz-se <u>contínua</u> em a se

$\forall \delta > 0 \ \exists \varepsilon > 0 \quad x \in D, \quad d(x,a) < \varepsilon \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \delta$



Além disso, f diz-se <u>contínua</u> em D se fôr contínua em todos os pontos $a \in D$

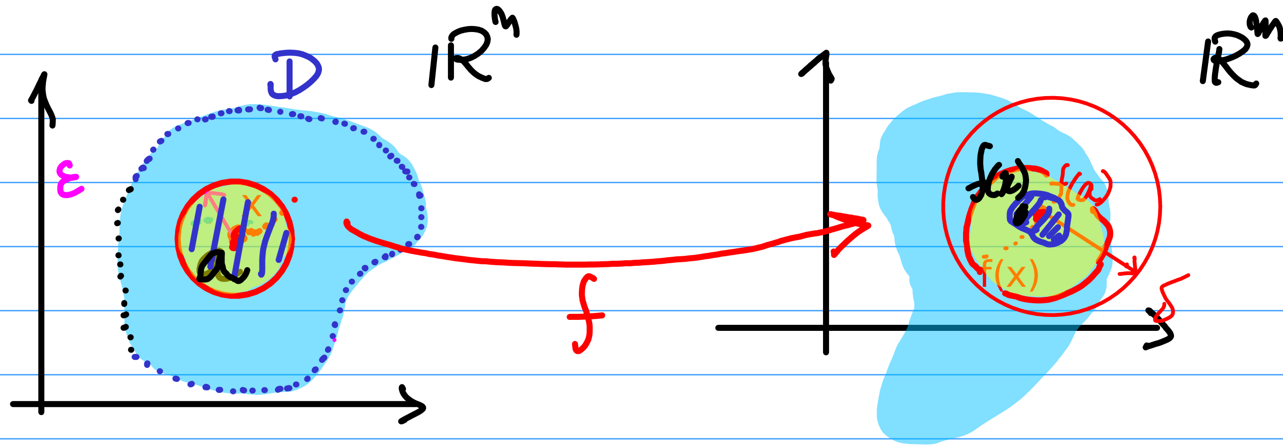
26-2-2021

CONTINUIDADE

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

DEF. f diz-se contínua em $a \in D$ se

$\forall \delta > 0 \ \exists \varepsilon > 0 \ \ x \in D, \ d(x,a) < \varepsilon \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \delta$



Além disso, f diz-se contínua em D se for contínua em todos os pontos $a \in D$

PROP. Se a é um ponto isolado de D então f é contínua em a.

Se a for um ponto de acumulação de f, f é contínua em $a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Uma função $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diz-se Lipschitz (ou Lipschitziana) se

$$\exists M > 0 \quad \forall x, y \in D \quad \|f(x) - f(y)\| \leq M \|x - y\|$$

<u>PROP</u> Toda a função Lipschitziana é contínua no seu domínio.

$$\underbrace{\|f(x) - f(a)\|}_{\to 0} \leq M \underbrace{\|x - a\|}_{\to 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \quad \forall a \in D$$

PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES CONTÍNUAS

$f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\qquad \lambda : D \to \mathbb{R}$

$h : E \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ $\qquad a \in D$

(1) Se $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$

f é contínua em $a \iff f_i$ é contínua em a $\forall\, i = 1, \dots, m$

(2) Se f, g, λ são contínuas em a
então $f+g$, $f \cdot g$ e λf são contínuas em a.

(3) Se além disso $\lambda(x) \neq 0$ $\forall\, x \in D$
então $\frac{1}{\lambda} f$ é contínua em a.

(4) Se h é contínua em $b \in E$
e f é contínua em $a = h(b)$
então $f \circ h$ é contínua em b.

$h(E) \subseteq D$

EXEMPLOS DE FUNÇÕES CONTÍNUAS

$$S(x) = \begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$$

$$\frac{S(x)\cos x}{x}$$

não é contínua

As propriedades anteriores mostram que toda a função dada por uma expressão explícita envolvendo as operações aritméticas, e as funções exponencial, logarítmo, trignométricas e as respectivas inversas, é sempre contínua no seu domínio natural.

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y) = \left(\frac{1-y}{1+x}, \log(1-xy) \right)$$

é contínua em

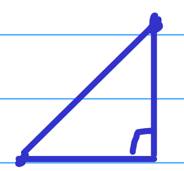
$$D = \{ (x,y) : x \neq -1, \ 1-xy > 0 \}$$

① $P_1, P_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad P_1(x,y) = x$ e $P_2(x,y) = y$ são contínuas

$$|P_1(x,y) - P_1(a,b)| = |x-a|$$

$$\leq \|(x-a, y-b)\|$$

$$= \|(x,y) - (a,b)\|$$



$$|p_2(x,y) - p_2(a,b)| = |y-b|$$
$$\leq \|(x-a, y-b)\|$$
$$= \|(x,y) - (a,b)\|$$

② Logo as funções

$f_1(x,y) = \underline{1-y}$, $f_2(x,y) = \underline{x+1}$,

$f_3(x,y) = \underline{xy}$, $f_4(x,y) = \underline{1-xy}$

são contínuas em $\mathbb{R}^2$

③ Logo $f_5(x,y) = \dfrac{1-y}{x+1} = \dfrac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$

é contínua em D.

e $f_6(x,y) = \log(1-xy)$
$$= \underline{\log} \circ f_4(x,y)$$
é contínua em D.

④ Segue que $f(x,y) = (f_5(x,y), f_6(x,y))$

é contínua em D.

PROLONGAMENTO POR CONTINUIDADE

DEFINIÇÃO

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in D'$ e $a \notin D$. Se existir $\lim_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}^m$ podemos definir uma nova função $\tilde{f} : D \cup \{a\} \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in D \\ \lim_{x \to a} f(x), & \text{se } x = a. \end{cases}$$

A função $\tilde{f}$ assim construída é contínua em a. Diz-se, por isso, prolongamento por continuidade de f ao ponto a.

PROP. Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ contínua em D

$\tilde{f} : D \cup \{a\} \to \mathbb{R}^m$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in D \\ b & \text{se } x = a \end{cases}$$

onde $a \notin D$, $a \in D'$

Se $b = \lim_{x \to a} f(x)$

então $\tilde{f}$ é contínua em $D \cup \{a\}$.

EXEMPLO

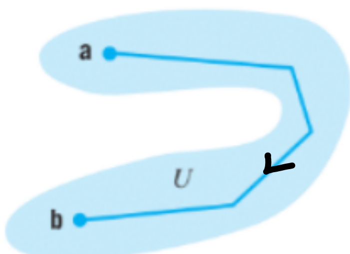
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}^2$.

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0$$

DEF. Um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se **Conexo por arcos** se $\forall x, y \in D$ $\exists$ linha parametrizada $\gamma : [a, b] \to D$ contínua tal que $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$



Conexo por arcos

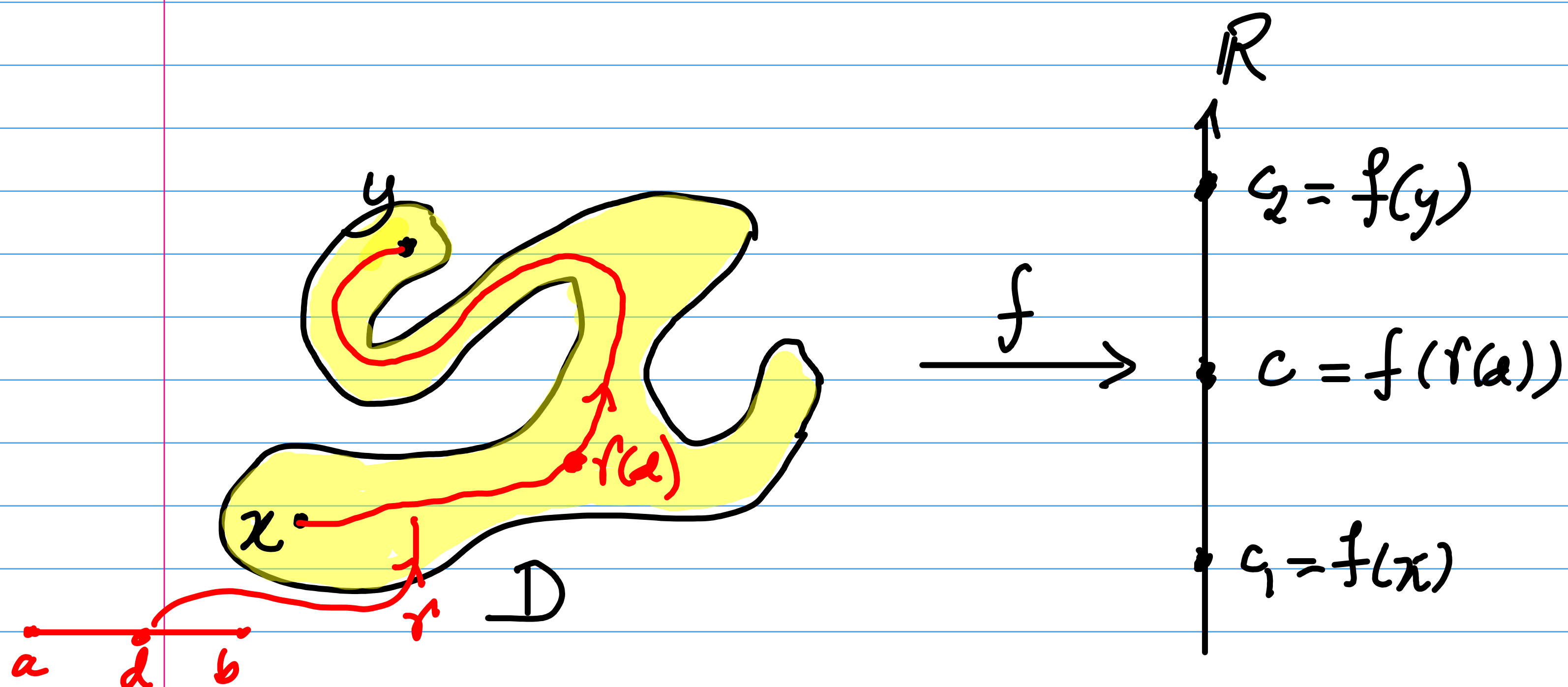
desconexo

TEOREMA DE BOLZANO

Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ for contínua em D e D fôr conexo por arcos então $f(D)$ é um intervalo.

$f(D)$ é um intervalo $\Longleftrightarrow$

$\forall\, c_1 < c < c_2,\ c_1, c_2 \in f(D) \Rightarrow c \in f(D)$



$\gamma : [a,b] \to D$ contínua

$\gamma(a) = x$

$\gamma(b) = y$

$g = f \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua

$g(a) = f(\gamma(a)) = f(x) = c_1$

$g(b) = f(\gamma(b)) = f(y) = c_2$

$c_1 < c < c_2$

Logo pelo T. Bolzano em $\mathbb{R}$

$\exists\ d \in [a,b]$ $\quad g(d) = c$.

$\Rightarrow f(\gamma(d)) = c \qquad z = \gamma(d)$

DERIVADAS PARCIAIS

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $\qquad a \in D$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in D$

variável livre

$$g(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = g'(a_i) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{g(x_i) - g(a_i)}{x_i - a_i}$$

$a = (a_1, \dots, a_n)$

Este limite diz-se a derivada parcial de f no ponto $x = a$

EXEMPLOS

1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 + 2xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x,2) - f(1,2)}{x-1}$$

$$\frac{d}{dx}\Big[f(x,2)\Big]_{x=1} \qquad = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x-1} \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x+4}{1} = 6$$

OPERAÇÃO DE DERIVAÇÃO EM ORDEM A x

$$= \frac{d}{dx}\Big[\underline{x^2 + 2xy}\Big]_{(x,y)=(1,2)}$$

$$= \Big[2x + 2y\Big]_{(x,y)=(1,2)}$$

$$= 6$$

$f(x,y) = x^2 + 2xy$

2) $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \lim_{y \to 2} \frac{f(1,y) - f(1,2)}{y-2}$ $\qquad \frac{d}{dy}[f(1,y)]_{y=2}$

$= \lim_{y \to 2} \frac{1+2y-5}{y-2}$

$= \lim_{y \to 2} \frac{2y-4}{y-2} = 2$

$= \frac{d}{dy}\left[x^2 + 2xy\right]_{(x,y)=(1,2)}$

$= \left[2x\right]_{(x,y)=(1,2)} = 2$

DERIVADAS PARCIAIS COMO FUNÇÕES

Se a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existir em todo o ponto $a \in D$ determina uma função $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$D \ni a \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in \mathbb{R}^n$$

NO EXEMPLO $f(x,y) = x^2 + 2xy$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx}\left[x^2 + 2xy\right] = 2x + 2y$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}\left[x^2 + 2xy\right] = 0 + 2x$
  $= 2x$

SÃO AS FUNÇÕES DERIVADAS PARCIAIS.

EXEMPLO

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y^2(x^2+y^2) - 2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{2xy(x^2+y^2) - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}\right\} \text{se } (x,y) \neq (0,0)$$

Em $(x,y) = (0,0)$

$$\left.\frac{d}{dx}\left[\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{f(x,0)}\right]\right|_{x=0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{f(x,0)} - \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{f(0,0)}}{x-0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{f(0,y)} - \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{f(0,0)}}{y-0} = 0$$

2-03-2021

DERIVADAS PARCIAIS

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, D aberto

$x = (x_1, \dots, x_n) \in D$

$a = (a_1, \dots, a_n) \in D$

DERIVADA PARCIAL EM ORDEM A x_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_{x_i}(a)$$
$$= \frac{d}{dx_i}\left[f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \right]_{x_i = a_i}$$

A FUNÇÃO DERIVADA PARICAL EM ORDEM A x_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = f_{x_i}(x) = \frac{d}{dx_i}\left[f(x_1, \dots, x_n) \right]$$

DERIVAÇÃO COMPONENTE A COMPONENTE

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a) \right)$$

EXEMPLO

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f(u,v) = \left(u, v, uv - \frac{v^2}{4}\right)$

$f_u = \frac{\partial f}{\partial u} = (1, 0, v)$

$f_v = \frac{\partial f}{\partial v} = \left(0, 1, u - \frac{v}{2}\right)$

$h: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

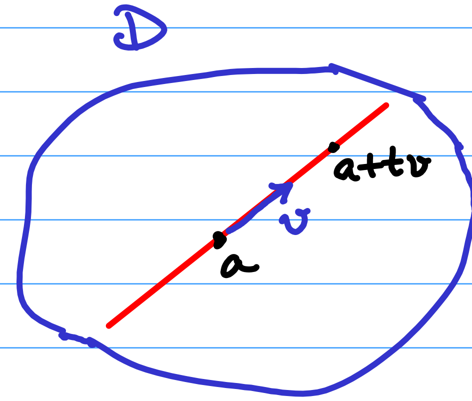
$h(x,y,z) = \left(e^{x+y-z}, \log(1+x^2)\right)$

$h_x = \left(e^{x+y-z}, \frac{2x}{1+x^2}\right)$

$h_y = \left(e^{x+y-z}, 0\right)$

$h_z = \left(-e^{x+y-z}, 0\right)$

DERIVADAS DIRECCIONAIS



$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\underbrace{a \in D}_{\text{ponto}}, \quad \underbrace{v \in \mathbb{R}^n}_{\text{vector}}$$

$$f'_v(a) = \frac{d}{dt}\Big[f(\underline{a+tv})\Big]_{t=0}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

diz-se a <u>derivada direccional de f no ponto $a \in D$</u> <u>segundo o vector v</u>.

EXEMPLO

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(u,v) = \left(u,\ v,\ uv - \frac{v^2}{4}\right)$$

$$f'_{\underbrace{(1,2)}_{\text{vector}}}\underset{\uparrow\ \text{ponto}}{(0,1)} = \frac{d}{dt}\Big[f\big((0,1) + t(1,2)\big)\Big]_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big[f(\underbrace{t}_{u}, \underbrace{1+2t}_{v})\Big]_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\left(\underbrace{t}_{u},\ \underbrace{1+2t}_{v},\ \underbrace{t(1+2t)}_{uv} - \overbrace{\frac{(1+2t)^2}{4}}^{v^2/4}\right)\right]_{t=0}$$

$$= \left[\left(1,\ 2,\ 1+4t-(1+2t)\right]_{t=0}$$

$$= (1, 2, 0)$$

$$h: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$h(x,y,z) = \left(e^{x+y-z},\ \log(1+x^2)\right)$$

$$h'_{\underbrace{(1,2,3)}_{\text{vector}}}\underbrace{(1,0,0)}_{\text{ponto}}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[h\left((1,0,0)+t(1,2,3)\right)\right]_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[h(1+t, 2t, 3t)\right]_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\left(e^{1+3t-3t},\ \log(1+(1+t)^2)\right)\right]_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\left(e,\ \log(2+2t+t^2)\right)\right]_{t=0}$$

$$= \left[\left(0,\ \frac{2+2t}{2+2t+t^2}\right)\right]_{t=0}$$

$$= (0, 1)$$

DERIVADAS PARCIAIS E DIRECCIONAIS

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad a \in D$

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,\dots,0) \\ e_2 &= (0,1,0,\dots,0) \\ e_3 &= (0,0,1,\dots,0) \\ &\dots \\ e_n &= (0,0,0,\dots,1) \end{aligned}\right\} \text{vetores da base canónica de } \mathbb{R}^n$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{e_i}(a)}$$

$x_i = a_i + t$

$\frac{dx_i}{dt} = 1$

$$f(\underline{a + t e_i}) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \downarrow \qquad\qquad \downarrow \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}$

$f'_{e_i}(a) \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

EXEMPLO $\quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{d}{dx}\left[f(x,2) \right]_{x=1}$$

$$f'_{(1,0)}(1,2) = \frac{d}{dt}\left[f\big((1,2)+t(1,0)\big) \right]_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[f(1+t,\, 2) \right]_{t=0}$$

$x = 1+t$

$\frac{dx}{dt} = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{d}{dy}\left[f(1,y) \right]_{y=2}$$

$$f'_{(0,1)}(1,2) = \frac{d}{dt}\left[f\big((1,2)+t(0,1)\big) \right]_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[f(1,\, 2+t) \right]_{t=0}$$

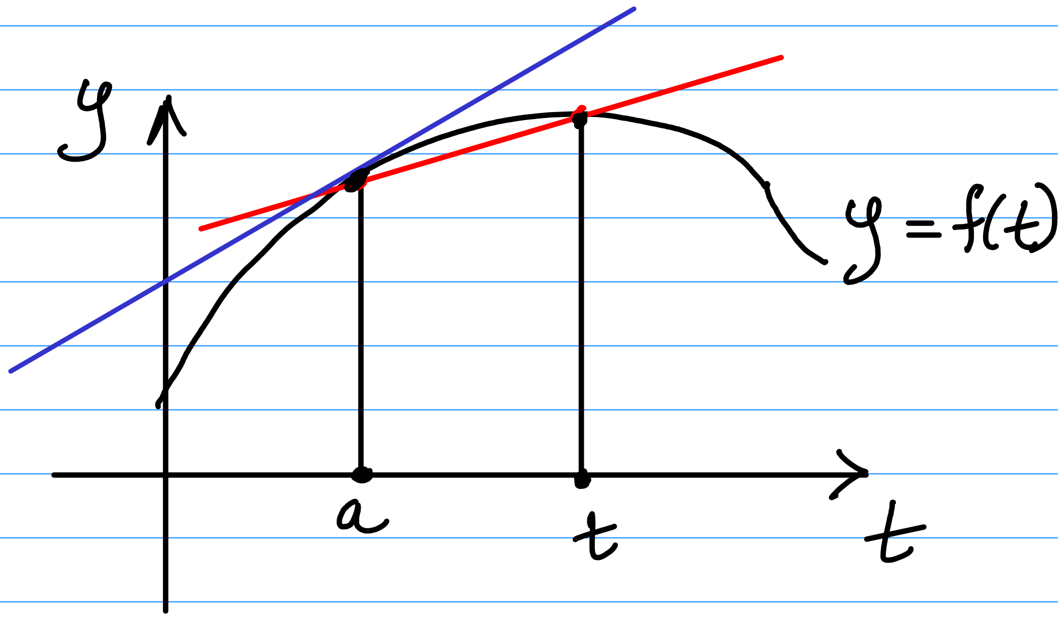
$y = 2+t$

$\frac{dy}{dt} = 1$

DERIVADAS

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad y = f(t)$

$$f'(a) = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$



SIGNIFICADOS

GEOMÉTRICO: Declive da tangente ao gráfico de f em $t = a$

FÍSICO: velocidade no instante $t = a$

Taxa de variação de y em relação a t em $t = a$

NOTAÇÃO

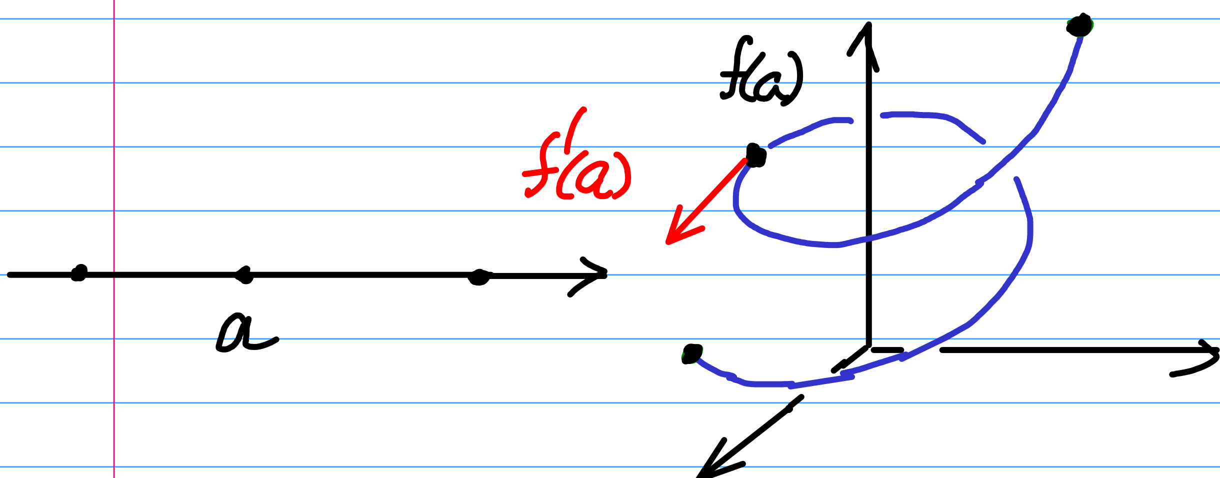
LEIBNITZ

$$f'(a) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=a}$$

LINHAS PARAMETRIZADAS

$f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\qquad (x_1, \dots, x_n) = f(t)$

$$f'(a) = \lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$ VECTOR / ESCALAR



SIGNIFICADOS

GEOMÉTRICO : vector tangente à curva $C = f(I)$ no ponto $f(a)$.

FÍSICO: velocidade vectorial no instante $t=a$

Taxa de variação vectorial da grandeza vectorial $(x_1, \dots, x_n)$ em relação a t em $t=a$

NOTAÇÃO $f'(a) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=a}$

onde

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\boxed{z = f(x, y)} \qquad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

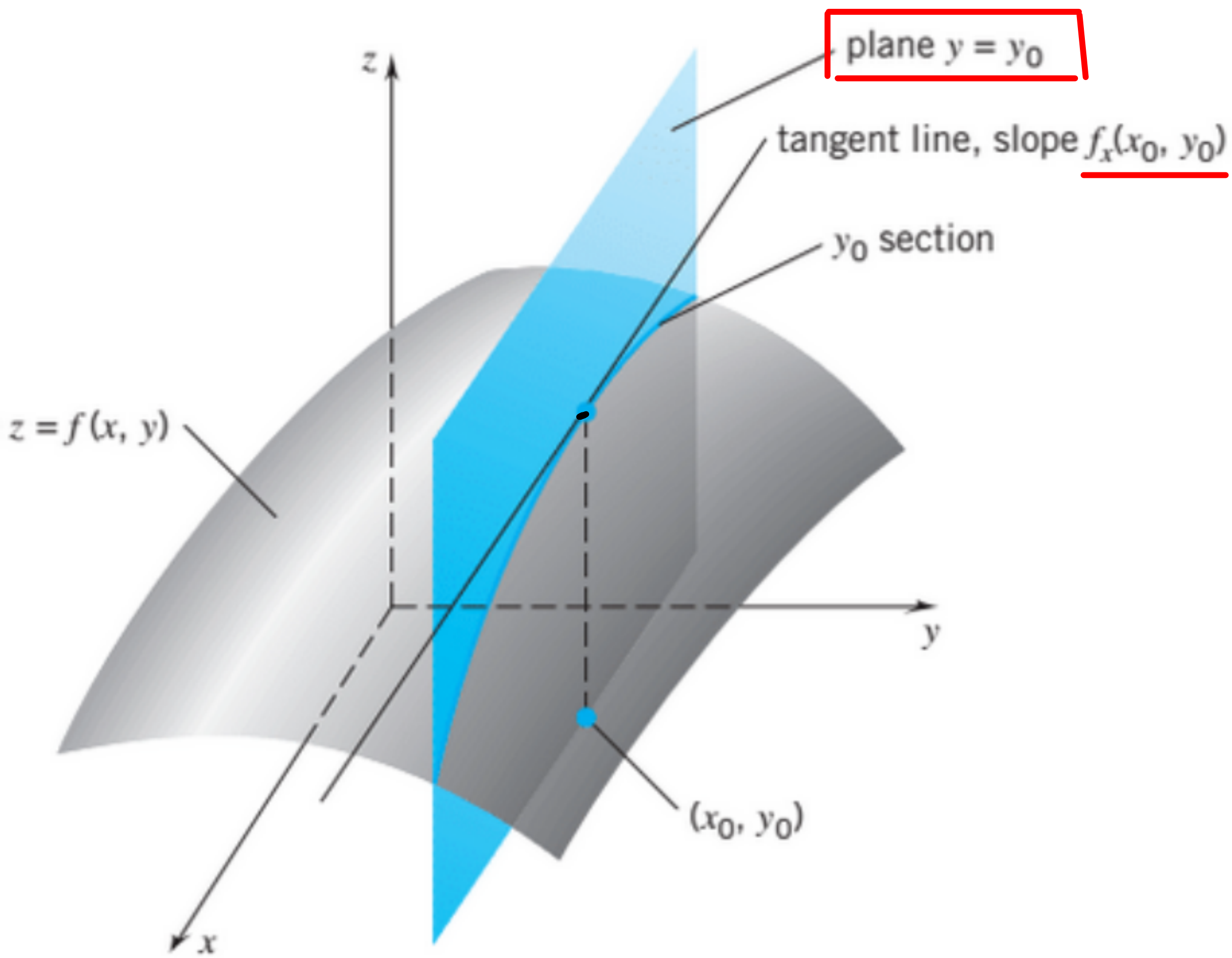
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}\right\} \text{ taxas de variação marginais}$$

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad a = (x_0, y_0)$

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO da DER. PARCIAL

$$f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

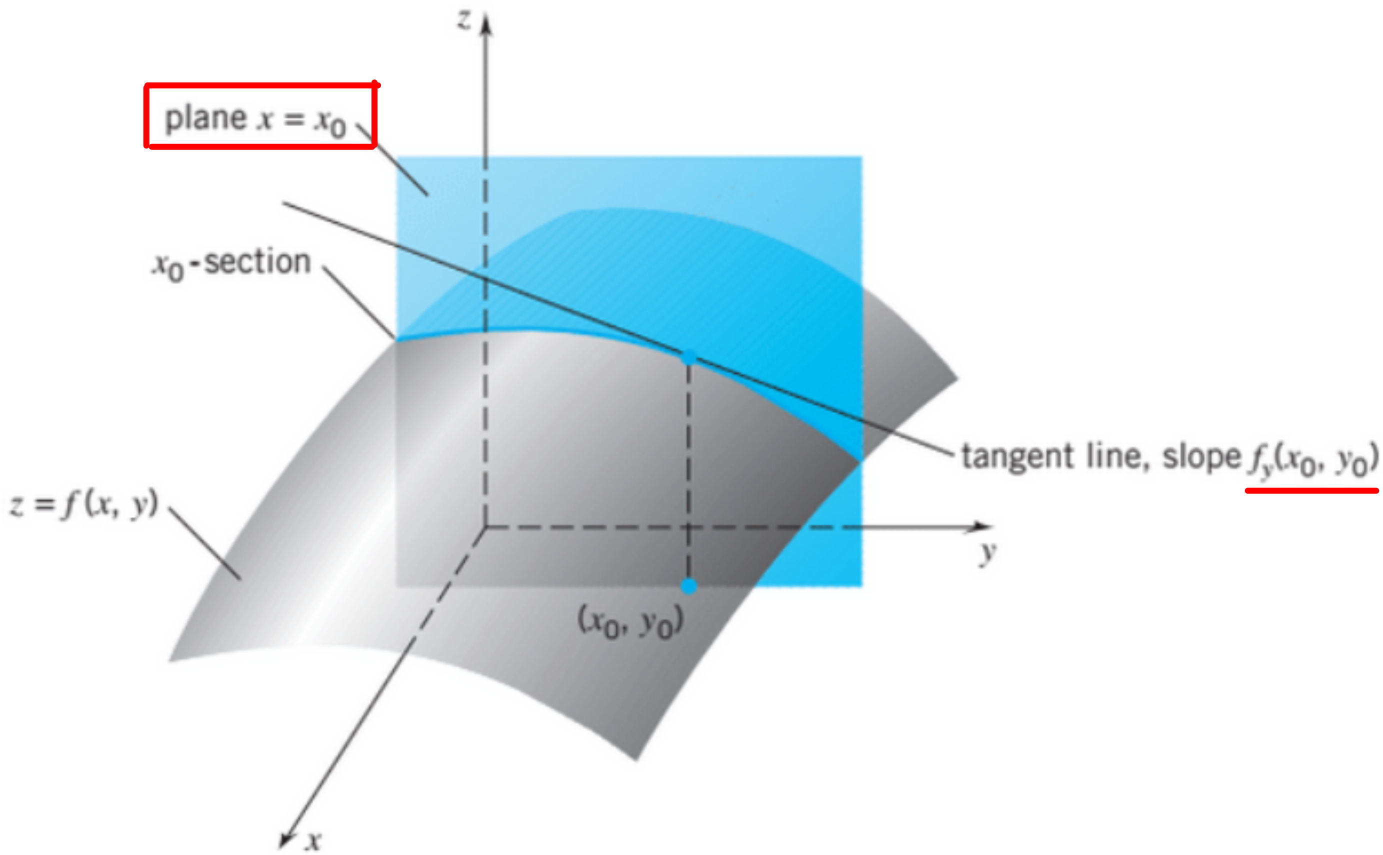
declive da tangente ao gráfico de f no ponto (x_0,y_0) na direcção do eixo dos xx.



SIGNIFICADO GEOMÉTRICO da DER. PARCIAL

$$f_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

declive da tangente ao gráfico de f no ponto (x_0,y_0) na direcção do eixo dos yy.

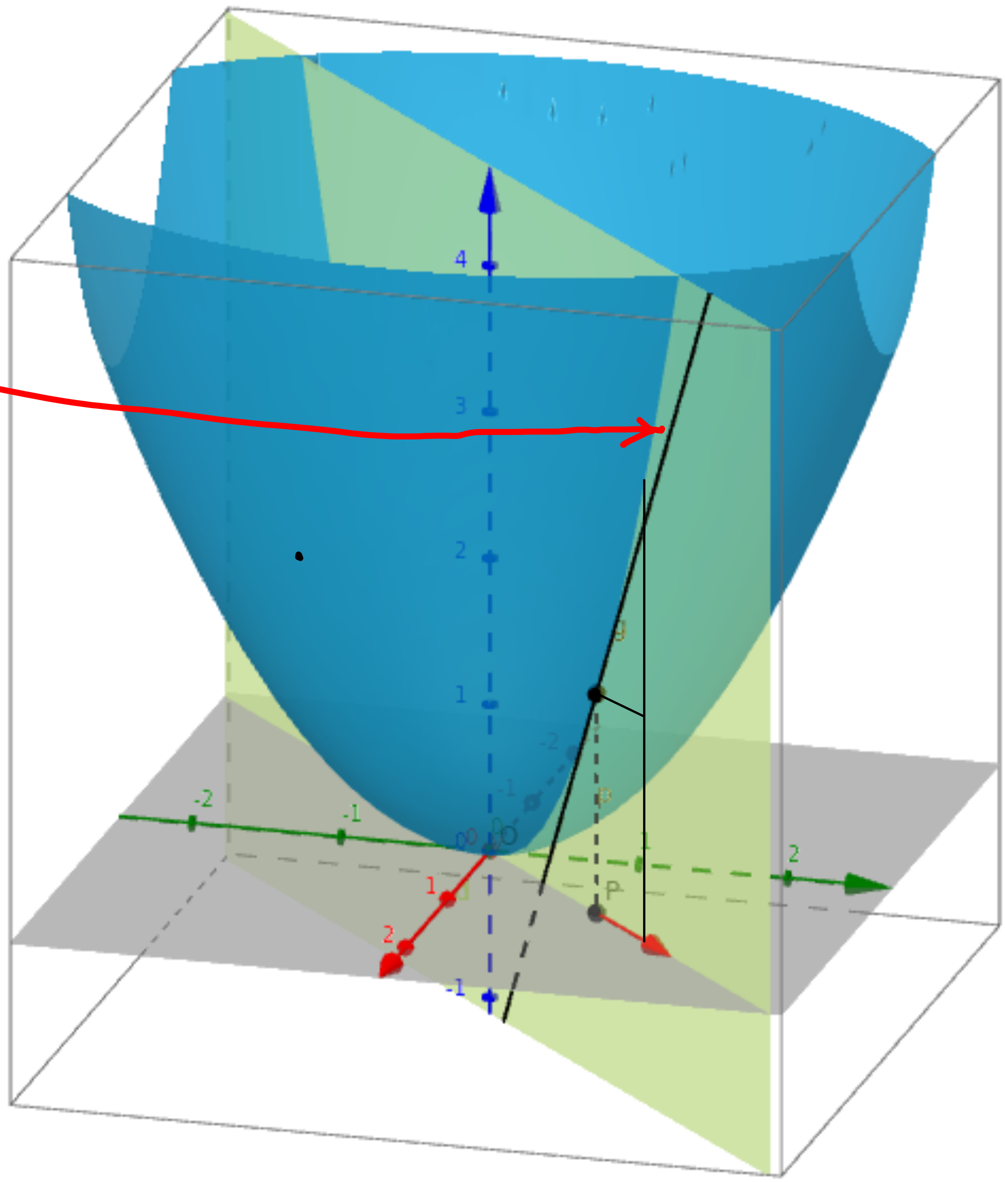


SIGNIFICADO GEOMÉTRICO da DER. DIRECCIONAL

$f'_v(x_0, y_0)$ quando $v \in \mathbb{R}^2$

$\|v\| = 1$.

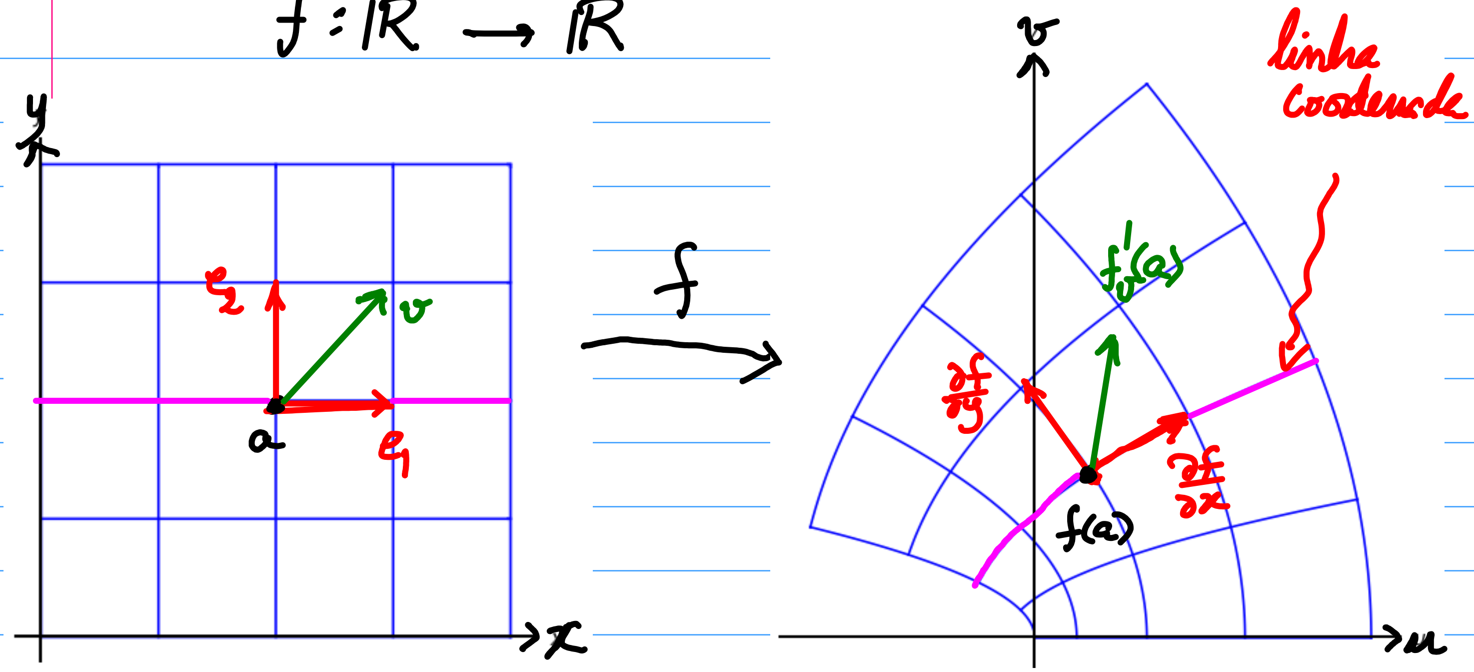
$$\boxed{f'_v(a) = \underbrace{\lim_{t \to 0^+} \frac{f(a+tv) - f(a)}{\|tv\|}}_{\text{declive da tangente ao gráfico}} \cdot \|v\|}$$



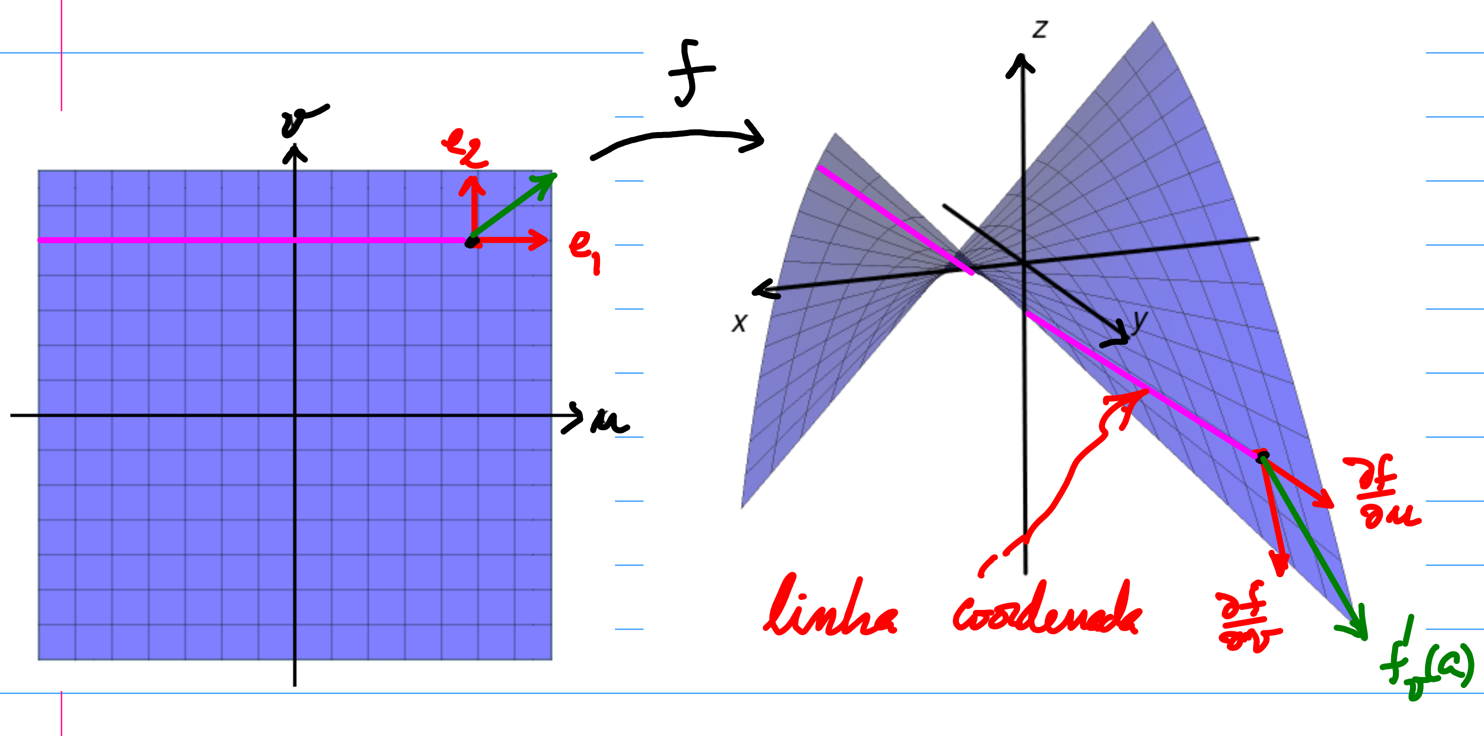
Se o vector v tiver norma 1, $f'_v(a)$ representa o declive da recta tangente à intersecção do gráfico de f com o plano vertical que passa no ponto (a,f(a)) e é paralelo ao vector v

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DAS DERIVADAS PARCIAIS E DIRECCIONAIS COMO VECTORES TANGENTES ÀS CURVAS COORDENADAS

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

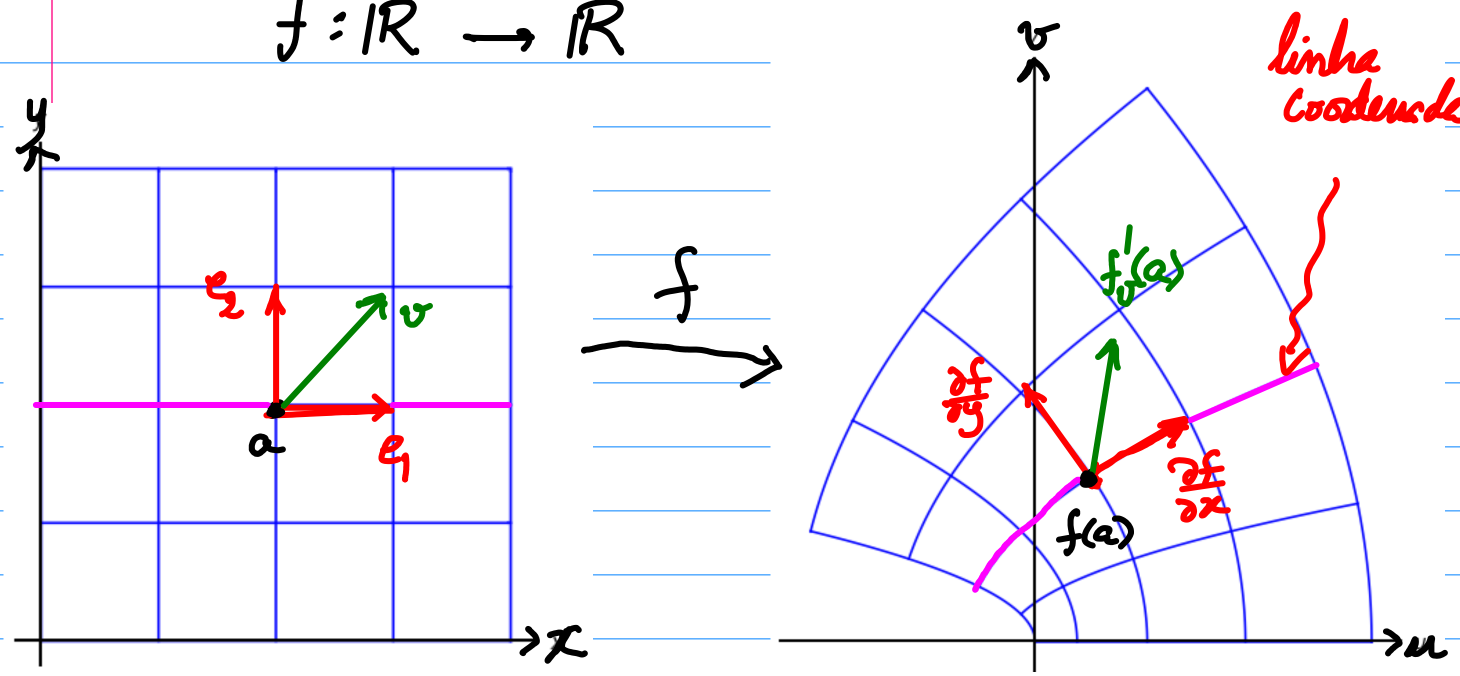


$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

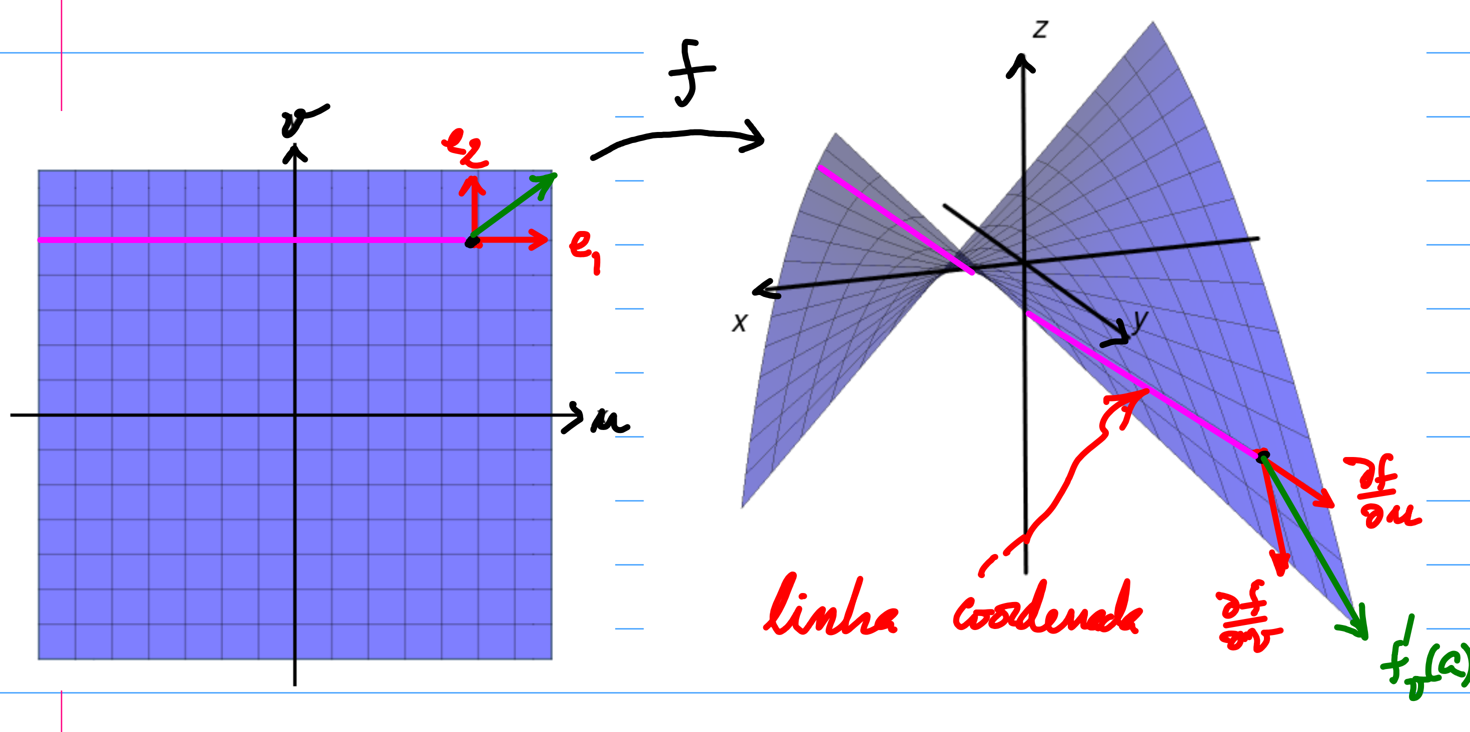


SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DAS DERIVADAS PARCIAIS E DIRECCIONAIS COMO VECTORES TANGENTES ÀS CURVAS COORDENADAS

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$



3-3-2021

DERIVADAS PARCIAIS DE ORDEM SUPERIOR

1ª ORDEM

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y) \qquad (x,y) \in D$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dx}[f(x,y)]$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d}{dy}[f(x,y)]$$

2ª ORDEM

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}[f(x,y)]\right]$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dy}[f(x,y)]\right]$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{d}{dy}\left[\frac{d}{dx}[f(x,y)]\right]$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{d}{dy}\left[\frac{d}{dy}[f(x,y)]\right]$$

3ª ORDEM

$$f_{yxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dy}[f(x,y)]\right]\right]$$

ETC

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), \dots, f_m(x,y))$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}(x,y), \dots, \frac{\partial^2 f_m}{\partial x \partial y}(x,y) \right)$$

Analogamente para as outras derivadas parciais.

EXEMPLOS

$$f(x,y) = 3y^3 + 2xy^2 - x$$

$$f_x = 2y^2 - 1$$

$$f_y = 9y^2 + 4xy$$

$$f_{xx} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} f_{yx} &= \frac{d}{x}[9y^2 + 4xy] = 4y \\ f_{xy} &= \frac{d}{dy}[2y^2 - 1] = 4y \end{aligned}\right\} =$$

$$f_{yy} = 18y + 4x$$

$$f(x,y) = \cos y + e^{xy}$$

$$f_x = e^{xy}\, y$$

$$f_y = -\sin y + e^{xy}\, x$$

$$f_{xx} = e^{xy}\, y^2$$

$$f_{yx} = \frac{d}{dx}\left[-\sin y + e^{xy} x\right] =$$

$$= e^{xy}\, xy + e^{xy} = e^{xy}(xy+1)$$

$$f_{xy} = \frac{d}{dy}\left[\, e^{xy}\, y\,\right] = e^{xy} xy + e^{xy}$$

$$= e^{xy}\,(xy+1)$$

$$f_{yy} = -\cos y + e^{xy} \cdot x^2$$

Nos exemplos anteriores

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}$$

Isto é válido para todas as funções contínuas cujas derivadas parciais de primeira e de segunda ordens sejam também contínuas: as chamadas funções de classe C^2.

FUNÇÕES DE CLASSE C^k $(k \in \mathbb{N})$

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto.

f diz-se de classe C^k se for contínua e as suas derivadas parciais até à ordem k forem funções contínuas em D.

f diz-se de classe C^∞ se for de classe C^k $\forall k \geq 0$

Todas as funçoes obtidas à custa das operações aritméticas a partir de funções de classe C^∞ são também de classe C^∞.

As funções exponencial, logarítmo, e as funções trignométricas, sin, cos, tg, arctg são todas de classe C^∞ no seu domínio natural.

Para todo o numero real $p \neq 0$ a função potência $f(x) := x^p = \exp(p \log(x))$ é de classe C^∞ no interior $]0,+\infty[$ do seu domínio natural.

As funções arcsin e arccos são diferenciáveis no interior $]-1,1[$ do seu domínio natural.

TEOREMA DE SCHWARZ

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ classe C^2, D aberto em $\mathbb{R}^n$

$\Longrightarrow$ $\forall x \in D$ $\forall 1 \leq i, j \leq n$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) .$$

COROLÁRIO

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ classe C^k, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto

$(j_1, \ldots, j_k)$ permutação dos índices $(i_1, \ldots, i_k)$ no conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$

$\Longrightarrow$

$\forall x \in D$, $$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_k}}(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x) .$$

f classe $C^3 \overset{?}{\Longrightarrow} f_{xxy} = f_{yxx}$.

f classe $C^2 \longrightarrow f_{xy} = f_{yx}$ classe C^1

$\Big\downarrow \frac{d}{dx}$

$f_{xyx} = f_{yxx}$

f_x classe $C^2 \Longrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(f_x) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(f_x)$

$\Big\downarrow$

$f_{xxy} = f_{xyx}$

$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$

NOTAÇÃO DE LANDAU

$f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) > 0 \ \forall x \in D$

$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to a)$

$f(x)$ diz-se um o-pequeno de $g(x)$ quando $x \to a$

se $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

DIFERENCIABILIDADE

$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $a \in D$

$\Longleftrightarrow$

Existe $\displaystyle f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$\Longleftrightarrow$

$f(x) = \boxed{f(a) + f'(a)(x-a)} + o(|x-a|) \quad (x \to a)$

$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = o(|x-a|)$

$\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = 0$

NOTAÇÃO DE LANDAU

$$f(x) = 1 + x + \underbrace{x^2 - x^3 \cos x}$$
$$= 1 + x + o(x) \qquad (x \to 0)$$

$$x^2 - x^3 \cos x = o(x) \qquad (x \to 0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x^3 \cos x}{x} = 0$$

DIFERENCIABILIDADE

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $a \in D$

f diz-se diferenciável no ponto $a \in D$

$\exists$ $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplicação linear tal que

$$f(x) = \boxed{f(a) + L(x-a)} + o(\|x-a\|) \quad (x \to a)$$

aplicação afim

- O que significa a diferenciabilidade num ponto ?

- Como se determina a aplicação linear L ?

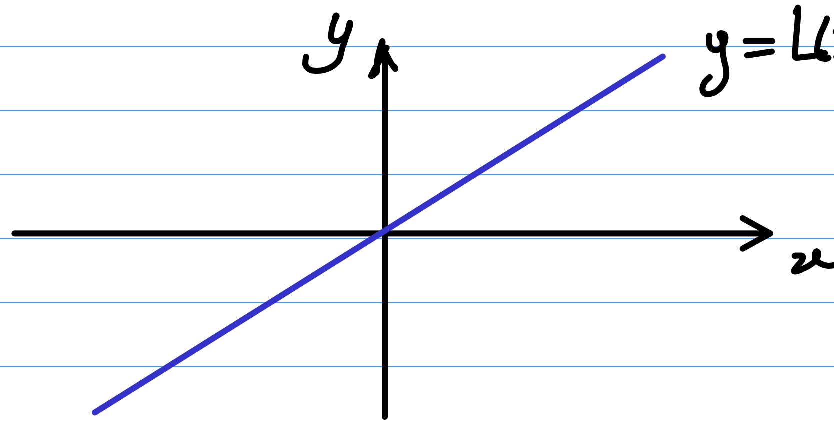
- Como se verifica que f é diferenciável no ponto a

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DUMA APLICAÇÃO LINEAR

$L: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y = L(x) = mx$

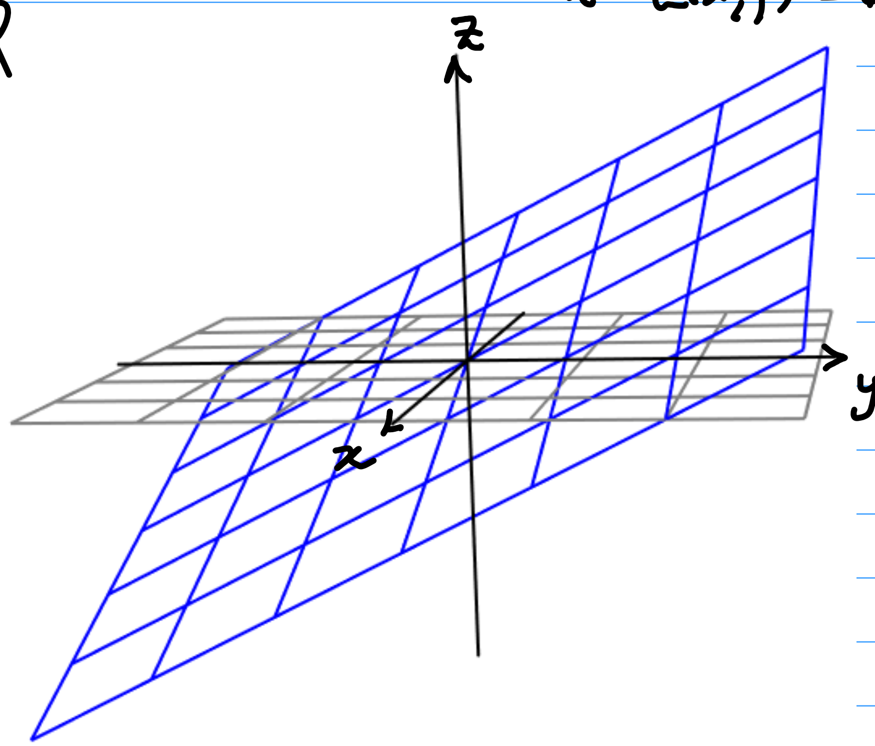
GRÁFICO



$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

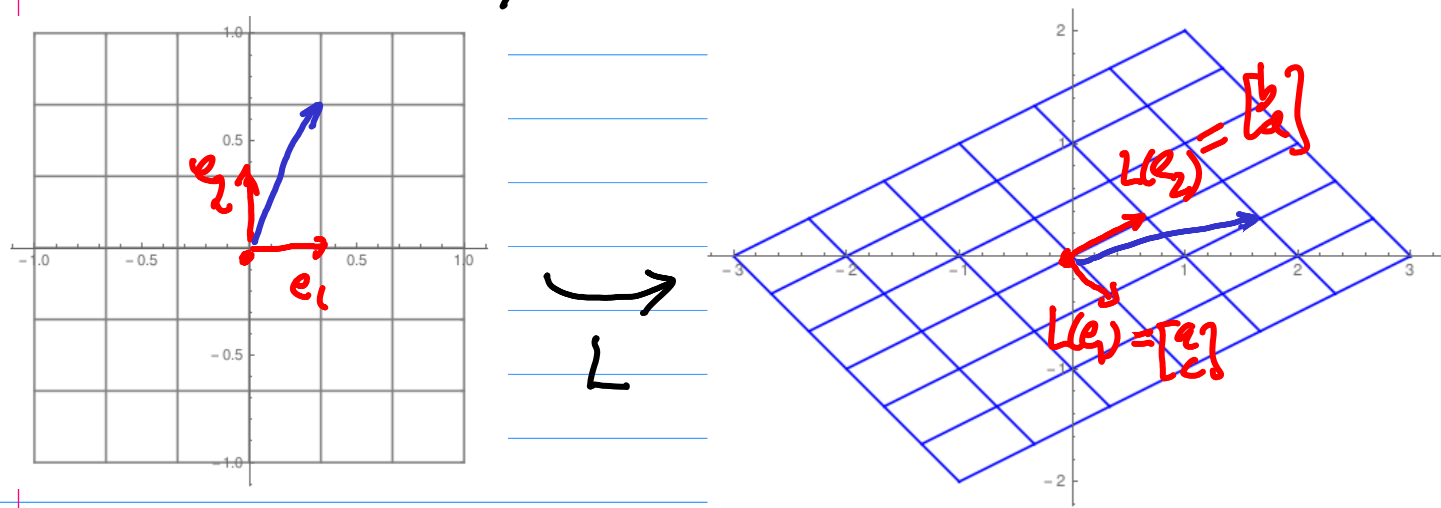
$z = L(x,y) = ax + by$

GRÁFICO



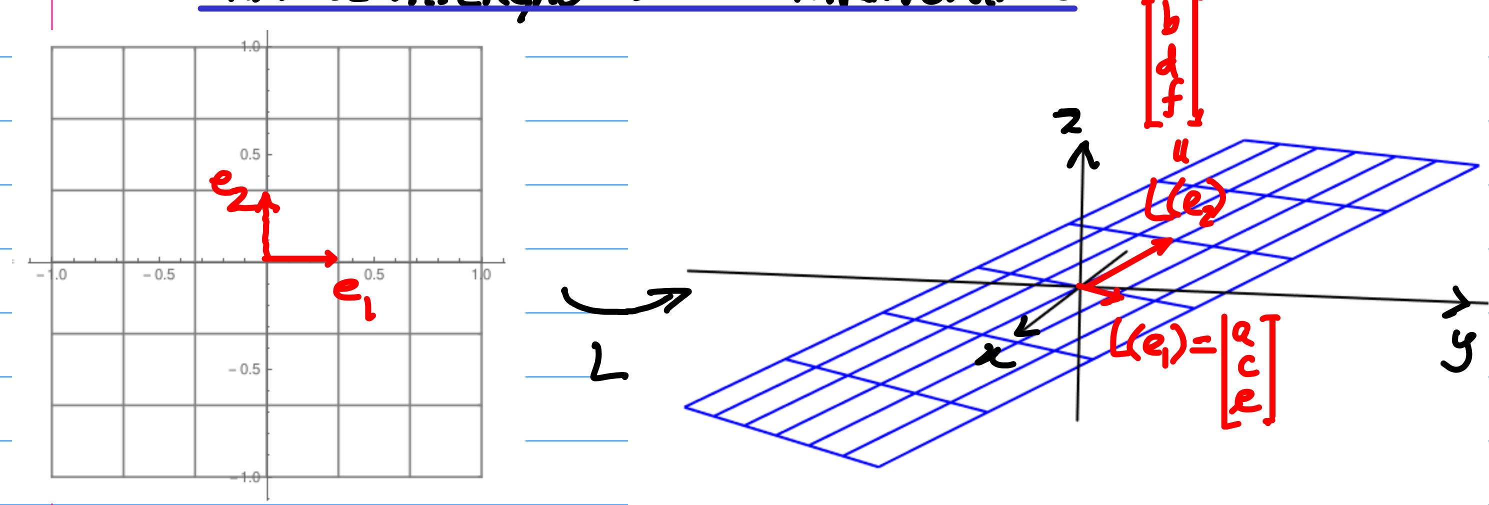
$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $L\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

PARAMETRIZAÇÃO DO CONTRADOMÍNIO



$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\qquad$ $L\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

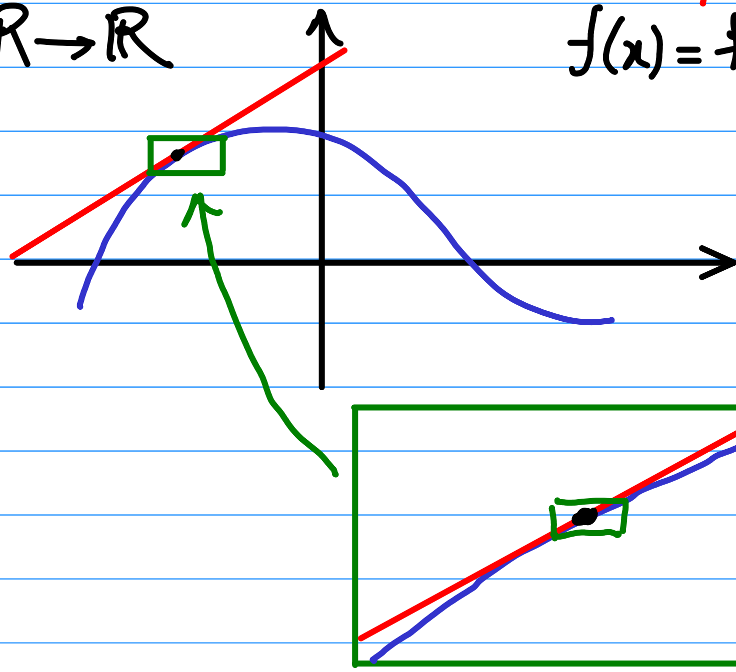
PARAMETRIZAÇÃO DO CONTRADOMÍNIO



O que significa a diferenciabilidade num ponto ?

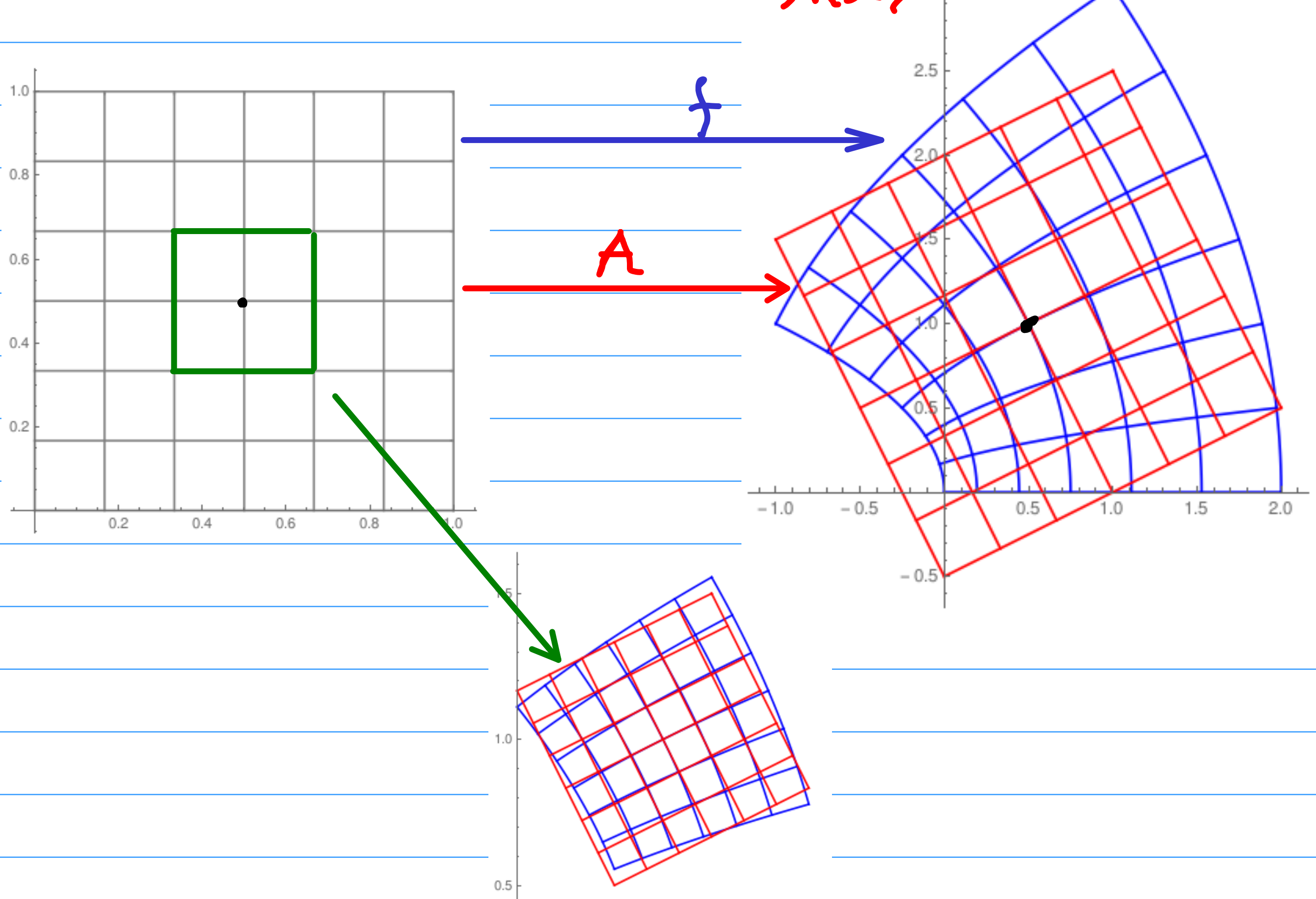
$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \overbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}^{A(x)} + o(|x-a|) \quad \underline{(x \to a)}$$

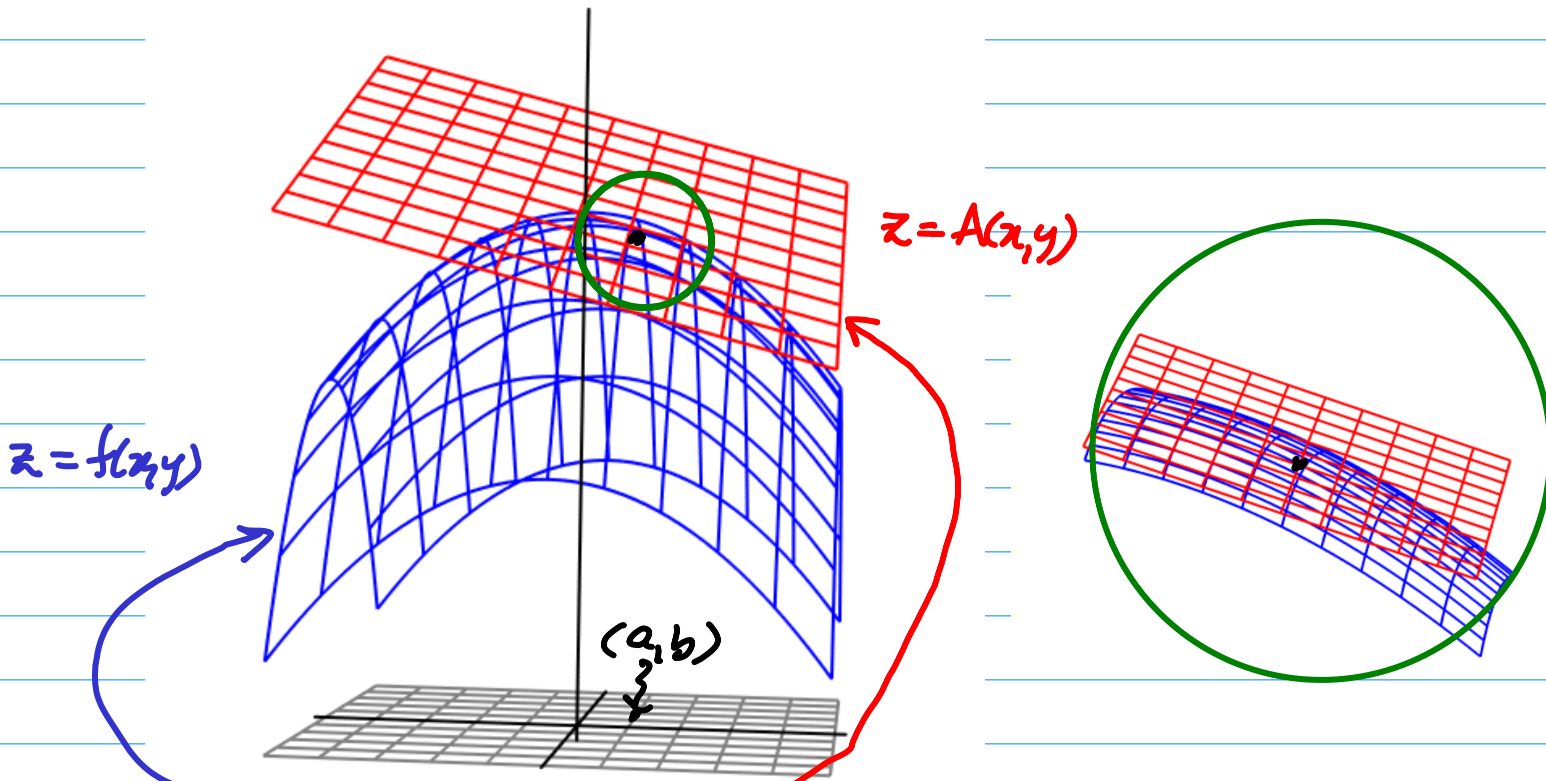


$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x) = \underbrace{f(a) + L(x-a)}_{A(x)} + o(\|x-a\|) \quad (x \to a)$$



$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$



$$f(x,y) = \overbrace{f(a,b) + L(x-a,y-b)}^{A(x,y)} + o(\|(x-a,y-b)\|)$$

$$(x,y) \to (a,b)$$

5-3-2021

DIFERENCIABILIDADE

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $a \in D$

f diz-se diferenciável no ponto $a \in D$

$\exists\ L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplicação linear tal que

$$f(x) = \underbrace{\overbrace{f(a) + L(x-a)}^{A(x)}}_{\text{aplicação afim}} + o(\|x-a\|) \quad (x \to a)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - A(x)}{\|x-a\|} = 0$$

- O que significa a diferenciabilidade num ponto ?

- Como se determina a aplicação linear L ?

- Como se verifica que f é diferenciável no ponto a

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DUMA APLICAÇÃO LINEAR

$L: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y = L(x) = mx$

GRÁFICO

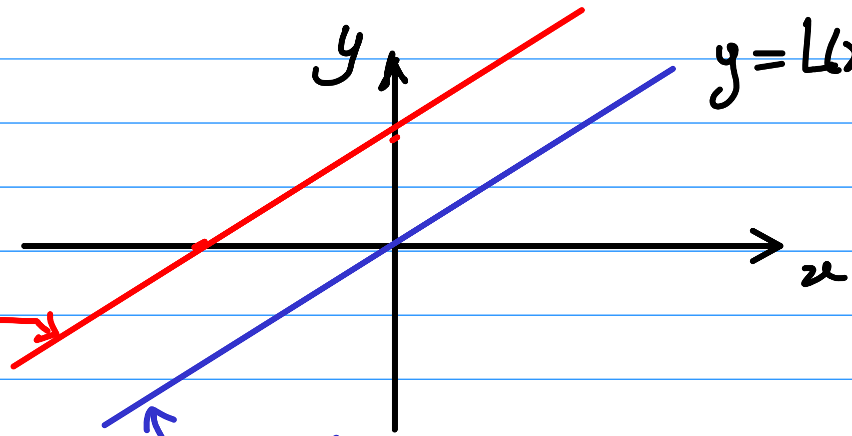


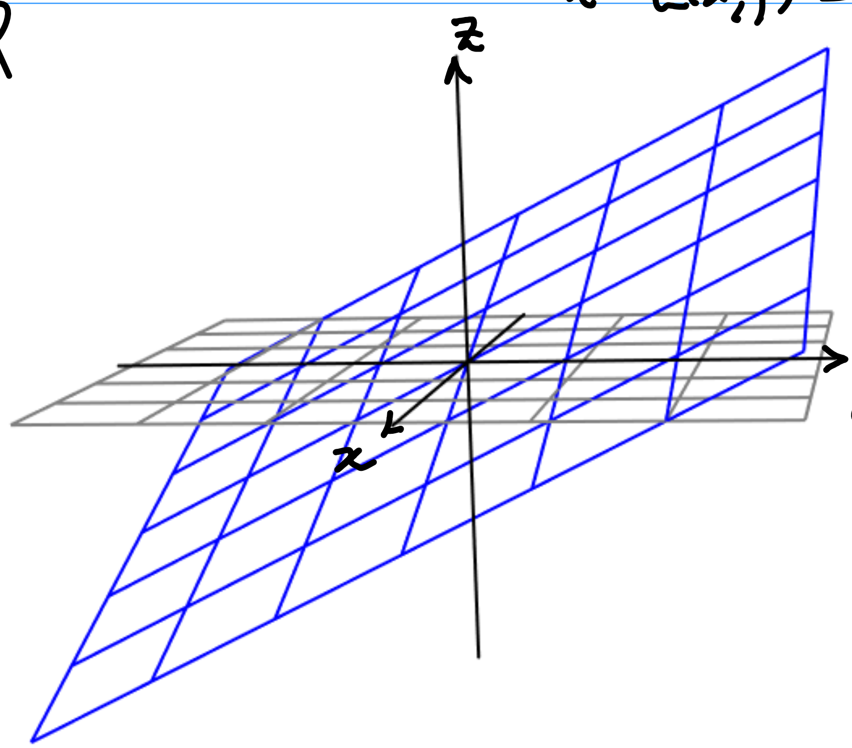
gráfico duma função afim

gráfico duma função linear

$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

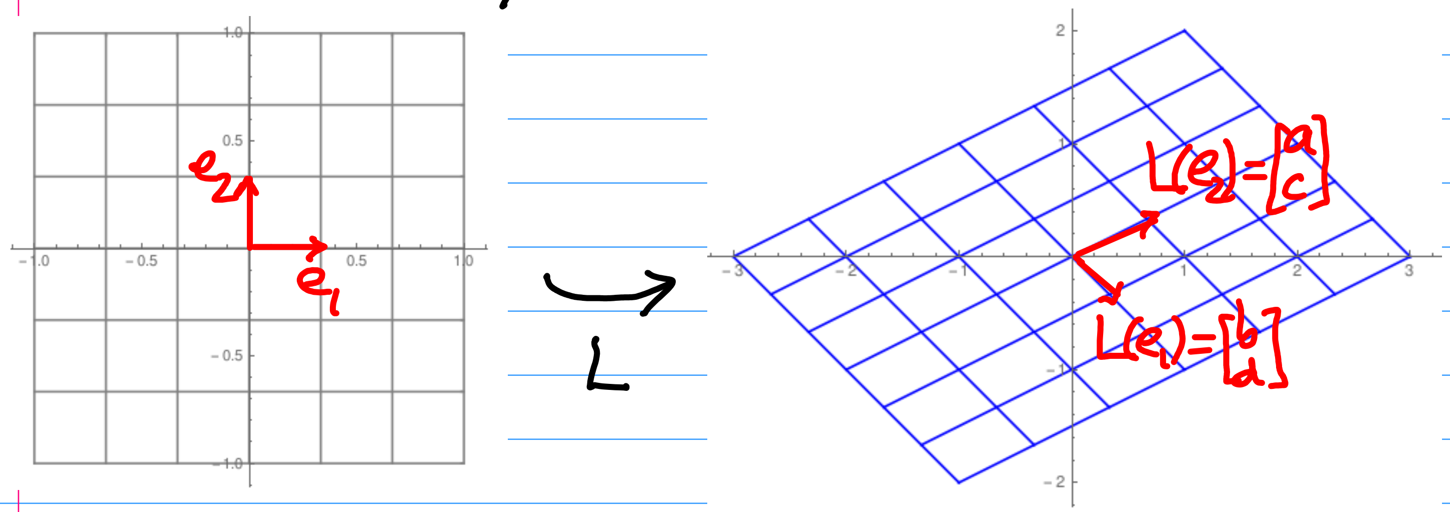
$z = L(x,y) = ax + by$

GRÁFICO



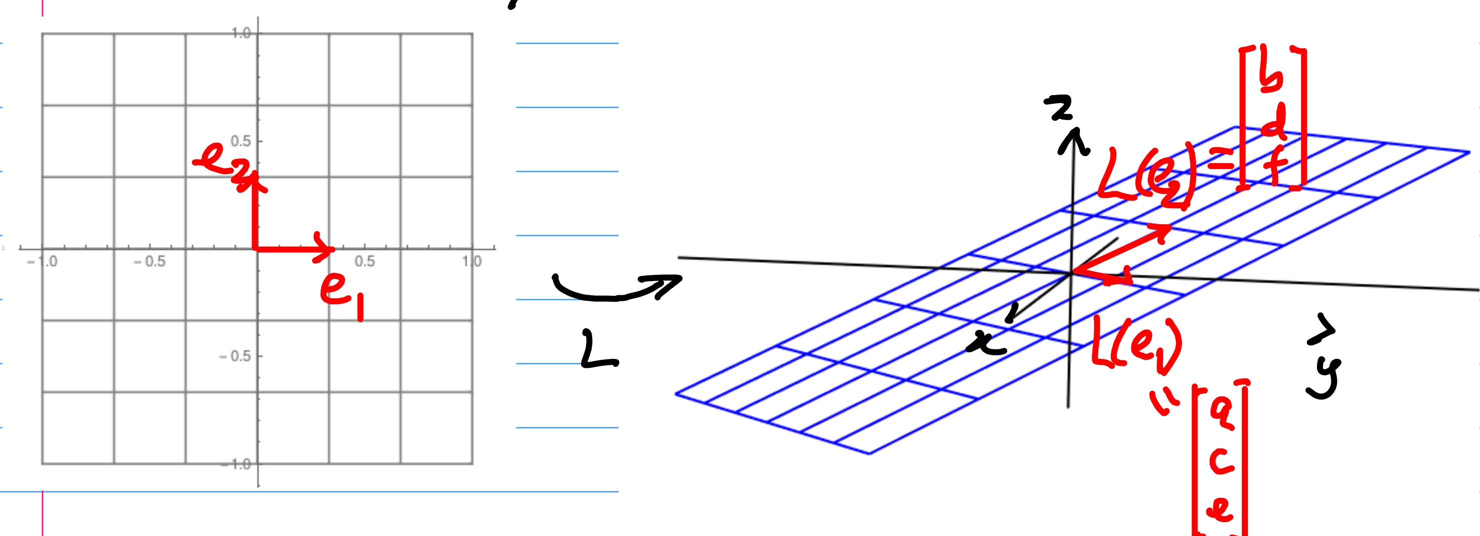
$L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $L\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

PARAMETRIZAÇÃO DO CONTRADOMÍNIO



$L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\qquad$ $L\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

PARAMETRIZAÇÃO DO CONTRADOMÍNIO



$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 3\times 2 \qquad L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$L\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = M\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + 3v_2 \\ 2v_1 - v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

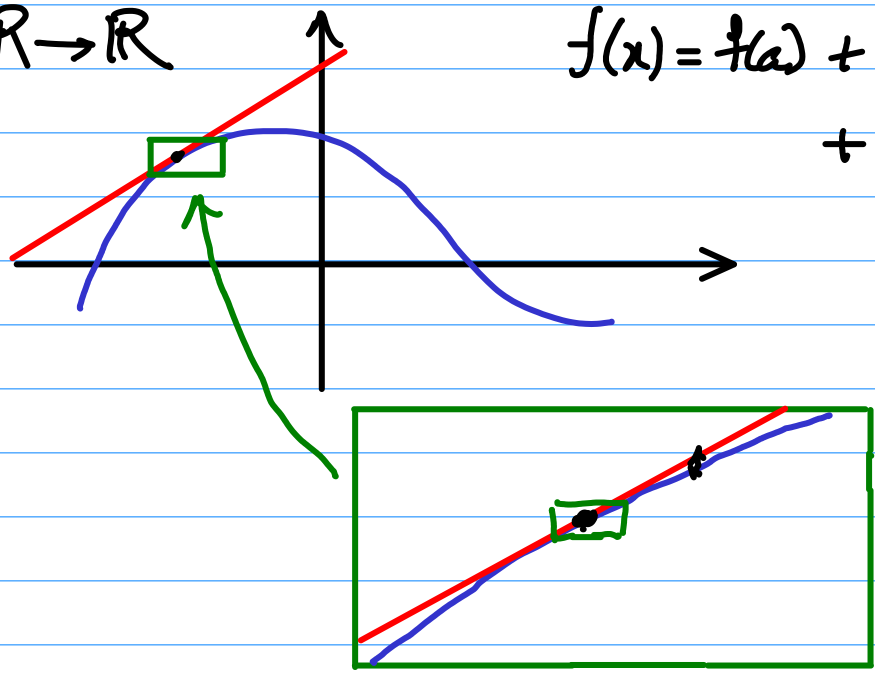
$$= \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{L\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} v_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{L\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} v_2}$$

geram o plano $L(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^3$

O que significa a diferenciabilidade num ponto ?

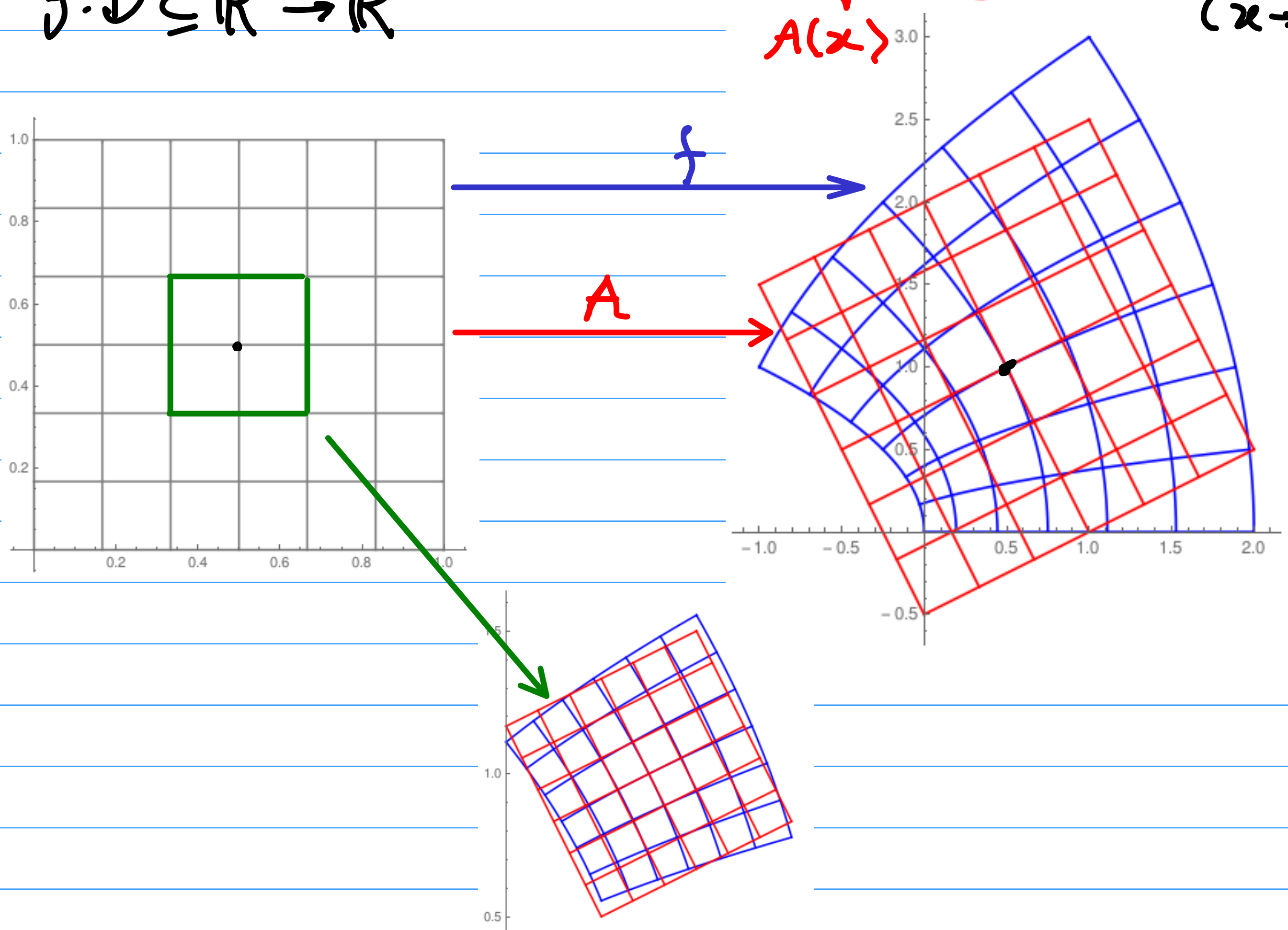
$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \overbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}^{A(x)} + o(|x-a|) \quad (x \to a)$$



$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x) = \underbrace{f(a) + L(x-a)}_{A(x)} + o(\|x-a\|) \quad (x \to a)$$



Como se determina a aplicação linear L ?

PROP $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\quad a \in D$

f diferenciável em a, $\quad L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear.

$$\boxed{f(x) = f(a) + L(x-a) + o(\|x-a\|) \quad (x \to a)}$$

$$\Longrightarrow \forall v \in \mathbb{R}^n \qquad L(v) = f'_v(a)$$

PROVA $\qquad x = a + tv \qquad (t \in \mathbb{R})$

$$f(a+tv) = f(a) + L(tv) + o(t\|v\|)$$

$$\frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = L(v) + \frac{o(t)}{t}$$

$t \to 0$ $\qquad\qquad \to 0$ $\quad t \to 0$

$$f'_v(a) = L(v)$$

$\blacksquare$

PROPOSIÇÃO $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\quad a \in D$

f diferenciável em a $\Longrightarrow$

$$f'_v(a) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

base canónica

$$L(v) = f'_v(a) = L(v) = L\Big(\underline{\textstyle\sum_{i=1}^{n} v_i e_i}\Big)$$

L linear

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i L(e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i f'_{e_i}(a)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a). \qquad \blacksquare$$

$v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ $\quad \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

PROPOSIÇÃO $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in D$

f diferenciável em a $\Longrightarrow$ Existe uma única aplicação linear $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que é representada por uma matriz $M \in Mat_{m\times n}$ cujas colunas são os vectores

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(a) \end{bmatrix} \quad \text{com } 1 \le i \le n$$

$$\boxed{L\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = M\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}}$$

DEF. Chama-se matriz *Jacobiana* de f no ponto $a \in D$ à matriz

$$J_f(a) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

cujas colunas são os vetores $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $i=1,\dots,n$.

f diferenciável em $a \in D$ $\Longrightarrow$

$$\boxed{f(x) = \overbrace{f(a) + J_f(a)(x-a)}^{A(x)} + o(\|x-a\|) \quad x \to a}$$

A aplicação linear $f'(a) = Df_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$Df_a(v) = J_f(a).v$ diz-se a derivada de f no ponto $a \in D$

TEOREMA DO VALOR MÉDIO DE LAGRANGE

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável

$$g(x) - g(a) = g'(\underbrace{c}_{\text{entre } a \text{ e } x})(x-a)$$

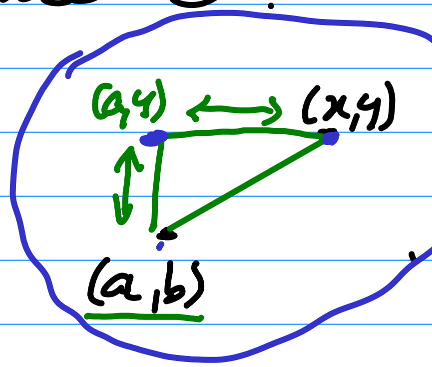
$g(x) = f(x, y)$

$$f(x,y) - f(x,a) = f_x(c,y)(x-a)$$

Como se verifica que f é diferenciável no ponto a ?

PROPOSIÇÃO Se $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fôr de classe C^1 então f é diferenciável em todos os pontos do domínio D.

PROVA $\boxed{n=2, \quad m=1}$



$$J_f(a,b) = [\ f_x(a,b) \quad f_y(a,b)\ ]$$

$$\left\| f(x,y) - f(a,b) - J_f(a,b)\begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \| f(x,y) - f(a,y) - f_x(a,b)(x-a)$$
$$+ f(a,y) - f(a,b) - f_y(a,b)(y-b) \|$$

$$= \| \overbrace{f_x(c,y)(x-a)} - \overbrace{f_x(a,b)(x-a)}$$

entre a e x

$$+ f_y(a,c')(y-b) - f_x(a,b)(x-a) \|$$

entre b e y

$$\leq \| f_x(c,y) - f_x(a,b) \| \underbrace{|x-a|} + \| f_y(a,c') - f_y(a,b) \| \underbrace{|y-b|}$$

$$\leq \{ \underbrace{\| f_x(c,y) - f_x(a,b) \|}_{\downarrow \ \to 0} + \underbrace{\| f_y(a,c') - f_y(a,b) \|}_{\downarrow \ \to 0} \} \underline{\| (x-a, y-b) \|}$$

quando $(x,y) \to (a,b)$

$\blacksquare$

Domínios de diferenciabilidade das funções usuais:

$$Dom(\exp) = Dom(\sin) = Dom(\cos) = \mathbb{R}$$

$$Dom(\log) =]0, +\infty[$$

$$Dom(\arcsin) = Dom(\arccos) =]-1,1[.$$

Dada uma função de n-variáveis definida por uma expressão explícita obtida à custa das operações aritméticas a partir das funções acima, chama-se Domínio de Diferenciabilidade dessa expressão ao maior domínio onde todas as derivadas (parciais) dessa expressão estejam definidas.

Toda a função dada por uma expressão explícita é de classe C^∞ e em particular de classe C^1 no seu domínio de diferencabilidade.
Em particular todas estas funções são diferenciáveis em todos os pontos deste domínio.

PROPOSIÇÃO $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad a \in D$, D aberto

f diferenciável em $a \implies f$ contínua em a.

PROVA

$$f(x) - f(a) = \underbrace{J_f(a)\cdot(x-a)} + \boxed{o(\|x-a\|)} \nearrow 0$$

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|J_f(a)\cdot\underbrace{(x-a)}_{\to 0}\| + \|o(\|x-a\|)\|$$

$$\leq \underbrace{\|x-a\|}_{\to 0}$$

$x \to a$

Logo $$\lim_{x\to a} f(x) = f(a). \quad \blacksquare$$

GRADIENTE DUMA FUNÇÃO

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad a \in D$

$$\boxed{\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)}$$

$$J_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

9-3-2021

GRADIENTE DUMA FUNÇÃO

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\qquad a \in D$

$$\boxed{\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)}$$

$$J_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

produto de matrizes

$$J_f(a) \cdot v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, v_i$$

$$= \nabla f(a) \cdot v$$

produto interno

PROPOSIÇÃO Dada $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to D$ diferenciável em $t_0 \in I$ e $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\gamma(t_0)$

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0).$$

PROVA $\quad f$ diferenciável em $a=\gamma(t_0)$

$$f(x)-f(a)=\nabla f(a)\cdot(x-a)+o(\|x-a\|)\qquad (x\to a)$$

substituindo $\quad x=\gamma(t),\quad a=\gamma(t_0)$

$$f(\gamma(t))-f(\gamma(t_0))=\nabla f(\gamma(t_0))\cdot(\gamma(t)-\gamma(t_0))+o(\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\|)\qquad (t\to t_0)$$

$$\underbrace{\frac{f(\gamma(t))-f(\gamma(t_0))}{t-t_0}}_{\downarrow\ (f\circ\gamma)'(t_0)}=\nabla f(\gamma(t_0))\cdot\underbrace{\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}}_{\downarrow\ \gamma'(t_0)}+\underbrace{\frac{o(\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\|)}{\cancel{\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\|}}}_{\downarrow\ 0}\underbrace{\frac{\cancel{\|\gamma(t)-\gamma(t_0)\|}}{t-t_0}}_{\downarrow\ \|\gamma'(t_0)\|}$$

$$\boxed{(f\circ\gamma)'(t_0)=\nabla f(\gamma(t_0))\cdot\gamma'(t_0)}\qquad\blacksquare$$

NOTAÇÃO $\qquad v=f(x,y,z)$

$$(x,y,z)=(g_1(t),g_2(t),g_3(t))\qquad t\in\mathbb{R}$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot \left(g_1'(t), g_2'(t), g_3'(t)\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot g_2'(t) + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot g_3'(t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(t), g_2(t), g_3(t))$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(t), g_2(t), g_3(t))$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}(g_1(t), g_2(t), g_3(t))$$

EXEMPLO 1 $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ classe C^1 tal que

$\gamma(0) = (1,2)$ e $\gamma'(0) = (1,-1)$.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{xy} + xy$

Considere a composição $z = f(\gamma(t))$ e calcule a derivada dz/dt em $t = 0$.

$z = f(x,y)$, $(x,y) = \gamma(t)$

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)\Big|_{t=0} = \gamma'(0) = (1,-1)$$

$$\frac{dz}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$= (y e^{xy} + y)\frac{dx}{dt} + (x e^{xy} + x)\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$= (2e^2 + 2) \cdot 1 + (1 \cdot e^2 + 1)(-1)$$

$$= e^2 + 1 \checkmark$$

$t = 0$

$(x,y) = \gamma(0) = (1,2)$

$x = 1$

$y = 2$

EXEMPLO 2 $\quad f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ classe C^1

tal que

$$\nabla f(1,2) = (1,-5) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=1$$

$$\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (e^t, 2+t) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -5$$

Considere a função $z = f(\gamma(t))$ e calcule a derivada dz/dt em $t=0$.

$$z = f(x,y), \quad (x,y) = (e^t, 2+t) \qquad \gamma(0) = (1,2)$$

$$\frac{dz}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} e^t + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot 1 \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\cdot 1$$

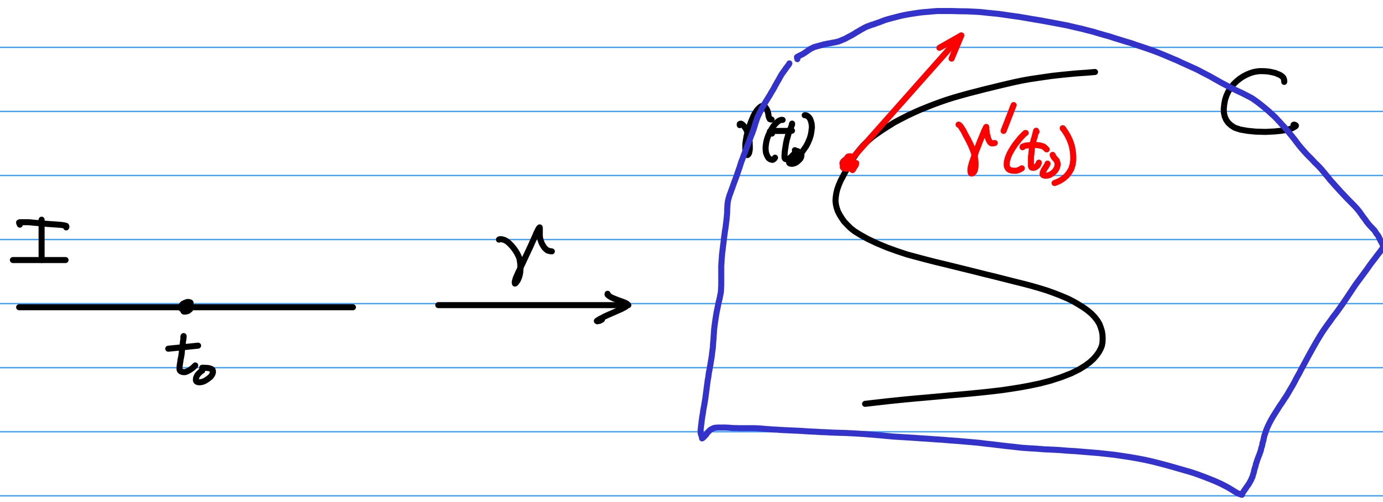
$$= 1 - 5 = -4$$

$$\gamma'(t) = (e^t, 1) \qquad \gamma(0) = (1,2)$$
$$\gamma'(0) = (1,1)$$

$$\frac{dz}{dt}(0) = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(0) = \nabla f(\gamma(0))\cdot\gamma'(0)$$

$$= (1,-5)\cdot(1,1) = 1-5 = -4$$

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DO GRADIENTE



$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ linha parametrizada com traço $C = \gamma(I)$
$\gamma'(t_0)$ diz-se o vector tangente a C no ponto $p = \gamma(t_0)$

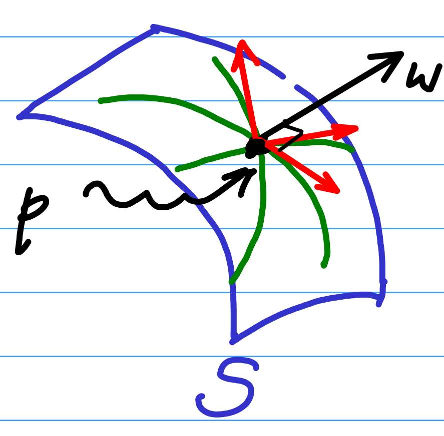
Mais geralmente, dado $S \subset \mathbb{R}^n$ e uma linha parametrizada $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(I) \subseteq S$, o vector $v = \gamma'(t_0)$ diz-se tangente a S no ponto $p = \gamma(t_0)$, $\forall t_0 \in I$.

Dado $p \in S \subseteq \mathbb{R}^n$, um vector $w \in \mathbb{R}^n$ diz-se ortogonal a S no ponto p se $\quad w \cdot \gamma'(t_0) = 0 \quad$ para toda a linha parametrizada $\gamma : I \to S$ tal que $\gamma(I) \subseteq S$ e $\gamma(t_0) = p$, $\quad t_0 \in I$.

$v \cdot w = 0$

$\Updownarrow$

$v \perp w$



Teorema Para uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1, em qualquer ponto $p \in D$ o gradiente $\nabla f(p)$ é ortogonal ao conjunto de nível $N_c = \{x \in D : f(x) = c\}$ que passa por p $\ (c = f(p))$.

$p \in N_c \iff f(p) = c$

$\gamma : I \to D \qquad \gamma(I) \subseteq N_c \qquad \gamma(0) = p, \quad \underline{\underline{v = \gamma'(0)}}$

v tangente a N_c em p

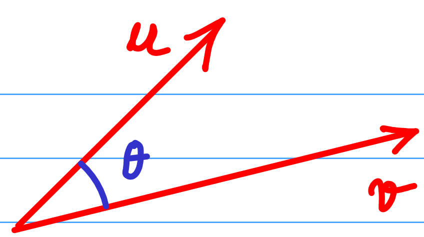
$$\nabla f(p) \cdot v = \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \frac{d}{dt}\left(f(\gamma(t))\right)\Big|_{t=0} = 0$$

$\gamma(I) \subseteq N_c \iff \gamma(t) \in N_c \quad \forall t \in I$

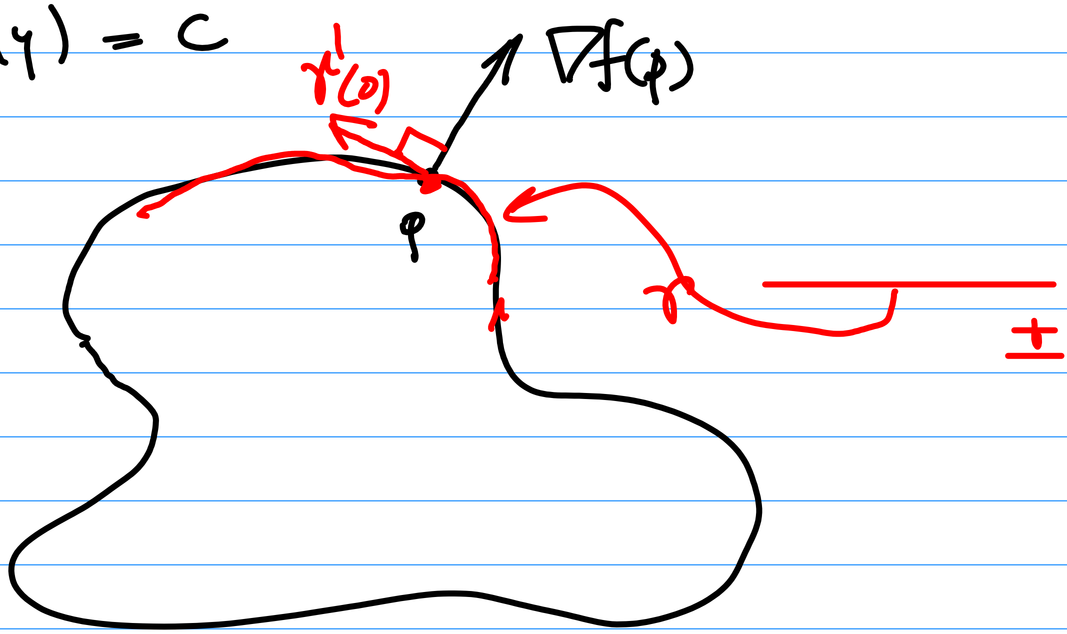
$\iff f(\gamma(t)) = c \quad \forall t \in I$

constante

$$u \cdot v = \|u\| \ \|v\| \cos\theta \qquad \text{onde} \qquad \theta = \measuredangle(u, v)$$



$f(x,y) = c$



$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = c$

Teorema Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Dados $p \in D$ e $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|v\| = 1$,

$$-\|\nabla f(p)\| \leq f'_v(p) \leq \|\nabla f(p)\|$$

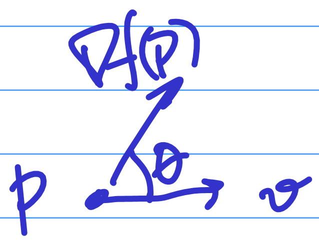
com igualdades respectivamente se

$$v = -\frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|} \text{ (derivada direccional mínima),}$$

$$v = +\frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|} \text{ (derivada direccional máxima).}$$

$$f'_v(p) = J_f(p)\, v = \nabla f(p) \cdot v$$

$$= \|\nabla f(p)\| \, \cancel{\underbrace{\|v\|}_{=1}} \, \cos\theta$$

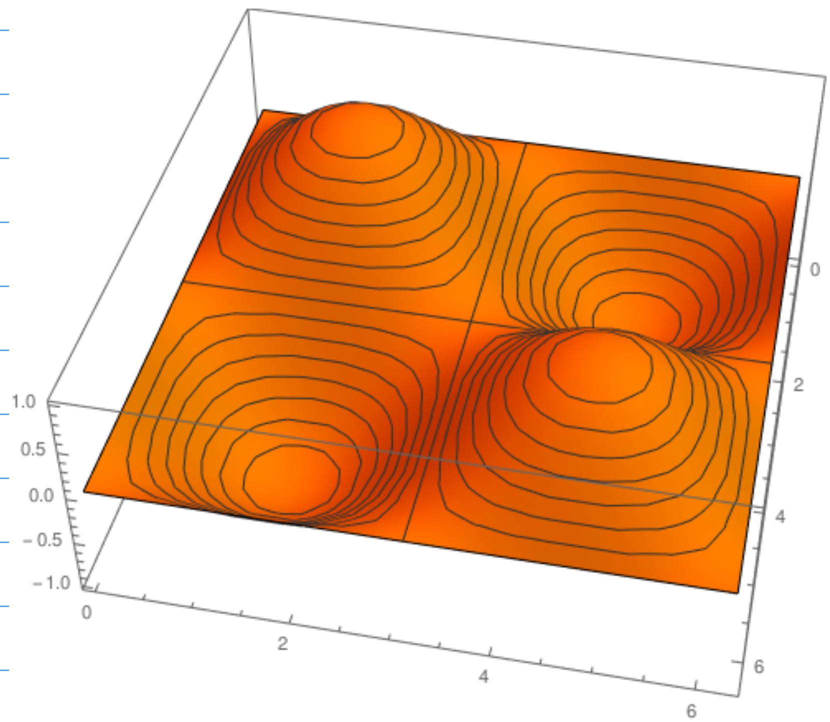


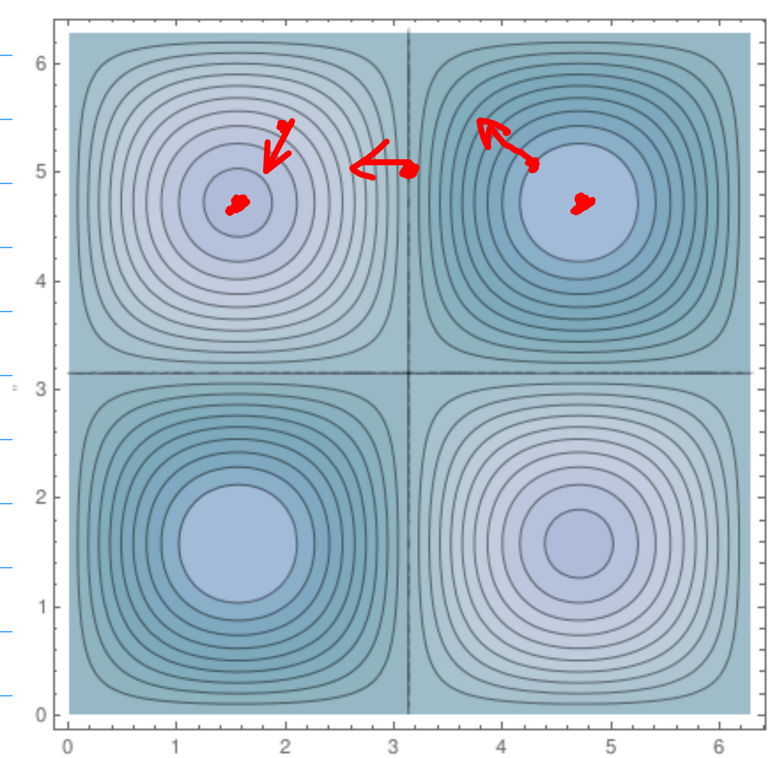
$\cos\theta = 1$ $\quad\quad$ $\theta = 0$

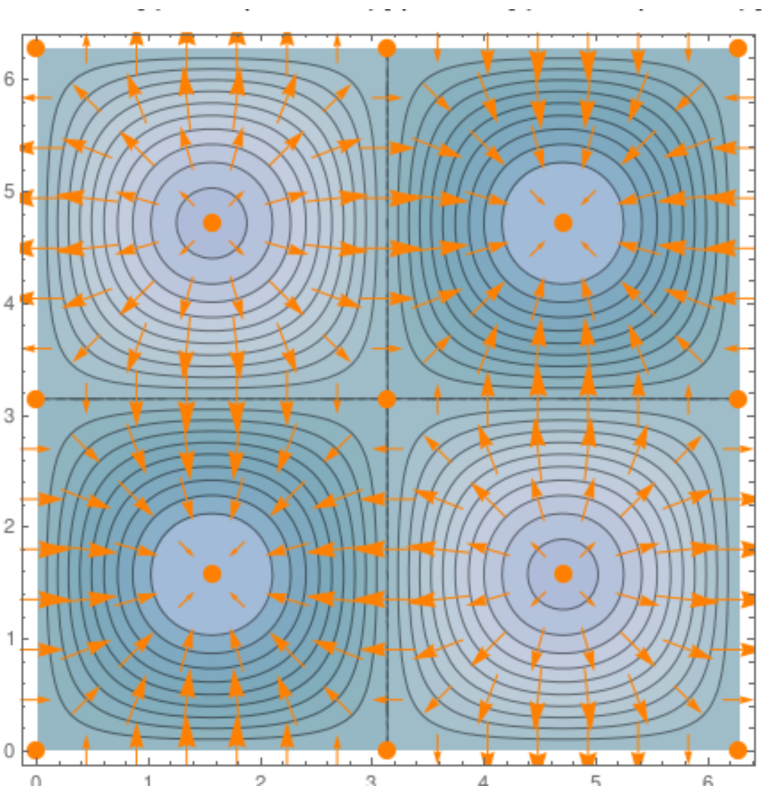
$\cos\theta = -1$ $\quad\quad$ $\theta = \pi$

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x,y) = \sin x \sin y$$

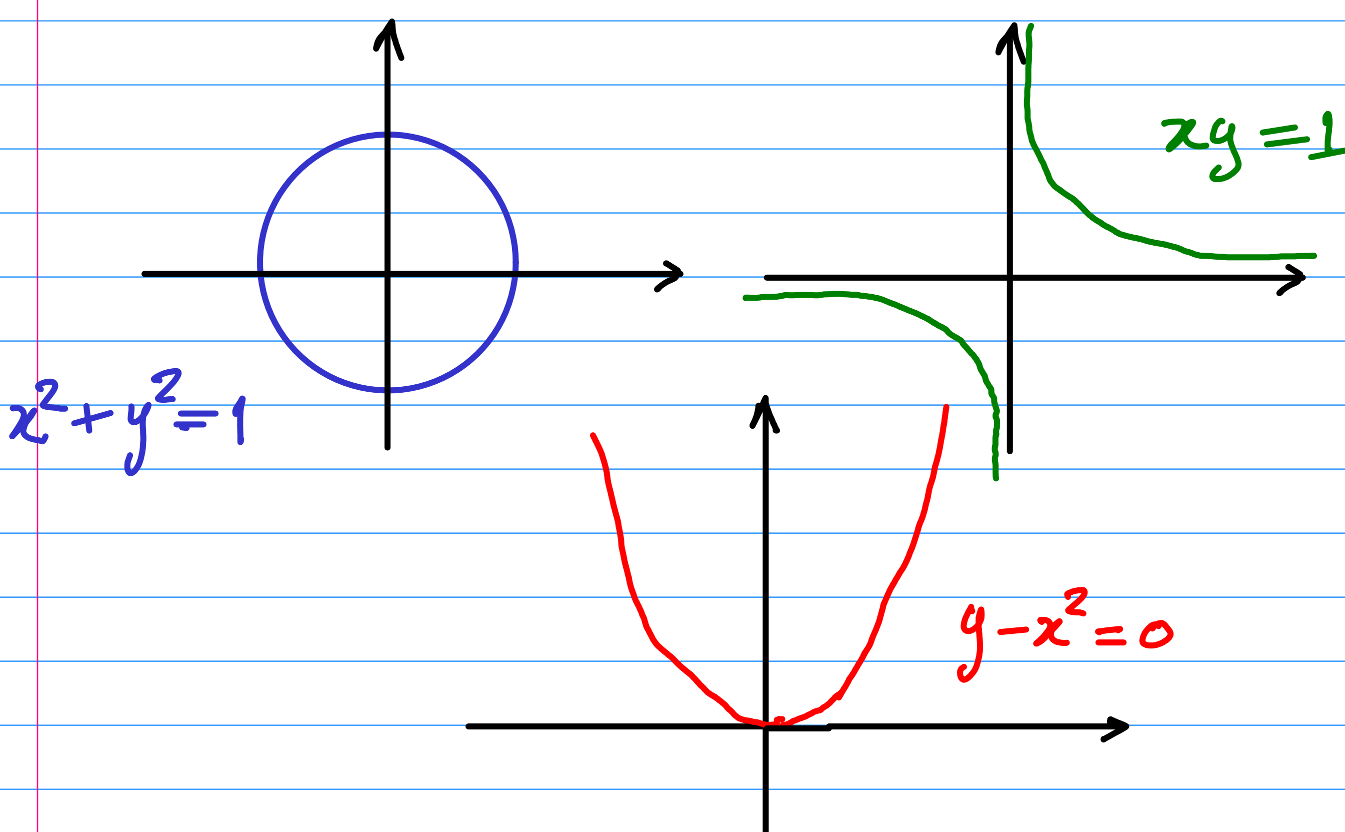
$$D = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$$





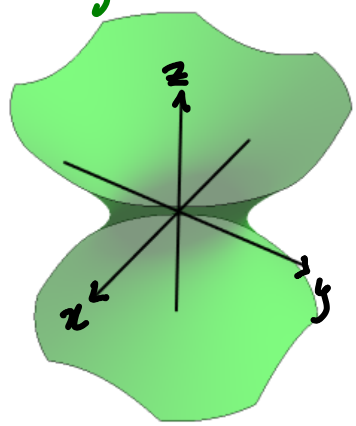


Tipicamente uma equação $f(x,y)=c$ em duas variáveis $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ descreve uma <u>curva</u>

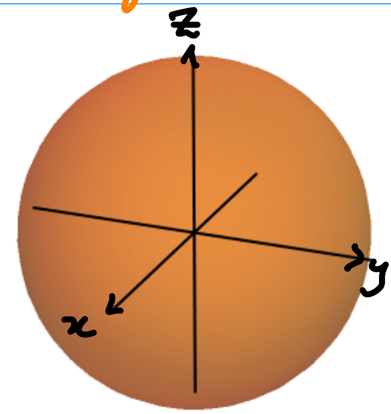


Tipicamente uma equação $f(x,y,z)=c$ em três variáveis $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ descreve uma superfície

$x^2+y^2-z^2=1$



$x^2+y^2+z^2=1$



Tipicamente uma equação $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=c$ em n variáveis $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ descreve uma hipersuperfície, que é um objeto de dimensão $n-1$ em $\mathbb{R}^n$.

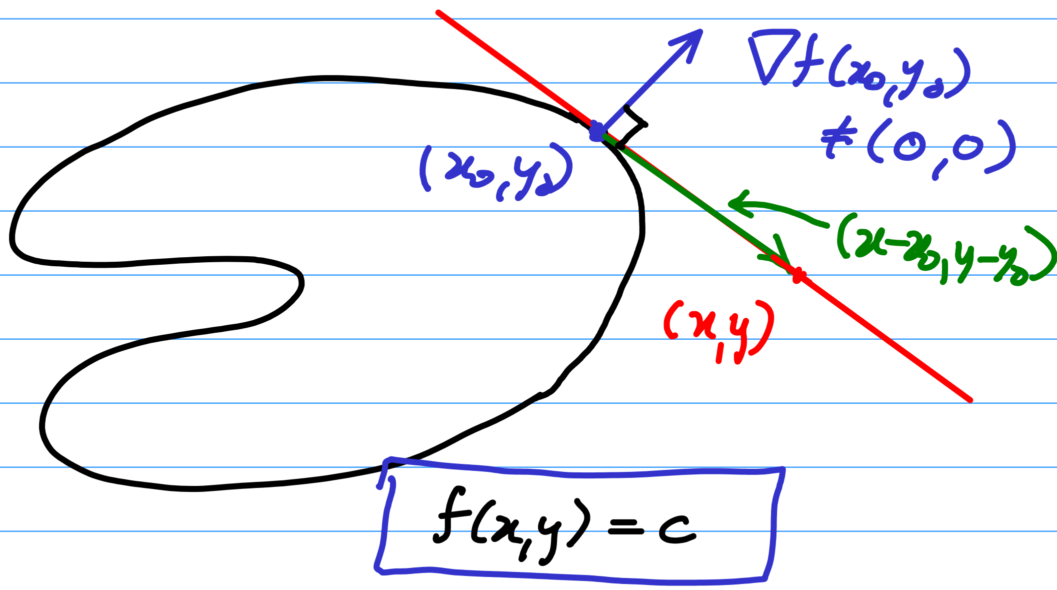
Dada $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de classe C^1, um conjunto de nível típico

$$N_c=\{x\in D : f(x)=c\}$$

é uma hipersuperfície

10-3-2021

RECTA TANGENTE A UMA CURVA DE NÍVEL



$$\boxed{\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,\, y-y_0) = 0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0}$$

EXEMPLO $\quad C = \{(x,y) : \underbrace{x+y-\log(xy)}_{h(x,y)} = 3-\log 2\}$

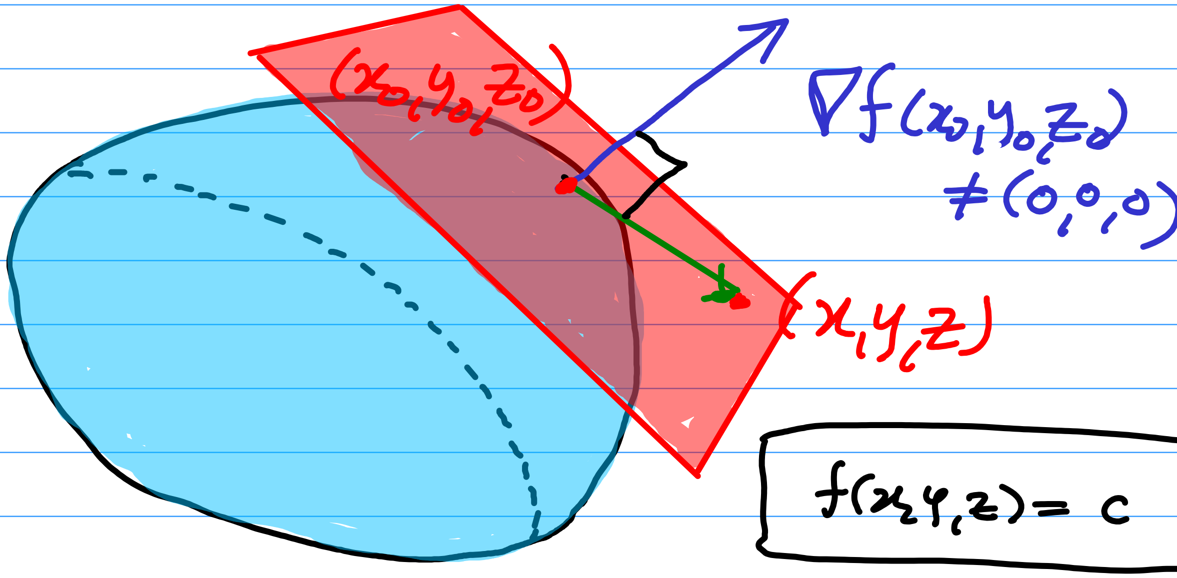
Recta tangente no ponto $(2,1)\in C$.

$\nabla h(x,y) = \left(1-\frac{1}{x},\, 1-\frac{1}{y}\right)$ $\qquad \nabla h(2,1) = \left(1-\frac{1}{2},\, 1-1\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$\left(\frac{1}{2}, 0\right)\cdot(x-2,\, y-1) = 0$

$\frac{1}{2}(x-2) = 0 \iff x = 2$

PLANO TANGENTE A UMA SUPERFÍCIE DE NÍVEL



$$\boxed{f(x,y,z) = c}$$

$$\boxed{\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0}$$

EXEMPLO $\quad S = \{(x,y,z) : \overbrace{xy - z^2}^{h(x,y,z)} = 1\}$

Plano tangente no ponto $p = (2,1,1) \in S$

$\nabla h(x,y,z) = (y, x, -2z) \qquad \nabla h(p) = (1, 2, -2)$

$(1, 2, -2) \cdot (x-2, y-1, z-1) = 0$

$(x-2) + 2(y-1) - 2(z-1) = 0$

EXERCÍCIO Mostre que a equação do plano tangente ao gráfico $z = f(x,y)$ duma função diferenciável $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ num ponto (x_0, y_0, z_0) do gráfico é $\quad (z_0 = f(x_0,y_0))$

$$\boxed{z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

$$G_f = \{(x,y,z) : (x,y) \in D \text{ e } z = f(x,y)\}$$

$$= \{(x,y,z) : (x,y) \in D \text{ e } \underbrace{f(x,y) - z}_{h(x,y,z)} = 0\}$$

$= S.$ Nível 0 de h

$$\nabla h = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right) \cdot (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$$

REGRA DA CADEIA - I

$\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to D \subseteq \mathbb{R}^n$ diferenciável em $t_0 \in I$

$f : D \to \mathbb{R}$ diferenciável em $x_0 = \gamma(t_0)$

$\Rightarrow f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$ diferenciável em t_0

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$$

$$= J_f(\gamma(t_0))\, \gamma'(t_0)$$

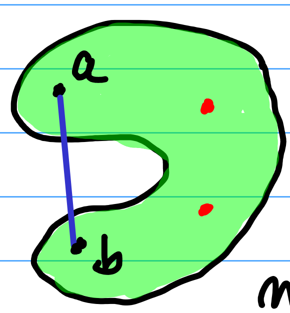
matriz coluna

TEOR. VALOR MÉDIO LAGRANGE $h : I \to \mathbb{R}$ diferenciável
$\forall a, b \in I,\ a < b \ \exists c \in]a,b[$ tal que $h(b) - h(a) = h'(c)(b-a)$.

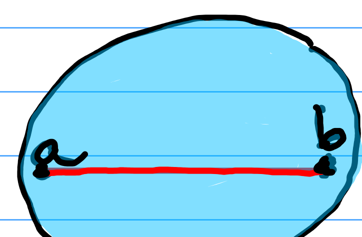
CONJUNTOS CONVEXOS

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se convexo se $\forall a, b \in D$

$$\{a + t(b-a) : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq D$$



não convexo.



convexo

TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio aberto convexo e $f: D \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em todos os pontos do domínio D. Então $\forall a, b \in D$ $\exists$ c ponto no segmento de recta que liga a a b tal que

$$\boxed{f(b) - f(a) = \nabla f(c) \cdot (b-a)}$$

PROVA

$$\gamma : [0,1] \to D \qquad \gamma(t) = a + t(b-a)$$
$$= (1-t)a + tb$$

$$\gamma'(t) = b - a$$

$$\gamma(0) = a, \quad \gamma(1) = b$$

$h : I \to \mathbb{R}$

$h(t) = (f \circ \gamma)(t)$

$h(1) - h(0) = h'(c)(1-0)$

$\exists\, t_0 \in [0,1]$

$$f(b) - f(a) = \overbrace{(f\circ\gamma)(1)}^{h(1)} - \overbrace{(f\circ\gamma)(0)}^{h(0)}$$

$$= (f\circ\gamma)'(t_0)\,(1-0)$$

$$= (f\circ\gamma)'(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$$

$$= \nabla f(c) \cdot (b-a)$$

onde $c = \gamma(t_0)$ ∎

ESTRUTURA DA MATRIZ JACOBIANA $J_f(a)$

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

$$\begin{array}{rc}
\begin{matrix} \nabla f_1(a) \to \\[2ex] \nabla f_2(a) \to \\[2ex] \\[2ex] \nabla f_m(a) \to \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)
\end{bmatrix} \\
 & \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) & & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{matrix}
\end{array}$$

i-ésima linha de $J_f(a) = \nabla f_i(a)$

j-ésima coluna de $J_f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$

REGRA DA CADEIA - II

$\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to D \subseteq \mathbb{R}^n$ diferenciável em $t_0 \in I$

$f : D \to \mathbb{R}^m$ diferenciável em $x_0 = \gamma(t_0)$

$\Rightarrow f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$ diferenciável em t_0

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \underbrace{J_f(\gamma(t_0))}\, . \, \gamma'(t_0)$$

matriz coluna

PROVA $\quad m = 2 \qquad x = (x_1, \dots, x_n) \in D$

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x))$$

$$(f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t)) = (f_1(\gamma(t)), f_2(\gamma(t)))$$

$$= ((f_1 \circ \gamma)(t), (f_2 \circ \gamma)(t))$$

$\nabla f_1(\gamma(t))$

$$(f \circ \gamma)'(t) = \begin{bmatrix} (f_1 \circ \gamma)'(t) \\ (f_2 \circ \gamma)'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\gamma(t)) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\gamma(t)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\gamma(t)) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\gamma(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1'(t) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t) \end{bmatrix}$$

$\nabla f_2(\gamma(t)) \qquad \gamma'(t)$

$$= J_f(\gamma(t))\, \gamma'(t)$$

∎

REGRA DA CADEIA – III

$g: U \subseteq \mathbb{R}^k \to D \subseteq \mathbb{R}^n$ diferenciável em $a \in U$

$f: D \to \mathbb{R}^m$ diferenciável em $b = g(a) \in D$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial (f\circ g)}{\partial x_i}(a) = J_f(g(a))\,\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$$

PROVA

$$\gamma(x_i) = g(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n)$$

$$\frac{\partial (f\circ g)}{\partial x_i}(a) = (f\circ\gamma)'(a_i) = \frac{d}{dx_i}\Big[f(g(a_1,\dots,x_i,\dots,a_n))\Big]_{x_i=a_i}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) = \gamma'(a_i)$$

$\blacksquare$

EXEMPLO $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$

$$u = f(x,y) = (y - x^2,\, xy)$$

$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial (f\circ g)}{\partial r}$

$$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) = g(r,s) = (r, rs^2)$$

$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial (f\circ g)}{\partial s}$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$f(x,y) = (y - x^2,\ xy)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$= \begin{bmatrix} -2x \\ y \end{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} + \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\underset{\frac{\partial (f\circ g)}{\partial r}}{\frac{\partial u}{\partial r}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2x & 1 \\ y & x \end{bmatrix}}_{J_f(x,y)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial g}{\partial r}}$$

$$(x,y) = g(r,s)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \end{bmatrix} = \frac{\partial g}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= \begin{bmatrix} -2x \\ y \end{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial s} + \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\underset{\frac{\partial (f\circ g)}{\partial s}}{\frac{\partial u}{\partial s}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2x & 1 \\ y & x \end{bmatrix}}_{J_f(x,y)} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial g}{\partial s}}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \frac{\partial g}{\partial s}$$

Logo

$(x,y) = g(r,s)$

$$\boxed{J_{f\circ g}(r,s) = J_f(x,y)\, J_g(s,r)}$$

colunas

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial (f\circ g)}{\partial r} & \dfrac{\partial (f\circ g)}{\partial s} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial r} & \dfrac{\partial g}{\partial s} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial (f\circ g)}{\partial r} &= J_f(x,y)\,\frac{\partial g}{\partial r} \\ \frac{\partial (f\circ g)}{\partial s} &= J_f(x,y)\,\frac{\partial g}{\partial s} \end{aligned}}$$

REGRA DA CADEIA – IV (CASO GERAL)

$g: U \subseteq \mathbb{R}^k \to D \subseteq \mathbb{R}^n$ diferenciável em $a \in U$

$f: D \to \mathbb{R}^m$ diferenciável em $b = g(a) \in D$

$\Rightarrow f\circ g : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciável em a

$$\boxed{J_{f\circ g}(a) = J_f(g(a))\, J_g(a)}$$

CONTINUAÇÃO DO EXEMPLO

$$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x,y) = g(r,s) = (r, rs^2)$$

$$J_g(r,s) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s^2 & 2rs \end{bmatrix}$$

$(x,y) = (r, rs^2)$

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} -2x & 1 \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2r & 1 \\ rs^2 & r \end{bmatrix}$$

$$J_{f\circ g}(r,s) = \begin{bmatrix} -2r & 1 \\ rs^2 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s^2 & 2rs \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2r+s^2 & 2rs \\ 2rs^2 & 2r^2s \end{bmatrix}$$

$\frac{\partial u}{\partial r}$ $\qquad$ $\frac{\partial u}{\partial s}$

12-03-2021

COMO RESOLVER SISTEMAS DE EQUAÇÕES

$$(*)\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n)=c_1 \\ \dots \\ f_k(x_1,\dots,x_n)=c_k \end{cases}$$

$n = \#$ variáveis
$k = \#$ equações
$\boxed{n>k}$

$$\Updownarrow$$

$$f(x)=c \qquad f: D\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

$x=(x_1,\dots,x_n)\in D$
$c=(c_1,\dots,c_k)\in \mathbb{R}^k$

$f(x)=(f_1(x),\dots,f_k(x))$

Suponhamos que seja possível resolver o sistema explicitando as primeiras k variáveis em função das restantes n-k

$$(**)\begin{cases} x_1=\varphi_1(x_{k+1},\dots,x_n) \\ \dots \\ x_k=\varphi_k(x_{k+1},\dots,x_n) \end{cases} \qquad (x_{k+1},\dots,x_n)\in U$$

Dizemos que as funções $\varphi_1,\dots,\varphi_k : U\subseteq \mathbb{R}^{n-k}\to\mathbb{R}$ estão definidas implicitamente por $(*)$ num aberto $W\subseteq D$ se

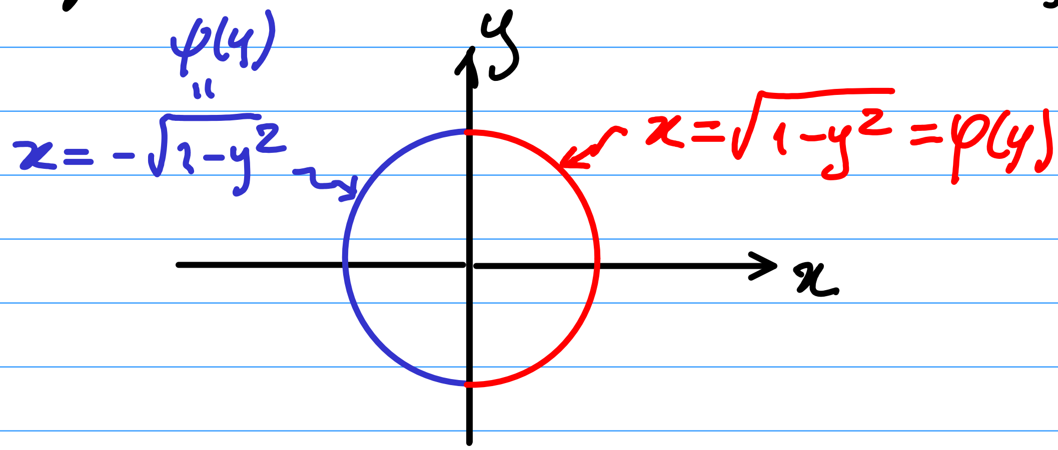
$$\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in W \qquad (*) \Longleftrightarrow (**)$$

EXEMPLO 1

$$x^2+y^2=1 \iff x=\pm\sqrt{1-y^2}$$

$x=\varphi(y)=\sqrt{1-y^2}$ está definida implicitamente por $x^2+y^2=1$ no aberto $W=\{(x,y): x>0\}$

$x=\psi(y)=-\sqrt{1-y^2}$ está definida implicitamente por $x^2+y^2=1$ no aberto $W=\{(x,y): x<0\}$



EXEMPLO 2

$$(*)\begin{cases} x^2-y^2-z^2=1 \\ x^2-e^z=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\varphi(z)=\sqrt{2+e^z} \\ y=\psi(z)=\sqrt{1+e^z-z^2} \end{cases}$$

$\varphi,\psi: U\to\mathbb{R}$

$U=\{z: 1+e^z-z^2>0\}$

Estas funções estão definidas implicitamente por $(*)$ no aberto $W=\{(x,y,z): x>0, y>0\}$

Em geral é impossível resolver explicitamente um sistema de equações não lineares.

Mesmo que o sistema determine funções definidas implicitamente não as conseguimos explicitar

Sabendo que um sistema de equações define implicitamente uma função num certo domínio aberto existem métodos numéricos eficientes (estudados em Análise Numérica) para calcular os valores da função implícita.

Dum ponto de vista teórico importa:

✓ Saber justificar quando é que um sistema de equações define implicitamente uma função num domínio aberto

✓ Saber calcular as derivadas da função implícita

DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

EXEMPLO 1

$x>0$ $\qquad$ $y\in\,]-1,1[$

$$x^2+y^2=1 \quad \longleftrightarrow \quad x=\varphi(y) \quad \left(=\sqrt{1-y^2}\right)$$

$$\forall y \qquad \varphi(y)^2+y^2=1$$

identidade entre funções

$$\Big\downarrow \tfrac{d}{dy}$$

$$2\varphi(y)\varphi'(y)+2y=0$$

$$\boxed{\varphi'(y)=-\frac{2y}{2\varphi(y)}=-\frac{y}{\varphi(y)}}$$

$\frac{d}{dy}$

$$2\varphi'(y)\varphi'(y)+2\varphi(y)\varphi''(y)+2=0$$

$$2\varphi(y)\varphi''(y)=-2-2\varphi'(y)^2$$

$$\boxed{\varphi''(y)=-\frac{2+2\varphi'(y)^2}{2\varphi(y)}}$$

EXEMPLO 2

$$\boxed{x>0,\ y>0}$$

$$(*) \begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 = 1 \\ x^2 - e^z = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \varphi(z) \\ y = \psi(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi(z)^2 - \psi(z)^2 - z^2 = 1 \\ \varphi(z)^2 - e^z = 2 \end{cases}$$

$\frac{d}{dz}$

$$\begin{cases} 2\varphi(z)\varphi'(z) - 2\psi(z)\psi'(z) - 2z = 0 \\ 2\varphi(z)\varphi'(z) - e^z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \varphi'(z) = \dfrac{e^z}{2\varphi(z)} \\[2ex] \psi'(z) = \dfrac{e^z - 2z}{2\psi(z)} \end{cases}$$

$(x, y, z) = (\sqrt{3}, \sqrt{2}, 0)$ satisfaz o sistema $(*)$

$\sqrt{3} = \varphi(0)$, $\sqrt{2} = \psi(0)$

$$\varphi'(0) = \frac{e^0}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\psi'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA (I)

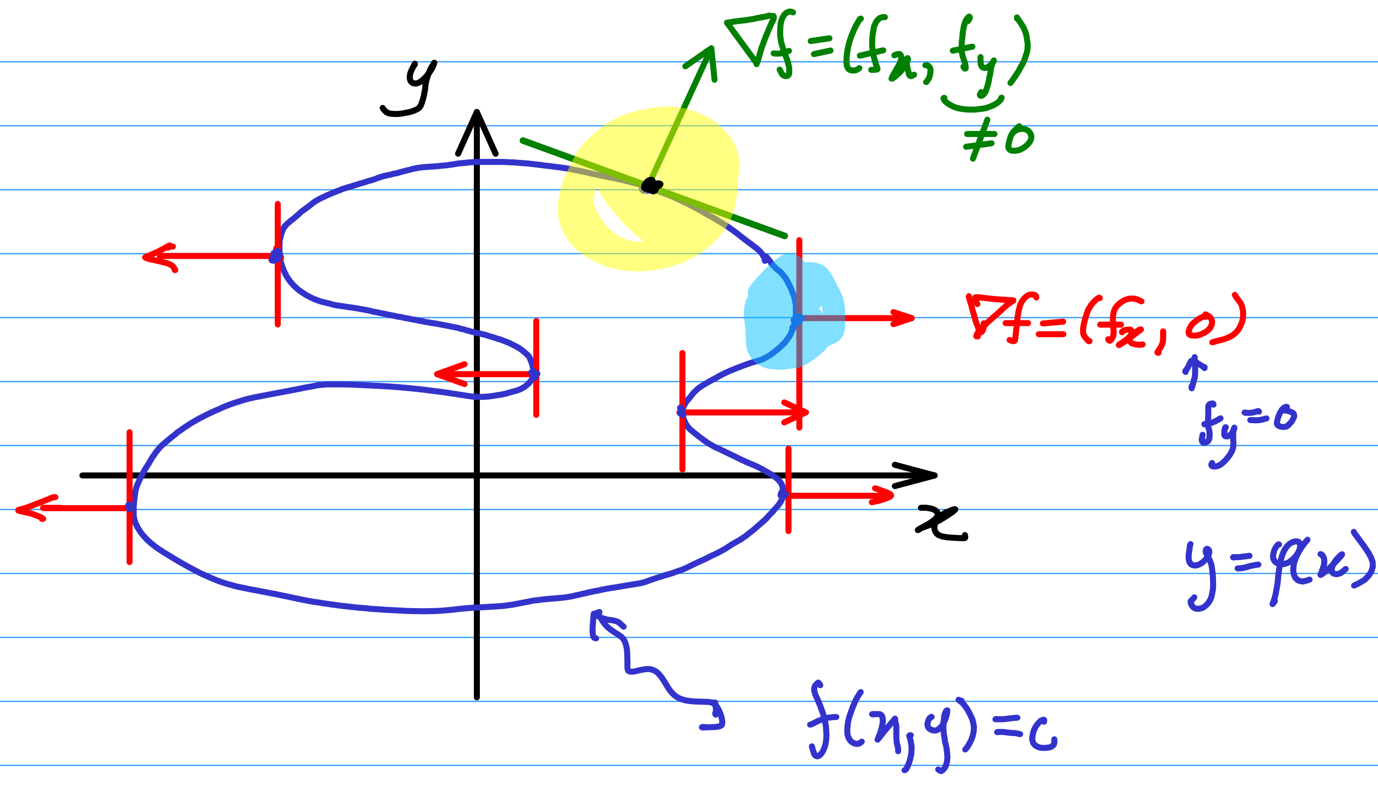
$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ classe C^k $\qquad (x_0, y_0) \in D$

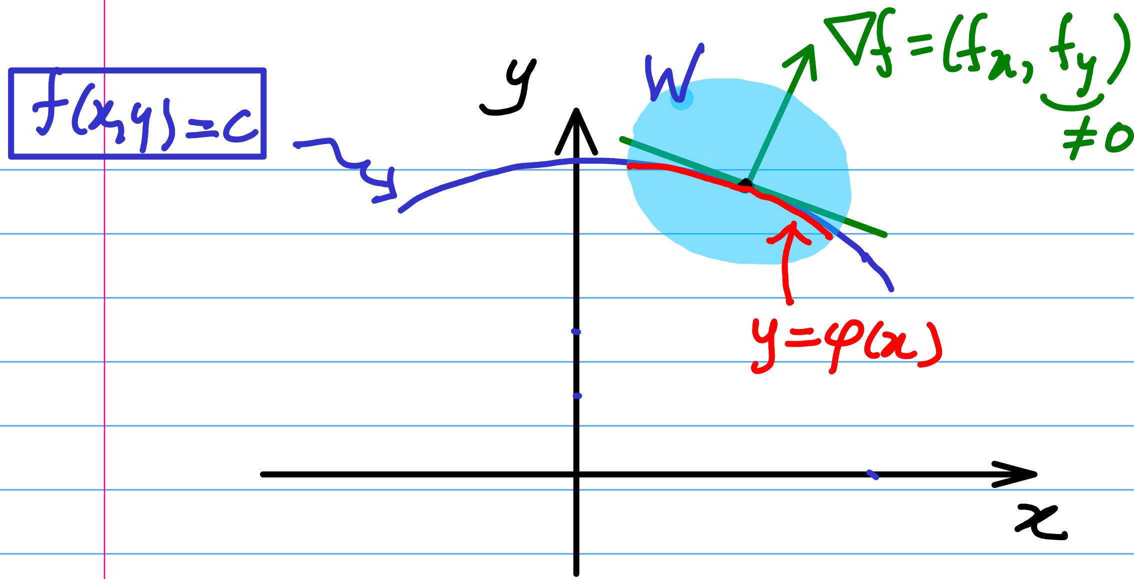
$\boxed{f(x,y) = c}$

✓ (1) $f(x_0, y_0) = c$

✓ (2) $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

Então existe um aberto $W \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(x_0, y_0) \in W$ e a equação $f(x,y) = c$ define implicitamente uma função de classe C^k $y = \varphi(x)$ num intervalo aberto I tal que $x_0 \in I$ e $y_0 = \varphi(x_0)$.





$$\underline{\forall (x,y)\in W} \qquad f(x,y)=c \iff \underset{x\in I}{y=\varphi(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall x\in I, \qquad f(\underset{u}{x},\underset{v}{\varphi(x)}) = c$$

$$\underline{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}\cdot \overbrace{\frac{dx}{dx}}^{1} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\cdot \overbrace{\frac{d}{dx}[\varphi(x)]}^{\varphi'(x)} = 0$$

$$\boxed{\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}}$$

<u>EXEMPLO</u> $\boxed{f(x,y) = xy + e^{x} + \log y - 1 = 0}$

$$f(0,1) = 0+1+0-1 = 0$$

$$\nabla f = \left(y+e^{x},\ x+\frac{1}{y}\right)$$

$$\nabla f(0,1) = (2,1)$$

Porque $f_y(0,1) = 1 \neq 0$,

o Teorema da Função Implícita garante que num certo conjunto aberto contendo $(0,1)$ a equação $f(x,y) = 0$ define implicitamente uma função $y = g(x)$ num intervalo aberto I com $0 \in I$ e $1 = g(0)$.

$$g'(0) = -\frac{f_x(0, \overset{g(0)}{\overset{\shortparallel}{1}})}{f_y(0, \underset{g(0)}{\underset{\shortparallel}{1}})} = -\frac{2}{1} = -2$$

Porque $f_x(0,1) = 2 \neq 0$,

trocando os papeis das duas variáveis, o Teorema da Função Implícita também garante que num certo aberto contendo $(0,1)$ a equação $f(x,y) = 0$ define implicitamente uma função $x = h(y)$ num intervalo aberto J com $1 \in J$ e $0 = h(1)$.

$$h'(1) = -\frac{f_y(0,1)}{f_x(0,1)} = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

16-3-2021

CORRECÇÃO À NOTAÇÃO PARA AS DERIVADAS PARCIAIS

$$f_{xy} := \frac{d}{dy}\left[\frac{d}{dx} f(x,y)\right]$$

$$= \frac{d}{dy}\left[f_x\right] = (f_x)_y$$

Esta correcção refere-se à notação usada na aula teórica T11 (3-03-2021) cujos slides foram entretanto corrigidos de forma a ficarem consistentes com a notação dos Apontamentos da disciplina.

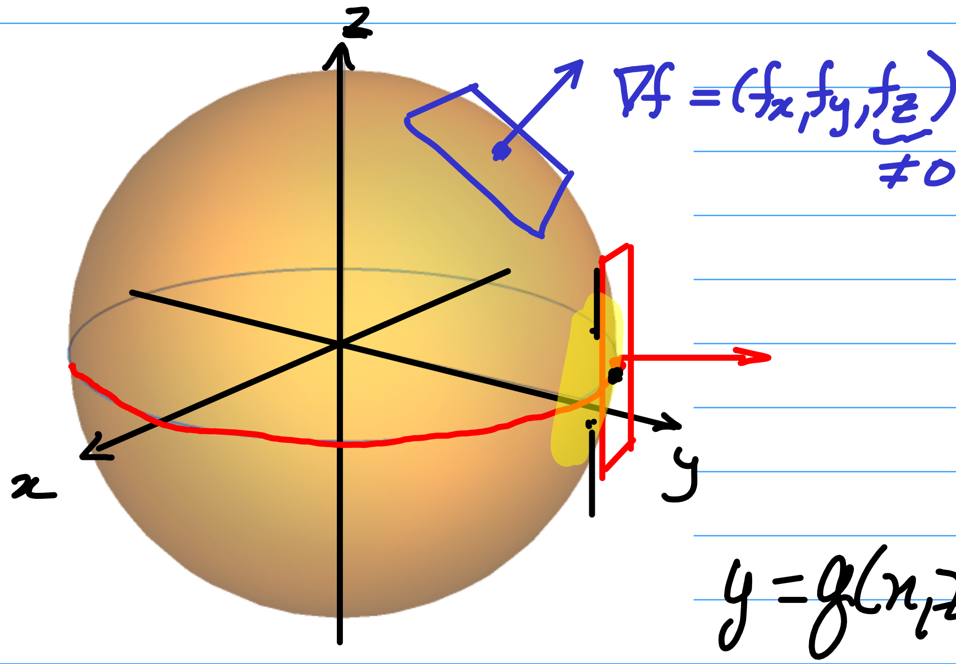
TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA (II)

$f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ classe C^k $\quad (x_0, y_0, z_0) \in D$

(1) $f(x_0, y_0, z_0) = c$

(2) $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

Então existe um aberto $W \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $(x_0, y_0, z_0) \in W$ e a equação $f(x, y, z) = c$ define implicitamente uma função de classe C^k $z = \varphi(x, y)$ num aberto $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(x_0, y_0) \in U$ com $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$.



$y = g(x, z)$

Pelo T.F. Implícita $\exists\, W \subseteq \mathbb{R}^3$ aberto com $(x_0,y_0,z_0)\in W$ e $\varphi: U\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ classe C^k

$\forall\, (x,y,z)\in W \quad f(x,y,z)=c \iff \begin{cases} z=\varphi(x,y) \\ (x,y)\in U\end{cases}$

$$\Downarrow$$

$\forall (x,y)\in U, \qquad f(x,y,\varphi(x,y))=c$ identidade entre funções

$\frac{d}{dx}$: $\quad \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$

$\frac{d}{dy}$: $\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dy}=0$

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}}$$

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}}$$

EXEMPLO $f: D \subseteq \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z,w) = \arctan(x+y) + xzw - ye^w + \log z$$

$$f(0,0,1,0) = 0$$

$$\nabla f = \left(\frac{1}{1+(x+y)^2} + zw,\ \frac{1}{1+(x+y)^2} - e^w,\ xw - \frac{1}{z},\ xz - ye^w \right)$$

$$\nabla f(0,0,1,0) = (1, 0, -1, 0)$$

$$f_z(0,0,1,0) = -1 \neq 0$$

Logo a equação $\boxed{f(x,y,z,w) = 0}$ define implicitamente num aberto $W \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^4$ com $(0,0,1,0) \in W$ uma função $z = g(x,y,w)$ com domínio $(x,y,w) \in U$ contendo $(0,0,0) \in U$ e $1 = g(0,0,0)$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0,0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,1,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1,0)} = -\frac{1}{-1} = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0,0) = -\frac{f_y(0,0,1,0)}{f_z(0,0,1,0)} = -\frac{0}{-1} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial w}(0,0,0) = -\frac{f_w(0,0,1,0)}{f_z(0,0,1,0)} = -\frac{0}{-1} = 0$$

$\nabla f(0,0,1,0) = (1, 0, -1, 0)$

$f_x(0,0,1,0) = 1 \neq 0$

Logo a equação $f(x,y,z,w)=0$ define implicitamente num aberto $W \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^4$ com $(0,0,1,0) \in W$ uma função $x = h(y,z,w)$ com domínio $(y,z,w) \in U$ contendo $(0,1,0) \in U$ e $0 = h(0,1,0)$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0,1,0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,1,0)}{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,1,0)} = -\frac{0}{1} = 0$$

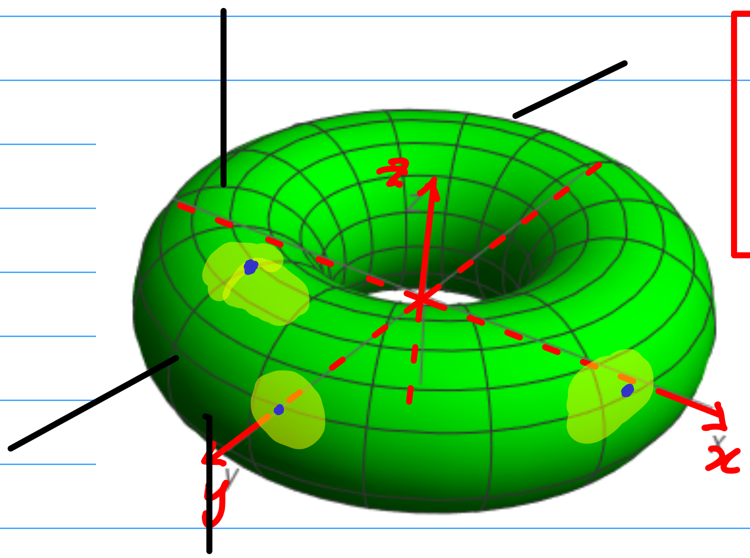
$$\frac{\partial h}{\partial z}(0,1,0) = -\frac{f_z(0,0,1,0)}{f_x(0,0,1,0)} = -\frac{-1}{1} = 1$$

$$\frac{\partial h}{\partial w}(0,1,0) = -\frac{f_w(0,0,1,0)}{f_x(0,0,1,0)} = -\frac{0}{1} = 0$$

DEFINIÇÃO Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ diz-se uma superfície de classe C^k $(k \geq 1)$ se $\forall p \in S$ $\exists U \subseteq \mathbb{R}^3$ aberto tal que $p \in U$ e $U \cap S$ é o gráfico duma função de classe C^k de um dos três tipos

$z = \varphi(x,y)$, $y = \varphi(x,z)$ ou $x = \varphi(y,z)$

definida num aberto de $\mathbb{R}^2$.



As superfícies são objectos de dimensão 2

Toro (exemplo duma superfície)

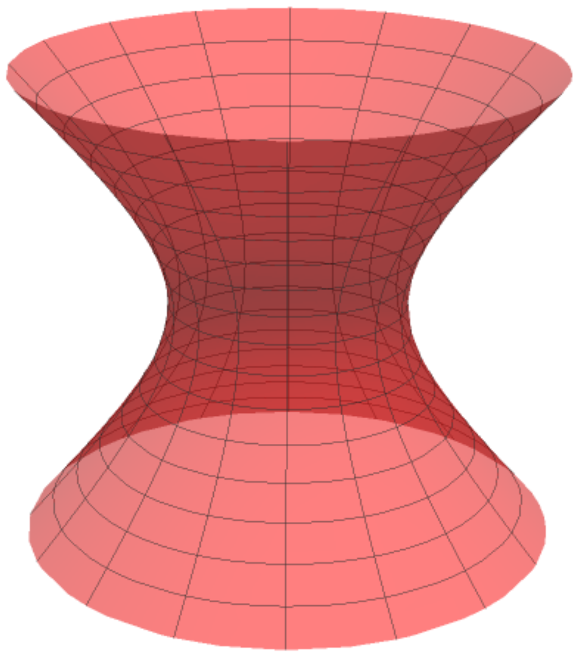
PROPOSIÇÃO Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ função de classe C^k.

$$S = \{(x,y,z) \in D : f(x,y,z) = c\}$$

Se $\nabla f(x,y,z) \neq (0,0,0)$ $\forall (x,y,z) \in S$ então S é uma superfície de classe C^k.

EXEMPLO (HIPERBOLOIDE DE UMA FOLHA)

$$S = \{(x,y,z) : \underbrace{x^2+y^2-z^2}_{f(x,y,z)} = 1\} \qquad f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$



$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)$$

$$\checkmark \begin{cases} (x,y,z) \in S \\ \nabla f(x,y,z) = (0,0,0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = 0 \\ 0 = x^2+y^2-z^2 = 1 \end{cases}$$

IMPOSSÍVEL

Isto mostra que

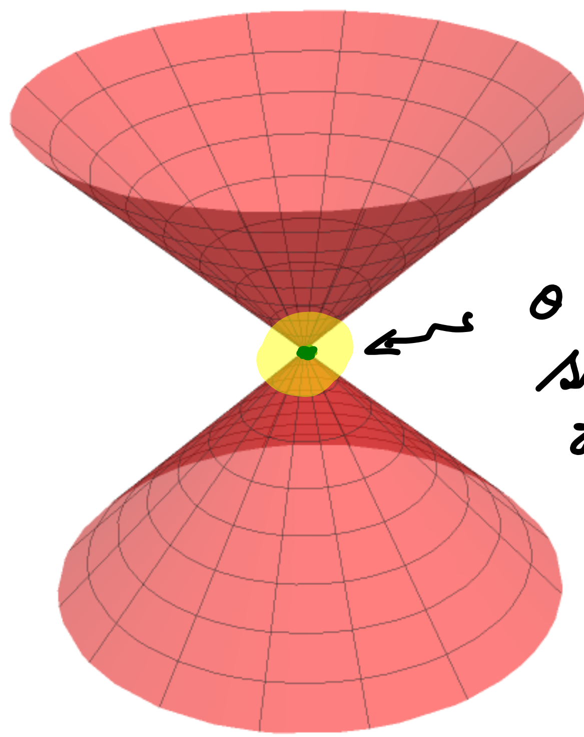
$$(x,y,z) \in S \implies \nabla f(x,y,z) \neq (0,0,0).$$

Logo S é uma superfície. ✓

EXEMPLO (CONE)

$$S = \{(x,y,z) : x^2+y^2-z^2=0\}$$

$f(x,y,z)$ $\quad f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$



o cone tem uma singularidade na origem. Não satisfaz à definição de superfície neste ponto.

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)$$

$$\nabla f(0,0,0) = (0,0,0)$$

EXEMPLO (PONTO)

$$S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=0\} = \{(0,0,0)\}$$

não é uma superfície.

DEFINIÇÃO Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se uma hiper-superfície de classe C^k $(k \geq 1)$ se $\forall p \in S \ \exists U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto tal que $p \in U$ e $U \cap S$ é o gráfico duma função de classe C^k

$$x_i = \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$ (para algum $i = 1, 2, \dots, n$)

definida num aberto de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Uma hiper-superfície em $\mathbb{R}^n$ é um objecto de dimensão $n-1$.

PROPOSIÇÃO Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ função de classe C^k.

$$S = \{ x \in D : f(x) = c \}$$

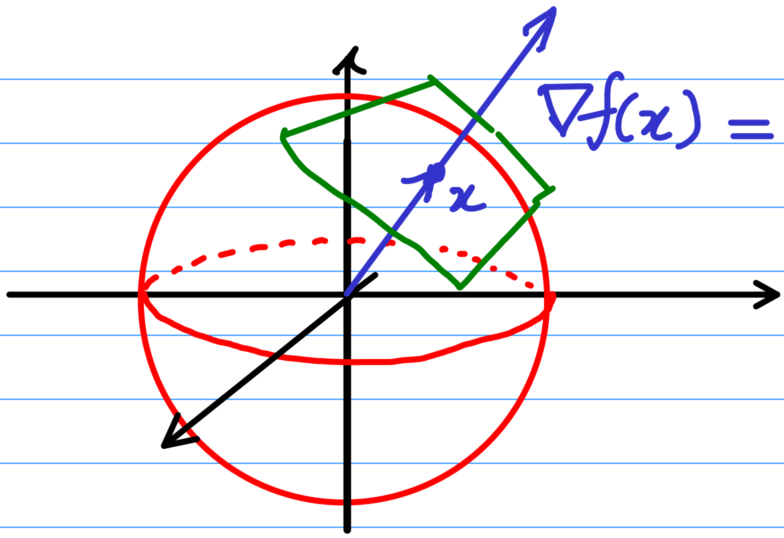
Se $\nabla f(x) \neq 0 \ \forall x \in S$ então

S é uma hiper-superfície de classe C^k.

$x = (x_1, \dots, x_n)$ $\qquad$ $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$

EXEMPLO $S = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 = 1 \}$

é uma hiper-superfície em $\mathbb{R}^n$



EXEMPLO

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \iff$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\iff$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

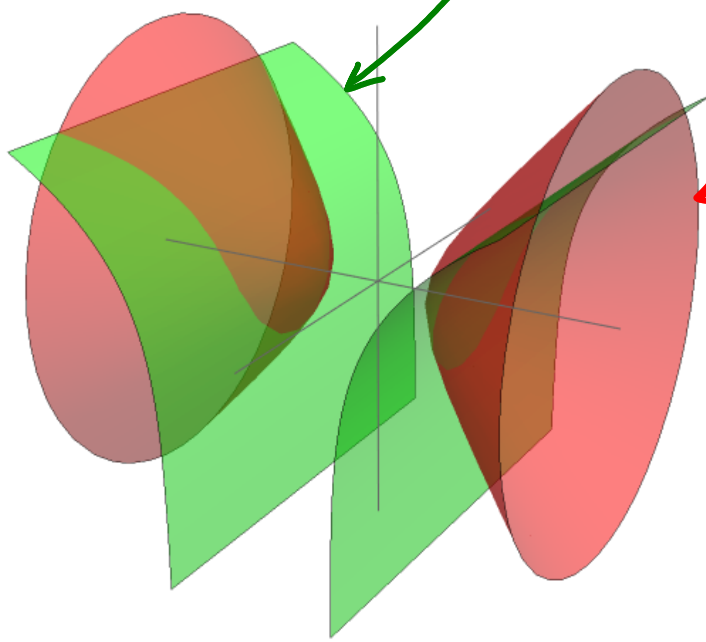
$\iff$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - z \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

EXEMPLO

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 = 1 \\ x^2 - e^z = z \end{cases}$$



hiperboloide de duas folhas

$p = (\sqrt{3}, \sqrt{2}, 0)$ satisfaz o sistema

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad f\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 - z^2 \\ x^2 - e^z \end{bmatrix}$

$$J_f = \begin{bmatrix} 2x & -2y & -2z \\ 2x & 0 & -e^z \end{bmatrix}$$

$$J_f(\sqrt{3}, \sqrt{2}, 0) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & -2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

f diferenciável em $p \implies$

$$f\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \underbrace{\cancel{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}}_{f(p)} + \underbrace{\begin{bmatrix}2\sqrt{3} & -2\sqrt{2} & 0\\ 2\sqrt{3} & 0 & -1\end{bmatrix}}_{J_f(p)} \underbrace{\begin{bmatrix}x-\sqrt{3}\\y-\sqrt{2}\\z-0\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}-p} + \underbrace{\cdots}_{o\left(\left\|\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}-p\right\|\right) \text{ quando } \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\to p} = \cancel{\overbrace{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}^{c}}$$

$\iff$

$$\begin{array}{ccc}\frac{\partial f}{\partial x}\downarrow & \frac{\partial f}{\partial y}\downarrow & \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix}\underbrace{\begin{matrix}2\sqrt{3} & -2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{3} & 0\end{matrix}}_{\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}} & \begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-\sqrt{3}\\y-\sqrt{2}\\z-0\end{bmatrix} + \cdots = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$\iff$

$$\begin{bmatrix}2\sqrt{3} & -2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{3} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-\sqrt{3}\\y-\sqrt{2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}z = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} + \cdots$$

$\iff$

$$\begin{bmatrix}x-\sqrt{3}\\y-\sqrt{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\sqrt{3} & -2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{3} & 0\end{bmatrix}^{-1}\left(-z\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} + \cdots\right)$$

$\iff$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{3}\\\sqrt{2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\sqrt{3} & -2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{3} & 0\end{bmatrix}^{-1}\left(-z\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} + \cdots\right)$$

termos não lineares que dependem de x e y

TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA (III)

$f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$ classe C^k

$(x_0, y_0, z_0) \in D$ $\qquad$ $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$

(1) $f_i(x_0, y_0, z_0) = c_i \quad (i = 1, 2)$

(2) $\det \left. \dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0$

Então existe um aberto $W \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $(x_0, y_0, z_0) \in W$ e o sistema de equações

$\begin{cases} f_1(x, y, z) = c_1 \\ f_2(x, y, z) = c_2 \end{cases}$ define implicitamente funções de classe C^k $\quad x = \varphi(z)$, $y = \psi(z)$

definidas num aberto $U \subseteq \mathbb{R}$ tais que

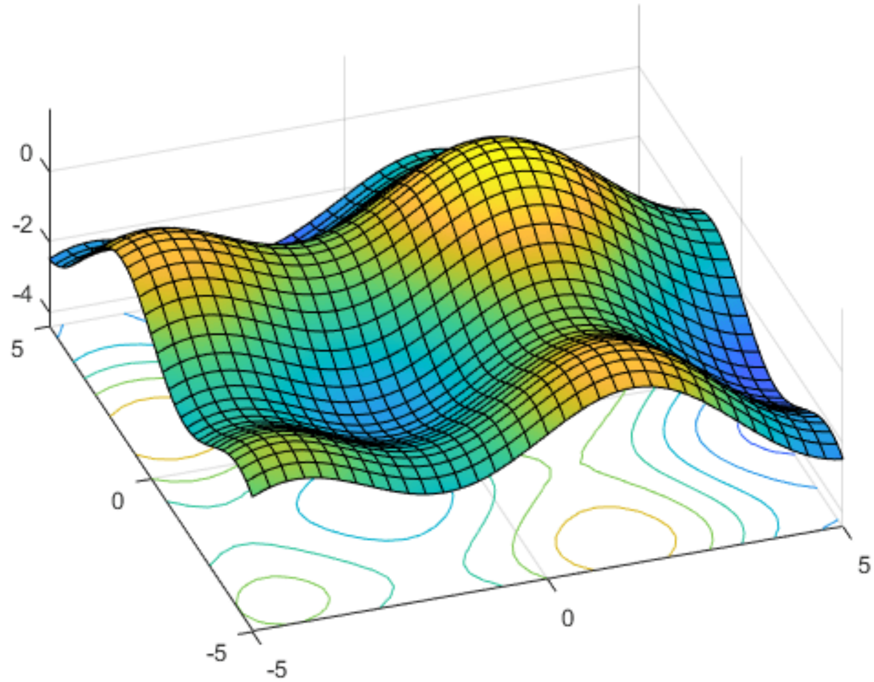
$z_0 \in U$, $x_0 = \varphi(z_0)$, $y_0 = \psi(z_0)$.

17-03-2021

O gráfico duma função de classe C^k $f(x,y)$ de duas variáveis

$$z = f(x,y)$$

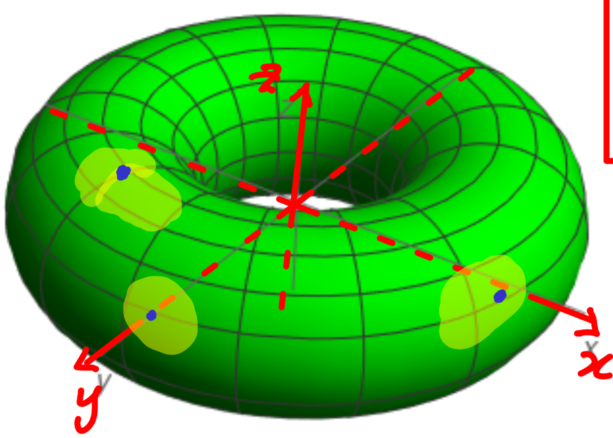
é o paradigma daquilo a que chamamos uma superfície de classe C^k.



DEFINIÇÃO Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ diz-se uma superfície de classe C^k $(k \geq 1)$ se $\forall p \in S$ $\exists U \subseteq \mathbb{R}^3$ aberto tal que $p \in U$ e $U \cap S$ é o gráfico duma função de classe C^k de um dos três tipos

$$z = \varphi(x,y), \quad y = \varphi(x,z) \quad \text{ou} \quad x = \varphi(y,z)$$

definida num aberto de $\mathbb{R}^2$.



As superfícies são objectos de dimensão 2

PROPOSIÇÃO Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ função de classe C^k.

$$S = \{(x,y,z) \in D : f(x,y,z) = c\}$$

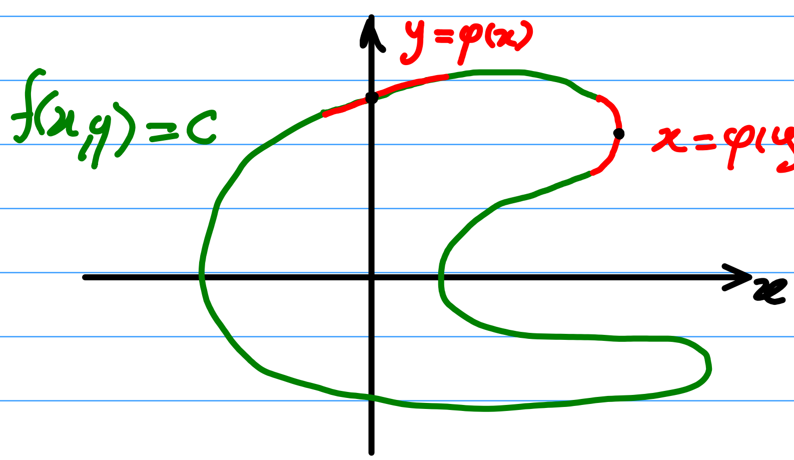
Se $\nabla f(x,y,z) \neq (0,0,0)$ $\forall (x,y,z) \in S$

então S é uma superfície de classe C^k.

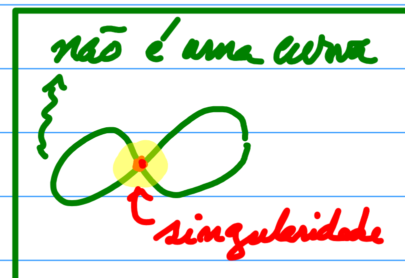
DEFINIÇÃO Um conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^2$ diz-se uma curva de classe C^k $(k \geq 1)$ se $\forall p \in C$ $\exists U \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto tal que $p \in U$ e $U \cap C$ é o gráfico duma função de classe C^k de um dos dois tipos

$$y = \varphi(x) \quad \text{ou} \quad x = \varphi(y)$$

definida num aberto de $\mathbb{R}$.



As curvas são objectos de dimensão 1



PROPOSIÇÃO Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função de classe C^k.

$$C = \{(x,y) \in D : f(x,y) = c\}$$

Se $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$ $\quad \forall (x,y) \in C$

então C é uma curva de classe C^k.

Produto externo de vectores em $\mathbb{R}^3$

$u=(u_1,u_2,u_3) \qquad v=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3$

$$u\times v=(u_2v_3-u_3v_2,\ u_3v_1-u_1v_3,\ u_1v_2-u_2v_1)$$

$$=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \leftarrow \text{vectores da base canónica}$$

Propriedades algébricas

$\forall u,u',v\in\mathbb{R}^3$

$\forall \lambda\in\mathbb{R}$

(1) $u\times v=-v\times u$

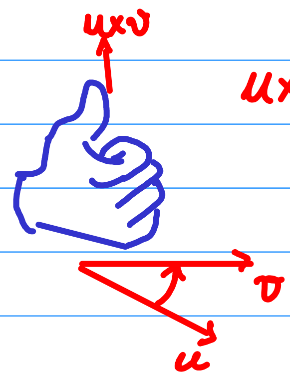
(2) $(u+u')\times v=u\times v+u'\times v$

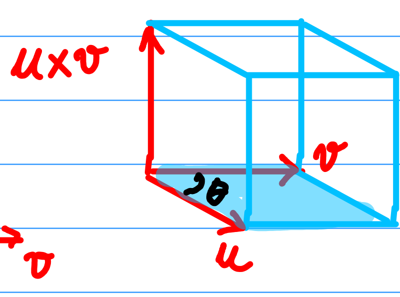
(3) $(\lambda u)\times v=\lambda(u\times v)$

(4) $u\times v=0 \iff u,v$ são colineares

Propriedades geométricas

Regra da mão direita





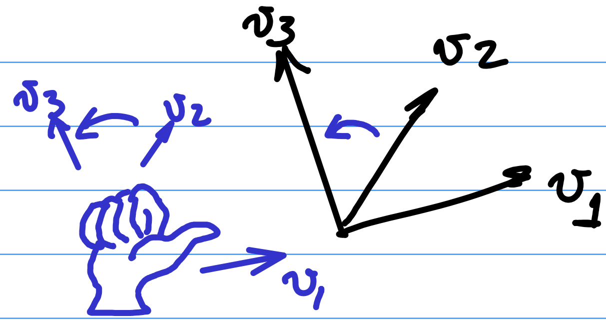
(1) $u\times v \perp \{u,v\}$

(2) $\|u\times v\|=\|u\|\|v\|\sin\theta \qquad \theta=\measuredangle(u,v)$

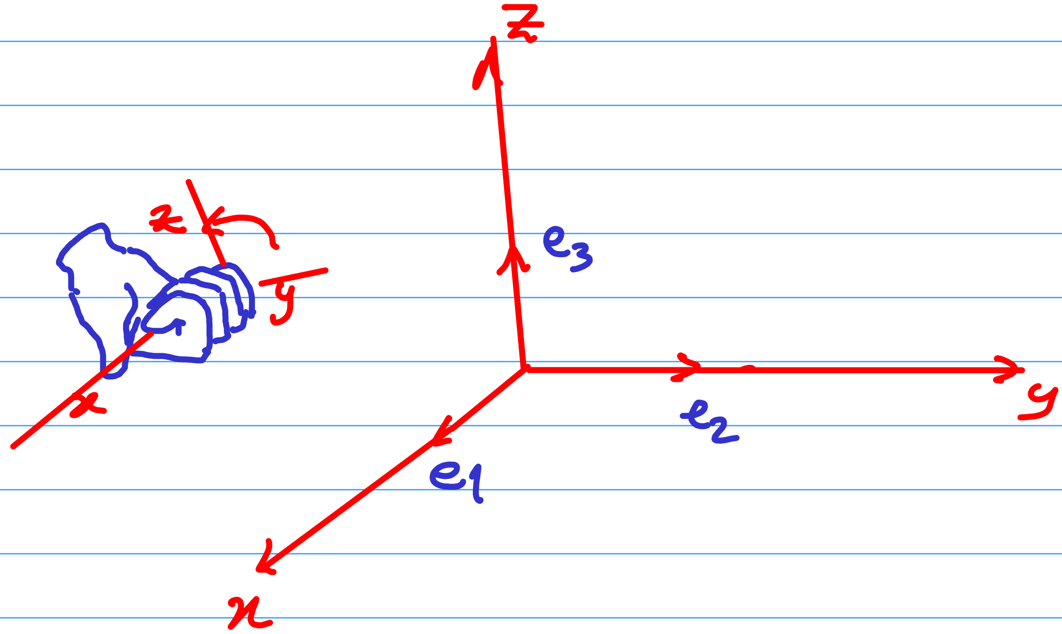
(3) $u\times v\neq 0 \Rightarrow \{u\times v,u,v\}$ base positiva

$\{v_1, v_2, v_3\}$ diz-se uma base positiva

se $\det\left[v_1 \mid v_2 \mid v_3\right] > 0$



Para a regra da mão direita estar correcta os eixos do referêncial Oxyz têm de ser representados de acordo com a mesma convenção.



DEFINIÇÃO $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superfície de classe C^1

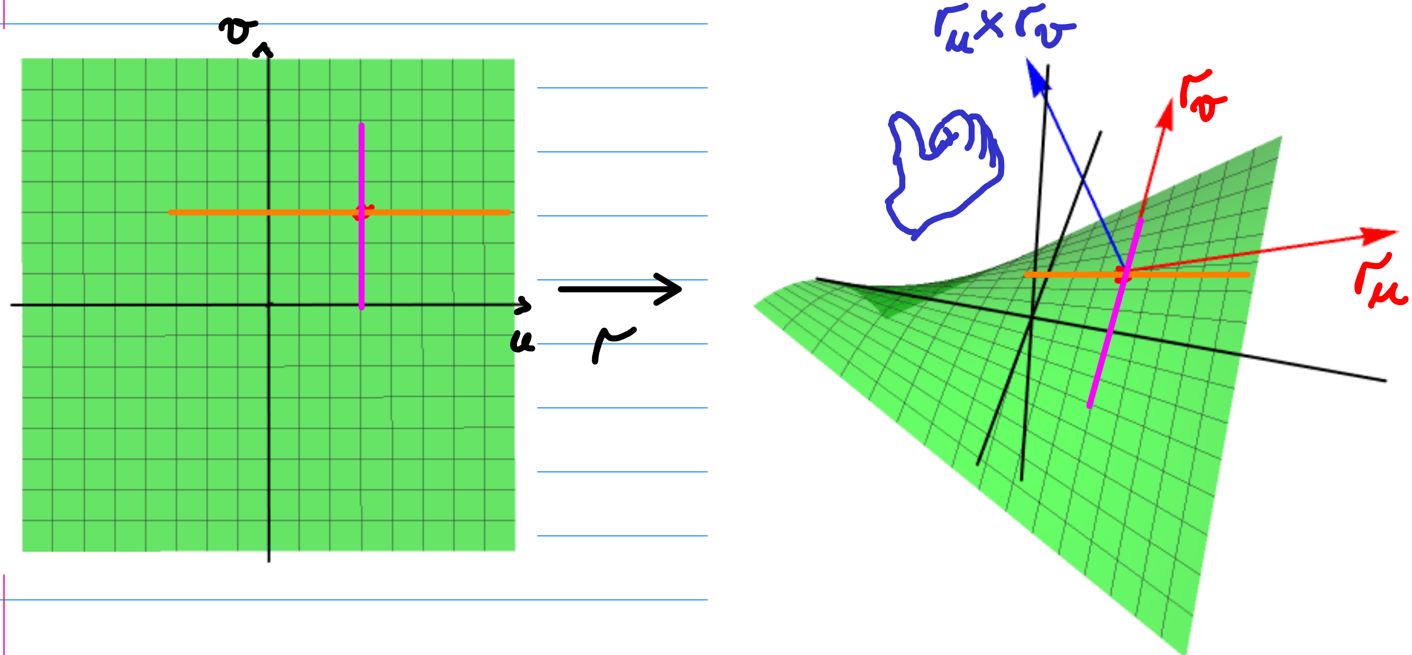
Chama-se parametrização regular de S a uma aplicação $r: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 tal que

(1) $r(u,v) \in S \quad \forall (u,v) \in D$

(2) $D \ni (u,v) \mapsto r(u,v)$ é injectiva

(3) $\left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right)(u,v) \neq (0,0,0) \quad \forall (u,v) \in D$

O contradomínio $r(D) \subseteq S$ diz-se a porção de superfície S parametrizada por $r: D \to \mathbb{R}^3$.



A condição (3) significa que os vectores tangentes à superfície S $\frac{\partial r}{\partial u}$ e $\frac{\partial r}{\partial v}$ são linearmente independentes.

EXEMPLO 1 (GRÁFICO DUMA FUNÇÃO)

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, \ z = f(x,y)\}$

$r : D \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad r(u,v) = (u, v, f(u,v))$

$r_u = (1, 0, f_x)$

$r_v = (0, 1, f_y)$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x e_1 - f_y e_2 + e_3$$

$$= (-f_x(u,v), -f_y(u,v), 1) \neq (0,0,0)$$

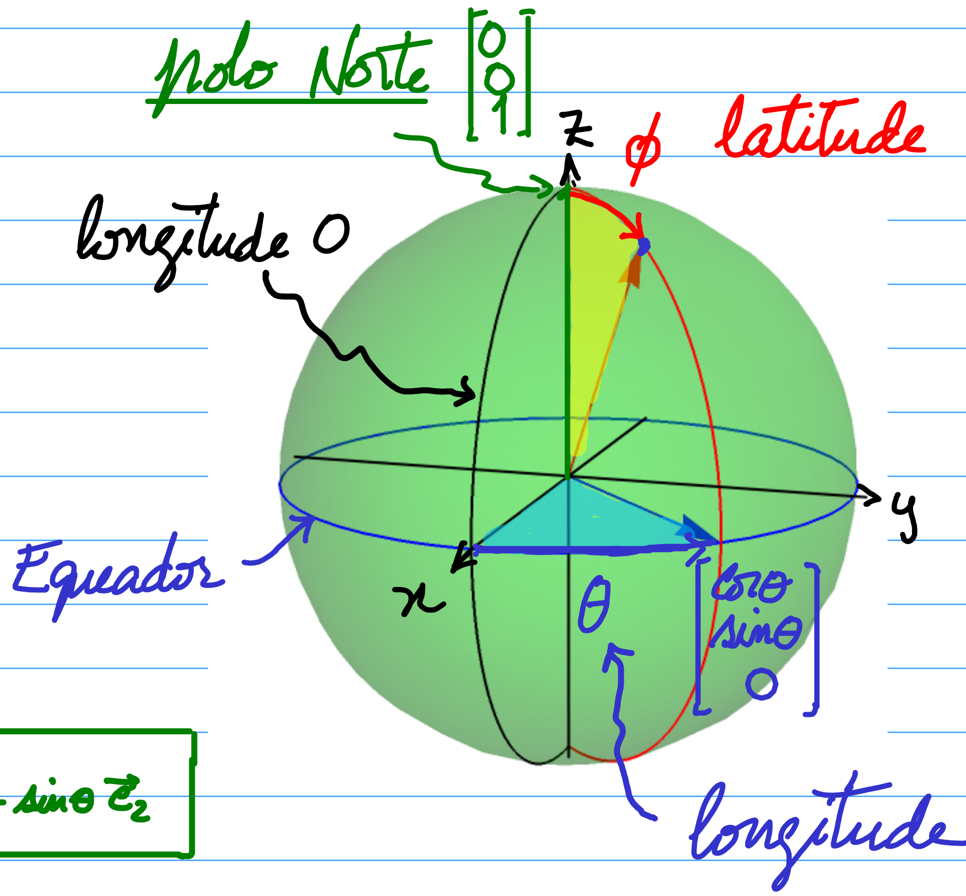
EXEMPLO 2 (A ESFERA)

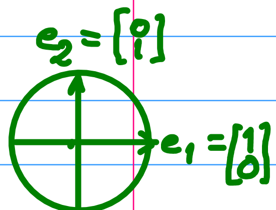
$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

$r :]0, \frac{\pi}{2}[\times]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$r(\phi, \theta) = \cos\phi \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \sin\phi \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= (\sin\phi \cos\theta,\ \sin\phi \sin\theta,\ \cos\phi)$$





$$(\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta\, \vec{e}_1 + \sin\theta\, \vec{e}_2$$

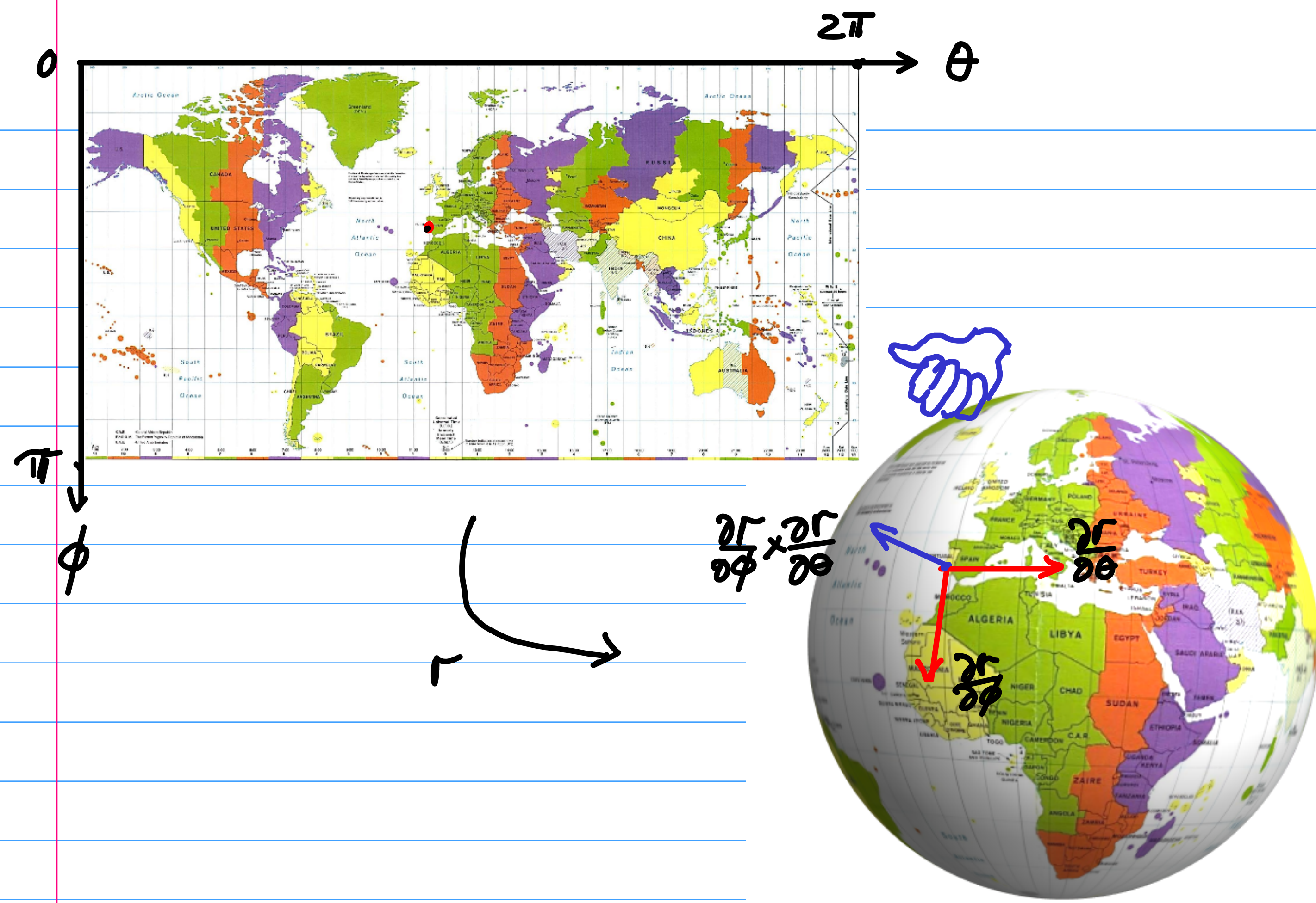
$$r_\phi = (\cos\phi \cos\theta,\ \cos\phi \sin\theta,\ -\sin\phi)$$

$$r_\theta = (-\sin\phi \sin\theta,\ \sin\phi \cos\theta,\ 0)$$

$$r_\phi \times r_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\phi \cos\theta & \cos\phi \sin\theta & -\sin\phi \\ -\sin\phi \sin\theta & \sin\phi \cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\sin^2\phi \cos\theta,\ \sin^2\phi \sin\theta,\ \cos\phi \sin\phi)$$

$$\| r_\phi \times r_\theta \| = \sqrt{\sin^4\phi + \cos^2\phi \sin^2\phi} = \sin\phi > 0$$



OS LADOS DUMA SUPERFÍCIE — ORIENTAÇÕES

Tal como uma folha de papel tem 2 lados, localmente toda a superfície tem também 2 lados.

✓ Dada uma superfície S e uma parametrização regular $r: D \to S$ a porção de superfície $r(D)$ tem um lado especificado pelo vetor normal $\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v} \neq (0,0,0)$.

✓ No gráfico duma função $z = f(x,y)$ a parametrização $r(u,v) = (u, v, f(u,v))$ determina o vector normal

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = (-f_x, -f_y, \underbrace{1}_{>0})$$ que aponta para cima e determina o lado de cima do gráfico.

✓ Na esfera a parametrização definida $r(\phi, \theta)$ determina o vector normal

$$\frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} = \sin\phi \cdot r(\phi, \theta)$$ que aponta para fora da esfera especificando assim o lado de fora.

✓ Numa superfície de nível

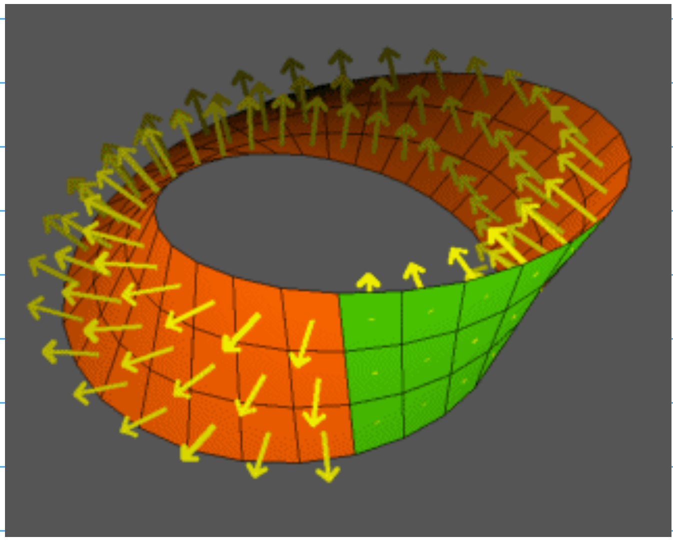
$$S = \{(x,y,z) : f(x,y,z) = c\}$$

onde $\nabla f(x,y,z) \neq (0,0,0) \quad \forall (x,y,z) \in S$

o vector gradiente determina globalmente um lado da superfície S.

DEFINIÇÃO Uma superfície S diz-se orientável se existir uma função contínua $N: S \to \mathbb{R}^3$ tal que $N(x,y,z) \neq (0,0,0)$ é ortogonal a S em todo o ponto $(x,y,z) \in S$. Por outras palavras S deve ter (globalmente) 2 lados.

EXEMPLO A BANDA DE MÖBIUS tem apenas um lado. Trata-se duma superfície não orientável.



19-03-2021

Desenvolvimentos de Taylor

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ classe C^∞ $\quad a \in I$

Os desenvolvimentos de Taylor duma função f(x) num ponto $a \in I$ são aproximações de f(x) por funções polinomiais numa vizinhança desse ponto.

Notação de Landau

$f, g: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$, $g(x) > 0 \ \forall x \neq a$

o-pequeno

$f(x) = o(g(x)) \quad x \to a$

se $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

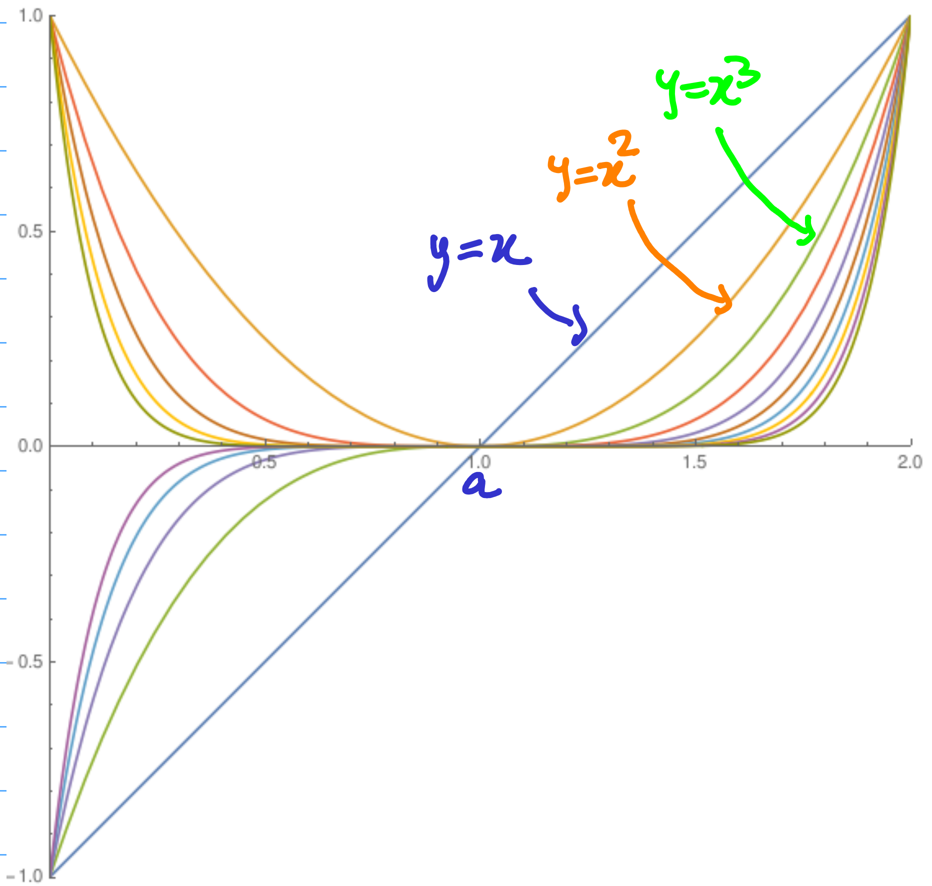
Tangências de ordem $n \geq 1$

$f, g : I \to \mathbb{R}$ $\quad a \in I$

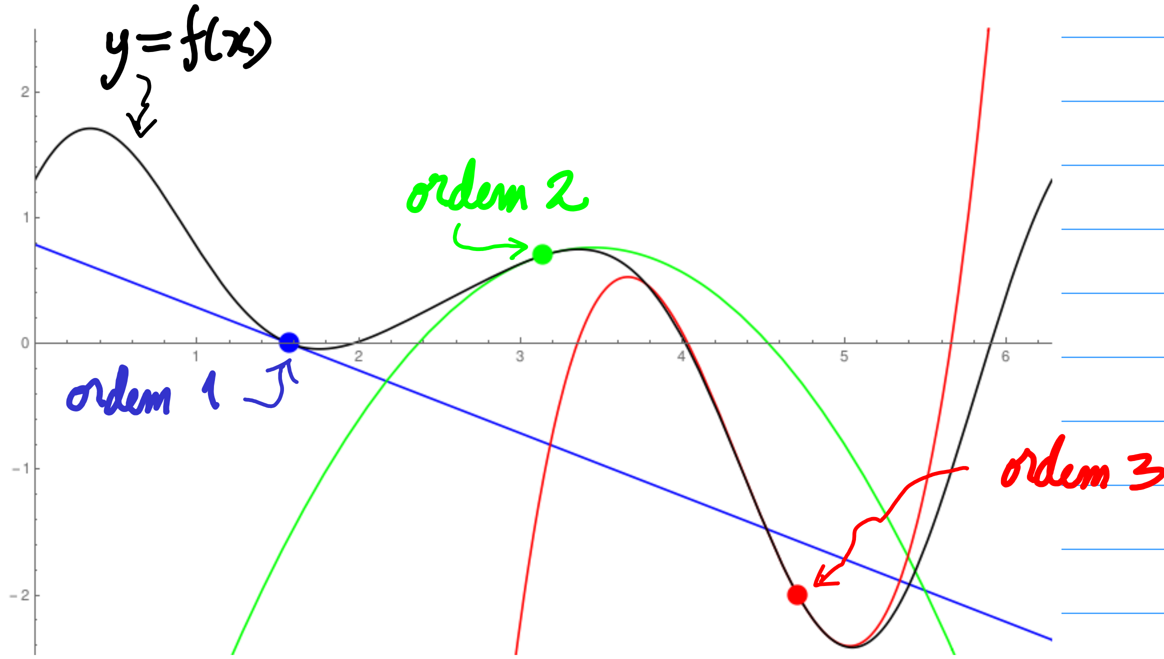
As funções $f(x)$ e $g(x)$ dizem-se tangentes de ordem $n \in \mathbb{N}$ em $x = a$ se

$$f(x) - g(x) = o((x-a)^n) \qquad x \to a$$

ou seja $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^n} = 0.$



Gráficos das funções $(x-a)^n \qquad 1 \leq n \leq 10.$



PROPOSIÇÃO $\quad f, g : I \to \mathbb{R}$ classe C^n $(n \geq 1)$

$a \in I$, $\quad f(x) - g(x) = o\left((x-a)^n\right) \quad (x \to a)$

$$\iff f^{(i)}(a) = g^{(i)}(a) \quad \forall\, i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

PROVA

$$0 \overset{?}{=} \lim_{x \to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = \frac{0}{0} \iff f(a) = g(a)$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - g'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \frac{0}{0} \iff f'(a) = g'(a)$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f''(x) - g''(x)}{n(n-1)(x-a)^{n-2}} = \frac{0}{0} \iff f''(a) = g''(a)$$

$$= \lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} \frac{f^{(n)}(x)-g^{(n)}(x)}{n!(x-a)^0} = \frac{0}{n!} \iff f^{(n)}(a)=g^{(n)}(a)$$

$$(x-a)^0 = 1$$

$\blacksquare$

PROBLEMA

Dados números reais $a, c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

Como encontrar um polinómio $p(x)$ de grau $\leq n$

tal que $p(a)=c_0,\ p'(a)=c_1, \dots,\ p^{(n)}(a)=c_n$?

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x-a)^n}{n!}\right] = \frac{\cancel{n}(x-a)^{n-1}}{\cancel{n}(n-1)!} = \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$(x-a)^0 = 1 \xleftarrow{\frac{d}{dx}} (x-a) \xleftarrow{\frac{d}{dx}} \frac{(x-a)^2}{2} \xleftarrow{\frac{d}{dx}} \frac{(x-a)^3}{6} \xleftarrow{\frac{d}{dx}} \frac{(x-a)^4}{24} \xleftarrow{\frac{d}{dx}} \dots$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{(x-a)^n}{n!}\right]_{x=a} = \begin{cases} 1 & \text{se } k=n \\ 0 & \text{se } k\neq n \end{cases}$$

$$= \frac{(x-a)^{n-k}}{(n-k)!}\Big|_{x=a} =$$

$$p^{(k)}(a) = \frac{d^k}{dx^k}\left[\sum_{j=0}^{n} c_j \frac{(x-a)^j}{j!}\right]_{x=a} = \sum_{j=0}^{n} c_j \frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{(x-a)^j}{j!}\right]_{x=a}$$

$$= 0 + \cdots + 0 + c_k + 0 + \cdots + 0$$
$$= c_k$$

RESPOSTA:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \frac{(x-a)^j}{j!}$$

satisfaz

$$p(a) = c_0,\ p'(a) = c_1,\ p''(a) = c_2,\ \ldots,\ p^{(n)}(a) = c_n$$

DEFINIÇÃO $f: I \to \mathbb{R}$ classe C^n $(n \geq 1)$ $a \in I$

Chama-se polinómio de Taylor de ordem n de $f(x)$ em $x = a$ ao polinómio de grau $\leq n$

$$P_n(x,a) = \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(a) \frac{(x-a)^j}{j!}$$

PROPOSIÇÃO $f: I \to \mathbb{R}$ classe C^n $(n \geq 1)$ $a \in I$

Então $f(x) = P_n(x,a) + o((x-a)^n)$ $x \to a$

O polinómio de Taylor $P_n(x,a)$ é o único polinómio de grau $\leq n$ que tem com $f(x)$ uma tangência de ordem n em $x = a$.

EXEMPLO $f(x) = (1-x)^{-1}$

$f'(x) = (1-x)^{-2}$, $f''(x) = 2(1-x)^{-3}$, $f'''(x) = 3!(1-x)^{-4}$

$$f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-(n+1)} \quad \checkmark$$

$$\underline{f^{(n)}(0)} = \underline{n!} \quad \forall\, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$P_n(x,0) = \sum_{j=0}^{n} j!\,\frac{x^j}{j!} = \sum_{j=0}^{n} x^j = 1 + x + \dots + x^n$$

Logo

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \underbrace{1 + x + x^2 + \dots + x^n}_{\frac{1-x^{n+1}}{1-x}} + o(x^n) \quad (x \to 0)}$$

EXERCÍCIO Mostre que

$$\frac{1}{1-x} - \sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad \forall\, \underline{x \in]-1,1[}$$

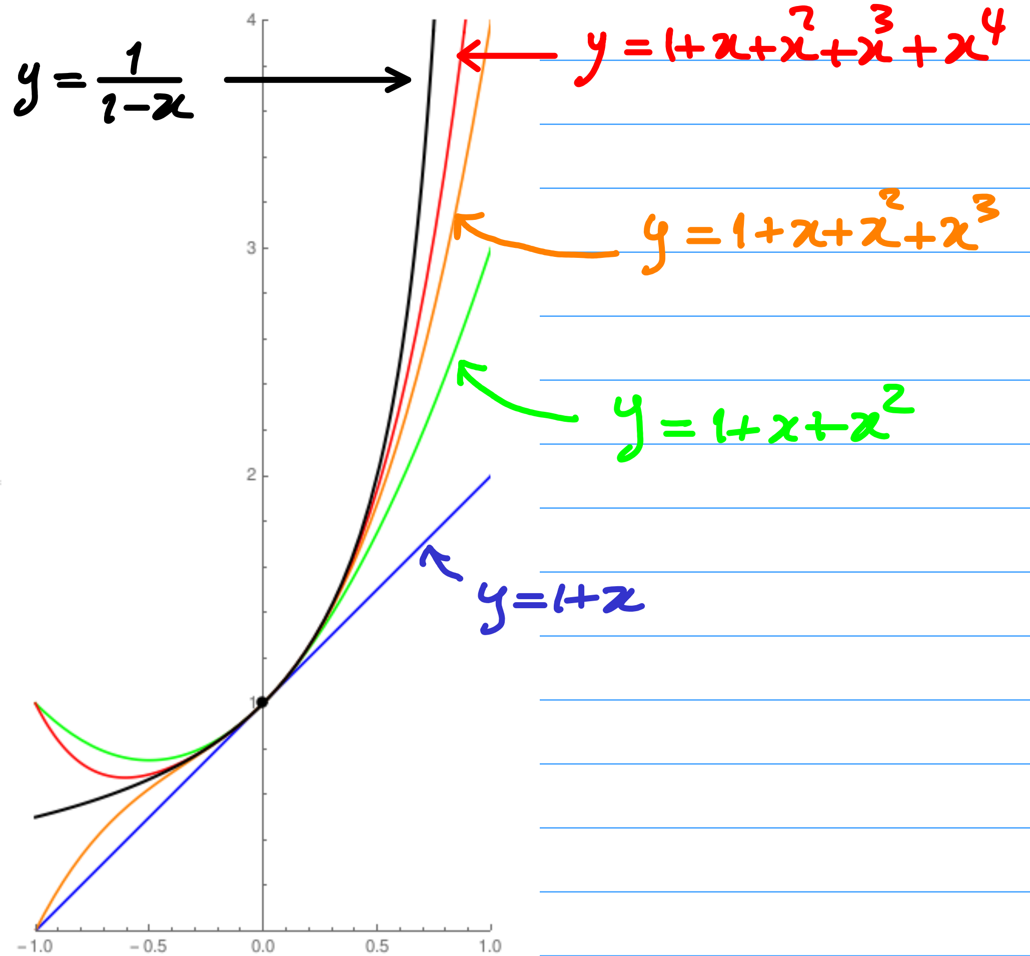
$$= o(x^n) \quad (x \to 0)$$

OUTRO EXEMPLO $f(x) = e^x$

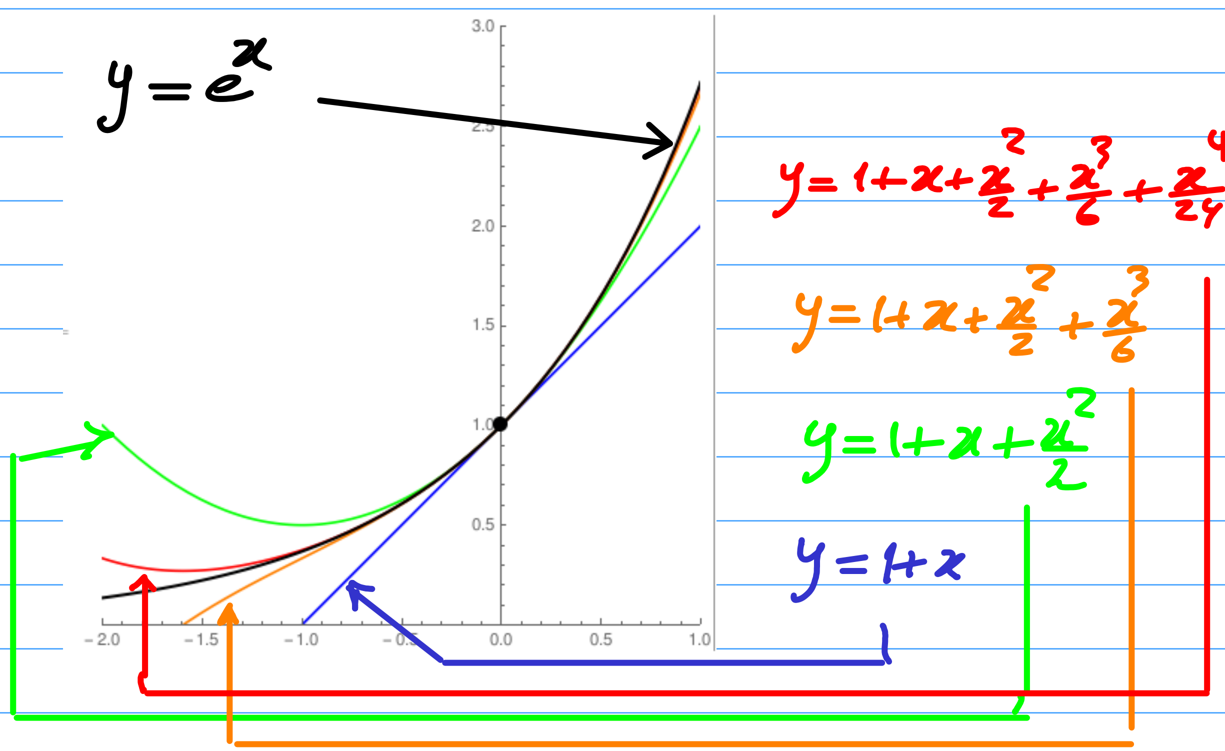
$$f^{(n)}(x) = e^x \implies f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$P_n(x,0) = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$$

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (x \to 0)}$$



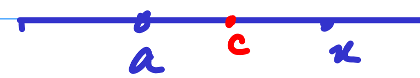
$y = \frac{1}{1-x}$
$y = 1+x+x^2+x^3+x^4$
$y = 1+x+x^2+x^3$
$y = 1+x+x^2$
$y = 1+x$
4
3
2
1
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0



$y = e^x$
$y = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$
$y = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$
$y = 1+x+\frac{x^2}{2}$
$y = 1+x$
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
-2.0
-1.5
-1.0
0.0
0.5
1.0

FÓRMULA DO RESTO DE LAGRANGE

$f: I \to \mathbb{R}$ classe C^{n+1}, $a \in I$



$\forall x \in I \; \exists\, c$ entre a e x tal que

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{P_n(x,a)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{Resto}}$$

PROVA

$$\boxed{f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt}$$

$n = 0$

$$f(a) = 0$$

$$f(x) - \underbrace{f(a)}_{=0} = \int_a^x f'(t)\,dt = \int_a^x \overbrace{\frac{(x-t)^0}{0!}}^{=1} f'(t)\,dt$$

Por hipótese de indução vamos supor que

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \Rightarrow f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$$

Para provar o facto acima, seja $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} tal que $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n)}(a) = 0$.

Por hipótese de indução aplicada a $f'(x)$

$$f'(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$x = s$

$$f(x) = \overbrace{f(a)}^{=0} + \int_a^x f'(s)\,ds$$

$$= \int_a^x \int_a^s \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n+1)}(t)\,dt\,ds$$

$$= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

EXERCÍCIO

FIM DA PROVA POR INDUÇÃO DO FACTO ACIMA.

$$g(x) = f(x) - P_n(x,a)$$

$$g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x) - P_n(x,a) = g(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, g^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Como $\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_{t=a}^{t=x}$

$$= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\int_a^x \cdots\, dt = 1$$

$$= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \int_a^x (n+1)\left(\frac{x-t}{x-a}\right)^{n+1} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(c)$$ para algum c entre a e x

RESTO DE LAGRANGE

$g(t) \geq 1$

$\int_a^b g(t)\,dt = 1$

$\int_a^b g(t) f(t)\,dt =$ média de valores de $f(t)$ com $a \leq t \leq b$ ponderada pelos valores de $g(t)$

$\in \left[\min_{a\leq t\leq b} f(t),\ \max_{a\leq t\leq b} f(t)\right]$ $= f(c)$ para algum $c \in [a,b]$

[redacted]

CÁLCULO DE LIMITES

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1} = \frac{0}{0}$$

$$e^y = 1 + y + o(y) \quad y \to 0$$

$y = x^2$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2) \quad x \to 0$$

$$e^{x^2} - 1 = x^2 + o(x^2) \quad \text{(numerador)}$$

$$\cos' x = -\sin x$$
$$\cos''(x) = -\cos x$$

$$\cos x = \cos 0 + \underbrace{(\cos' 0)}_{=0} x + \underbrace{(\cos'' 0)}_{=-1} \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad x \to 0$$

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad x \to 0 \quad \text{(denom.)}$$

Logo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + o(x^2) \quad (\times \frac{1}{x^2})}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad (\times \frac{1}{x^2})}$$

$$= \frac{1+0}{-\frac{1}{2}+0} = -2$$

APROXIMAÇÕES DE INTEGRAIS

$$g(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ 1 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$ contínua em $[-1, 1]$

Calcule o valor aproximado do integral $\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$ usando um desenvolvimento de Taylor até à ordem 5 da exponencial.

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{120} + \frac{e^{\overset{c = c(t)}{c}}\, t^6}{6!}$$

$$\frac{e^t - 1}{t} = 1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{24} + \frac{t^4}{120} + \frac{e^c t^5}{6!}$$

$$\left| \int_{-1}^{1} g(t)\,dt - \int_{-1}^{1} \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{24} + \frac{t^4}{120}\right) dt \right|$$

$$= \left| \int_{-1}^{1} g(t) - \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{24} + \frac{t^4}{120}\right) dt \right|$$

$$\leq \int_{-1}^{1} \left| \frac{e^c t^5}{6!} \right| dt \leq \frac{e}{3 \times 6!} < 0.001259$$

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,dt = 2 + \frac{1}{9} + \frac{1}{300} \text{ com erro}$$

EXTREMOS LOCAIS

$f: I \to \mathbb{R}$ classe C^2 $\qquad a \in I$

a diz-se um ponto crítico de $f(x)$ se

$$f'(a) = 0$$

Num ponto crítico $x = a$

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2) \quad (x \to a)$$

$f''(a) > 0 \implies f(x) > f(a)$ $\forall x \neq a$ numa vizinhança de a

$\Updownarrow$

$x = a$ é um mínimo local

$f''(a) < 0 \implies f(x) < f(a)$ $\forall x \neq a$ numa vizinhança de a

$\Updownarrow$

$x = a$ é um máximo local

23-03-2021

Desenvolvimentos de Taylor de funções a várias variáveis

$g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad 0 \in I$

$$g(t) = \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} t^j}_{} + o(|t|^k) \qquad t \to 0$$

$$P_k(t,0) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2} t^2 + \cdots + \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k$$

polinómio de Taylor de ordem k
em t=0

DERIVADAS SEGUNDO VECTORES DE ORDEM SUPERIOR

$$f'_v(x) = \nabla f(x) . v = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$$

$$= \underbrace{\left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)}_{} [f(x)]$$

$$\boxed{D_v = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}}$$

EXEMPLO

$$D_{(-2,3)} [e^{x-y}] = (-2) \frac{\partial}{\partial x} [e^{x-y}] + 3 \frac{\partial}{\partial y} [e^{x-y}]$$

$$= -2e^{x-y} + 3(-1)e^{x-y} = -5e^{x-y}$$

$$D^2_{(-2,3)}[e^{x-y}] = D_{(-2,3)}[-5e^{x-y}]$$

$$= -5\, D_{(-2,3)}[e^{x-y}] = (-5)(-5)\, e^{x-y}$$

$$= 25\, e^{x-y}$$

derivada de 2ª ordem segundo o vetor $(-2,3)$

<u>Notação alternativa</u>:

$$f''_v(a) = D^2_v f(a) = D_v D_v [f(x)]\Big|_{x=a}$$

$$= D_v \Big[\textstyle\sum_{j=1}^{n} v_j f_{x_j}(x)\Big]_{x=a}$$

$$= \textstyle\sum_{j=1}^{n} v_j\, D_v [f_{x_j}(x)]_{x=a}$$

$$= \textstyle\sum_{j=1}^{n} v_j \Big(\sum_{i=1}^{n} v_i\, (f_{x_j})_{x_i}(a)\Big)$$

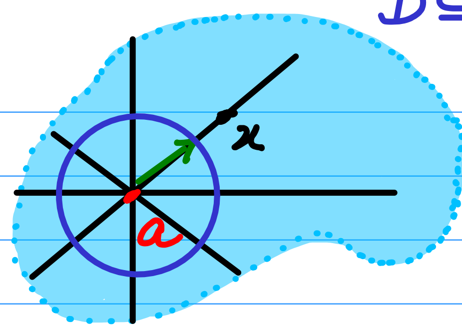
$$= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} v_j v_i\, f_{x_j x_i}(a)$$

$$\boxed{f''_v(x) = \sum_{i,j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)}$$

Polinómio homogéneo de grau 2 em $(v_1, \cdots, v_n)$.

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ classe C^k $(k \geq 1)$

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto



$a \in D$

Desenvolvimento de Taylor de $g(t) = f(a+tv)$ em $t=0$.

$$g(t) = \underbrace{g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2}t^2 + \cdots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}t^k}_{P_k(t,0)} + o(|t|^k) \quad t \to 0$$

$$x = a + tv \in D \longrightarrow \frac{dx}{dt} = v$$

$$g(t) = f(a+tv)$$

$$g'(t) = v \cdot \nabla f(a+tv) = (D_v f)(a+tv)$$

$$g''(t) = D_v(D_v f)(a+tv) = D_v^2 f(a+tv)$$

$$\cdots$$

$$g^{(k)}(t) = D_v^k f(a+tv) = f_v^{(k)}(a+tv)$$

Fazendo $t=0$

$$g^{(j)}(0) = D_v^{(j)} f(a) = f_v^{(j)}(a)$$

onde $$f_v^{(k)}(a) = D_v^k[f(x)]_{x=a}$$
$$= \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^k [f(x)]_{x=a}$$
$$= \sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{n}\cdots\sum_{j_k=1}^{n} v_{j_1} v_{j_2}\cdots v_{j_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_k}}(a)$$

é um polinómio homogéneo de grau k em $(v_1, \dots, v_n)$

Supondo que $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de classe C^{k+1}

e que $v = x - a$, $x = a + v$ $(t=1)$

$$f(x) = f(a+v) = g(1).$$

Pela Fórmula do Resto de Lagrange existe $0 \le t_0 \le 1$ tal que

$$g(1) = g(0) + g'(0)(1-0) + \dots + \frac{g^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k + \frac{g^{(k+1)}(t_0)}{(k+1)!}(1-0)^{k+1}$$

$$\|$$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} f_{x-a}^{(j)}(a)}_{\text{Polinómio de Taylor de ordem k em x=a}} + \underbrace{\frac{1}{(k+1)!} f_{x-a}^{(k+1)}(a + t_0(x-a))}_{\text{Resto de Taylor de odem k em x=a}}$$

$$P_k(x,a) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} f_{x-a}^{(j)}(a) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \left(\sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} (x_{j_1}-a_{j_1})\dots(x_{j_k}-a_{j_k}) \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_k}}(a) \right)$$

diz-se o polinómio de Taylor de ordem k no ponto a.

$$R_k(x,a) = f(x) - P_k(x,a)$$

diz-se o resto de Taylor de ordem k no ponto a.

$\exists\ c = a + t_0(x-a) \in$ segmento de recta que liga a a x.

$$\boxed{R_k(x,a) = \frac{1}{(k+1)!} f_{x-a}^{(k+1)}(c)}$$

PROPOSIÇÃO $\quad R_k(x,a) = o(\|x-a\|^k) \quad (x \to a)$

$$\frac{|R_k(x,a)|}{\|x-a\|^k} \leq \frac{1}{(k+1)!} \sum_{j_1,\dots,j_{k+1}=1}^{n} \frac{\overbrace{|x_{j_1}-a_{j_1}|\cdots|x_{j_{k+1}}-a_{j_{k+1}}|}^{\text{grau } k+1}}{\|x-a\|^k} \underbrace{\left|\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_{k+1}}}\right|}_{\text{limitada}}$$

grau k

$\underline{x \to a}$ $\qquad \downarrow$

0

EXEMPLO Determine o polinómio de Taylor de ordem 2 de $f(x,y) = e^{xy+y}$ em $(x,y)=(0,0)$.

$$f(0,0) = e^0 = 1$$

$$f_x = y\, e^{xy+y} \qquad f_y = (1+x)\, e^{xy+y}$$

$$f_x(0,0) = 0 \qquad f_y(0,0) = 1$$

$$f_{xx} = y^2 e^{xy+y} \qquad f_{yy} = (1+x)^2 e^{xy+y}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = (1+x)y\, e^{xy+y} + e^{xy+y}$$

$$f_{xx}(0,0) = 0, \quad f_{yy}(0,0) = 1, \quad f_{xy}(0,0) = 1$$

LOGO

$$f(x,y) = f(0,0) + x f_x(0,0) + y f_y(0,0)$$

$$+ \frac{1}{2}\left[x^2 f_{xx}(0,0) + 2xy f_{xy}(0,0) + y^2 f_{yy}(0,0) \right] + o(\|(x,y)\|^2)$$

$$= 1 + y + \frac{1}{2}\left(2xy + y^2\right) + o(\|(x,y)\|^2) \quad (x,y)\to(0,0)$$

$$P_2(x,y) = 1 + y + xy + \frac{1}{2}y^2$$

EXEMPLO Ache o desenvolvimento de Taylor de ordem 3 de $f(x,y) = 1+3x^2+xy+y^2+x^3$ no ponto $(x,y)=(1,2)$

$f(1,2) = 11$

$f_x = 6x+y+3x^2$ $\qquad$ $f_y = x+2y$

$f_x(1,2) = 11$ $\qquad$ $f_y(1,2) = 5$

$f_{xx} = 6+6x$ $\qquad$ $f_{yy} = 2$ $\qquad$ $f_{xy} = 1$

$f_{xx}(1,2) = 12$ $\qquad$ $f_{yy}(1,2) = 2$ $\qquad$ $f_{xy}(1,2) = 1$

$f_{xxx} = 6$ As restantes derivadas parciais de ordem 3 ou ≥ 4 são todas nulas.

$$P_3((x,y),(1,2)) = 11 + 11(x-1) + 5(y-2) + \frac{1}{2}\left[12(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) + 2(y-2)^2\right] + \frac{1}{6}\left[6(x-1)^3 + 0\right]$$

$$= 11 + 11(x-1) + 5(y-2) + 6(x-1)^2 + (x-1)(y-2) + (y-2)^2 + (x-1)^3$$

$f(x,y)$ polinómio de grau 3 $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow f_{xxxx} = f_{xxxy} = f_{xxyy} = f_{xyyy} = f_{yyyy} = 0$$

$$\Longrightarrow R_4((x,y),(1,2)) = 0$$

$$\Longrightarrow f(x,y) = P_3((x,y),(1,2))$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{BINÓMIO DE NEWTON}} \\ AB = BA \quad \Longrightarrow \quad (A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j} \end{array}}$$

$$f''_{x-a}(a) = (D_{x-a})^2 f\big|_{x=a}$$

$$= \Big(\underbrace{(x_1-a_1)\frac{\partial}{\partial x_1}}_{A} + \underbrace{(x_2-a_2)\frac{\partial}{\partial x_2}}_{B}\Big)^2 f\Big|_{x=a}$$

$$= (A + B)^2 f\big|_{x=a}$$

$$= (A^2 + 2AB + B^2) f\big|_{x=a}$$

$$= \left((x_1-a_1)^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2(x_1-a_1)(x_2-a_2)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + (x_2-a_2)^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) f\Big|_{x=a}$$

$$= (x_1-a_1)^2 f_{x_1x_1}(a) + 2(x_1-a_1)(x_2-a_2) f_{x_1x_2}(a) + (x_2-a_2)^2 f_{x_2x_2}(a)$$

24-03-2021

Extremos

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ classe C^k $(k \geq 1)$

DEFINIÇÕES $a \in D$ diz-se

um máximo global (ou absoluto) se

$\forall x \in D \quad f(x) \leq f(a)$.

um mínimo global (ou absoluto) se

$\forall x \in D \quad f(a) \leq f(x)$.

um máximo local (ou relativo) se $\exists \varepsilon > 0$

tal que $\forall x \in D \cap B_\varepsilon(a) \quad f(x) \leq f(a)$

um mínimo local (ou relativo) se $\exists \varepsilon > 0$

tal que $\forall x \in D \cap B_\varepsilon(a) \quad f(a) \leq f(x)$

Em qualquer dos casos anteriores dizemos que a é um extremo local ou global de f.

TEOREMA (FERMAT) $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

função diferenciável, $a \in \operatorname{int}(D)$.

a extremo local de $f \implies \nabla f(a) = 0$.

PROVA

Se $\nabla f(a) \neq 0$, tomando $v = \dfrac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$

temos

$$f'_v(a) = \|\nabla f(a)\| > 0$$

i.e. $\quad f(a + t_- v) < f(a) < f(a + t_+ v)$

$\forall \quad t_- < 0 < t_+$ suficientemente pequenos

$$\Downarrow$$

a não é extremo local de f

$\blacksquare$

DEFINIÇÃO $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável

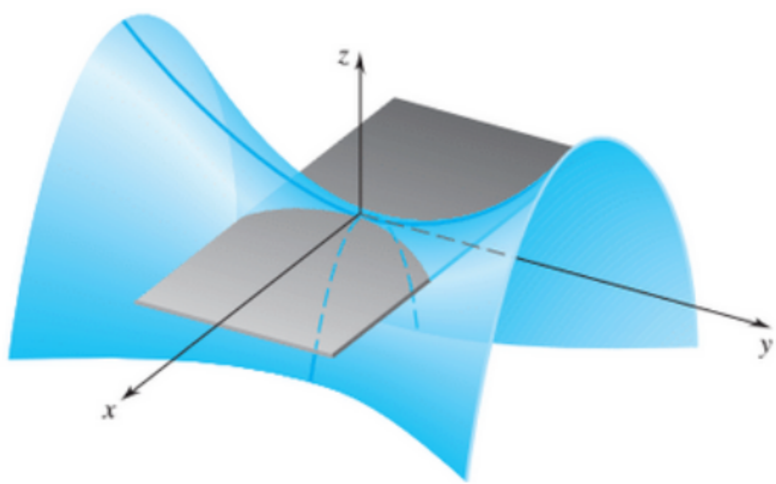
$a \in \operatorname{int}(D)$ diz-se um ponto crítico de f se

$\nabla f(a) = 0$.

Todo o extremo local é um ponto crítico de f mas nem todo o ponto crítico de f é um extremo local.

EXEMPLO $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = y^2 - x^2$

$\nabla f(x,y) = (-2x, 2y)$ $\nabla f(0,0) = (0,0)$



$(0,0)$ é ponto crítico de f mas não é máximo nem mínimo local.

DEFINIÇÃO Chama-se ponto de sela a um ponto crítico de f que não é um máximo nem um mínimo local de f.

EXTREMOS LOCAIS DE FUNÇÕES A UMA VARIÁVEL

$f: I \to \mathbb{R}$ classe C^2 $\qquad a \in I$

a diz-se um ponto crítico de $f(x)$ se

$$f'(a) = 0$$

Num ponto crítico $x = a$

$$f(x) = f(a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2) \quad (x \to a)$$

$f''(a) > 0 \implies f(x) > f(a) \ \forall x \neq a$ numa vizinhança de a

$\Updownarrow$

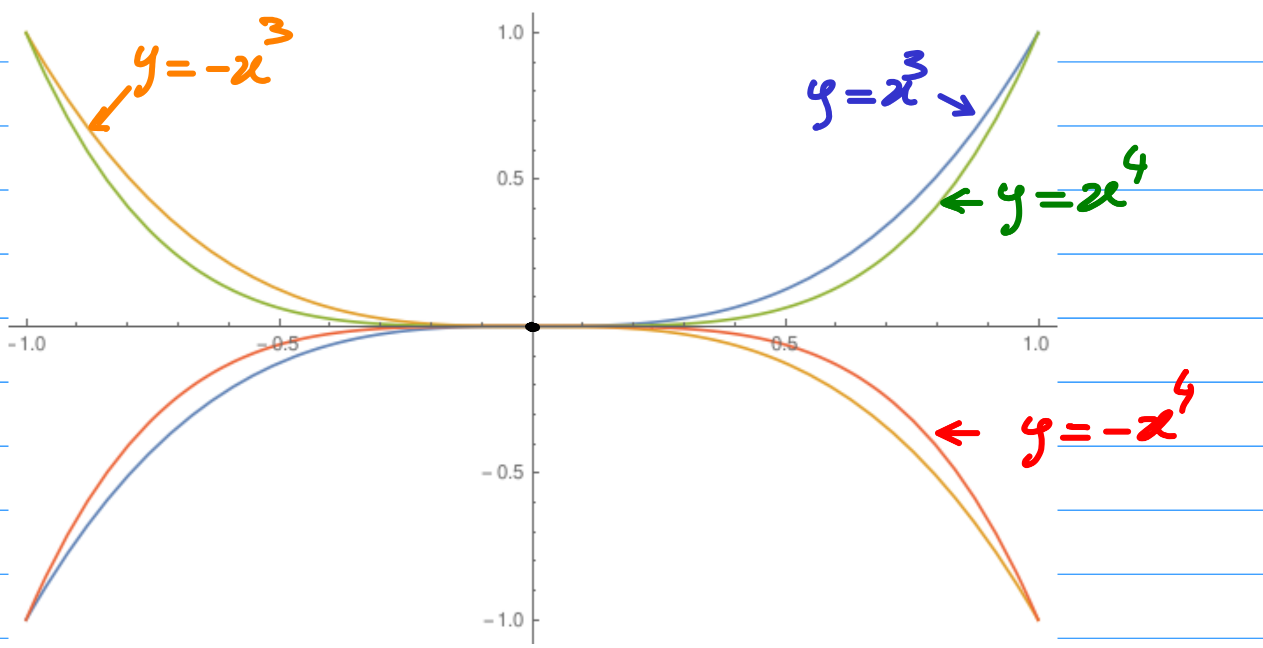
$x = a$ é um mínimo local

$f''(a) < 0 \implies f(x) < f(a) \ \forall x \neq a$ numa vizinhança de a

$\Updownarrow$

$x = a$ é um máximo local

$f''(a) = 0 \implies$ inconclusivo.



<u>DEFINIÇÃO</u> Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2, $a \in D$. Chama-se

matriz hessiana de f no ponto a

à matriz simétrica

$$H_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f''_v(a) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i v_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \\ &= v^T H_f(a)\, v \end{aligned}}$$

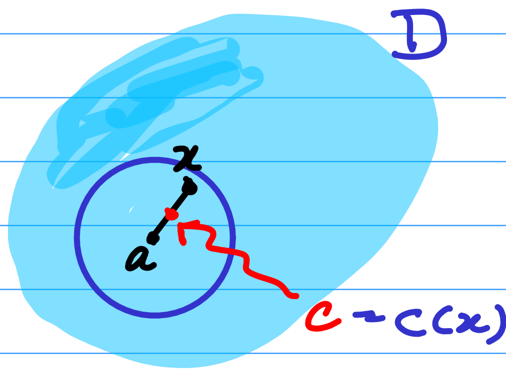
Polinómio de Taylor de ordem 2

$$f(x) = P_2(x,a) + o(\|x-a\|^2) \qquad (x \to a)$$

$$P_2(x,a) = f(a) + f'_{x-a}(a) + \frac{1}{2} f''_{x-a}(a)$$

$$= f(a) + \nabla f(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^T H_f(a)(x-a)$$

Se $a \in D$ fôr <u>ponto crítico</u> de f, pela fórmula para o resto de Lagrange de ordem 1, existe $c \in [a,x]$



$$f(x) = \overbrace{f(a)}^{P_1(x,a)} + \overbrace{\frac{1}{2}(x-a)^T H_f(c)(x-a)}^{R_1(x,a)}.$$

Se esta expressão for sempre >0, respectivamente <0, então o ponto a é um mínimo local, respectivamente um máximo local

FORMAS QUADRÁTICAS

Toda a matriz simétrica $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ determina uma forma quadrática

$Q_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad Q_A(x) := x^T A x$.

polinómio homogéneo de grau 2

DEFINIÇÃO Uma matriz simétrica $A \in Mat_{n\times n}$ diz-se

$x^TAx > 0 \quad \forall x \neq 0$

(1) definida positiva se $Q_A(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

(2) definida negativa se $Q_A(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

(3) indefinida se $Q_A(x) < 0 < Q_A(y)$ para alguns $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

TEOREMA $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ classe C^2.

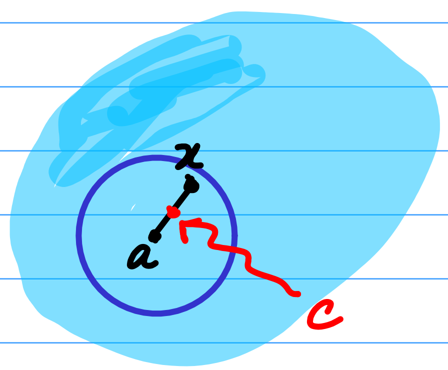
$a \in \operatorname{int}(D)$ tal que $\nabla f(a) = 0$.

(1) $H_f(a)$ definida positiva $\Rightarrow$ a mínimo local def

(2) $H_f(a)$ definida negativa $\Rightarrow$ a máximo local def

(3) $H_f(a)$ indefinida $\Rightarrow$ a é ponto de sela.

PROVA



$H_f(a)$ def pos. / def neg / indef.

$$\Downarrow$$

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall c \in B_\varepsilon(a)$

$H_f(c)$ é def. pos. / def. neg / indef.

$\nabla f(a) = 0$

$\forall x \in B_\varepsilon(a) \quad \exists c \in [a, x] \subseteq B_\varepsilon(a)$

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2}(x-a)^T H_f(c)(x-a)$$

>0 $\quad$ <0 $\quad$ >0 / <0

$\downarrow$ $\quad$ $\downarrow$ $\quad$ $\downarrow$

mín. local $\quad$ máx local $\quad$ ponto de sela

$\blacksquare$

PROPOSIÇÃO Uma matriz simétrica $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ é:

(1) definida positiva $\Leftrightarrow$ A só tem valores próprios > 0

(2) definida negativa $\Leftrightarrow$ A só tem valores próprios < 0

(3) indefinida $\Leftrightarrow$ A tem valores próprios de sinais opostos.

COROLÁRIO $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é:

(1) definida positiva $\Leftrightarrow$ $a+c>0$ e $ac-b^2>0$

(2) definida negativa $\Leftrightarrow$ $a+c<0$ e $ac-b^2>0$

(3) indefinida $\Leftrightarrow$ $ac-b^2<0$

$$\det(A) = ac-b^2 = \lambda_1\lambda_2$$

$$\text{traço}(A) = a+c = \lambda_1+\lambda_2$$

onde λ_1, λ_2 são os valores próprios de A.

EXEMPLO $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 - y^3 + xy$

$\nabla f(x,y) = (3x^2 + y, -3y^2 + x) = (0,0)$

Pontos críticos $\begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ -3y^2 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y^2 \\ 3(3y^2)^2 + y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 27y^4 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ y(27y^3 + 1) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow \underline{\underline{(x,y) = (0,0)}}$

ou

$27y^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow y^3 = -\frac{1}{3^3} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}$

$\downarrow$

$\underline{\underline{(x,y) = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})}} \Leftarrow x = \frac{1}{3}$

$H_f = \begin{bmatrix} 6x & 1 \\ 1 & -6y \end{bmatrix}$ $\nabla f(x,y) = (3x^2 + y, -3y^2 + x)$

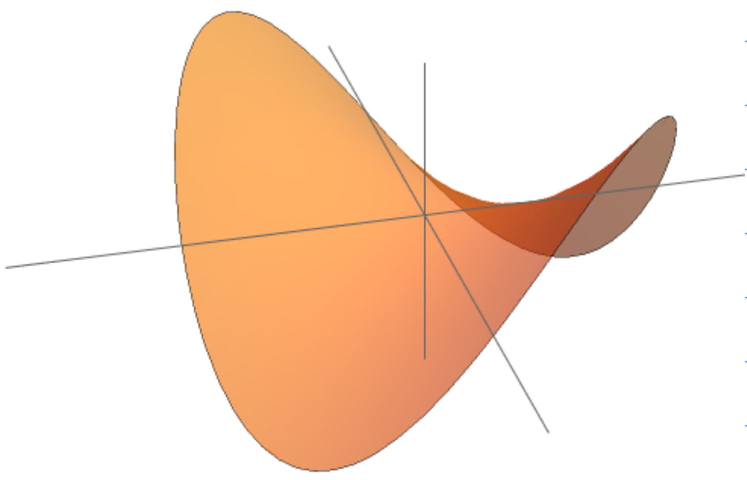
$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\det = -1 < 0$

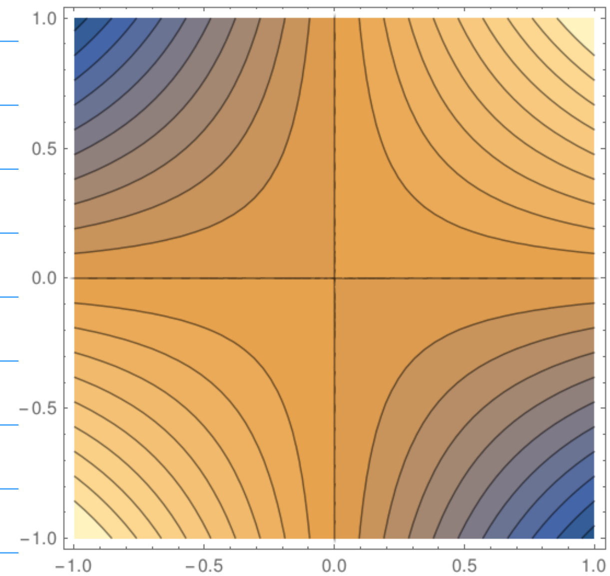
$\therefore (0,0)$ ponto de sela

$H_f(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\det = 4 - 1 = 3 > 0$
$\text{tr} = 4 > 0$

$\therefore (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ mínimo local.

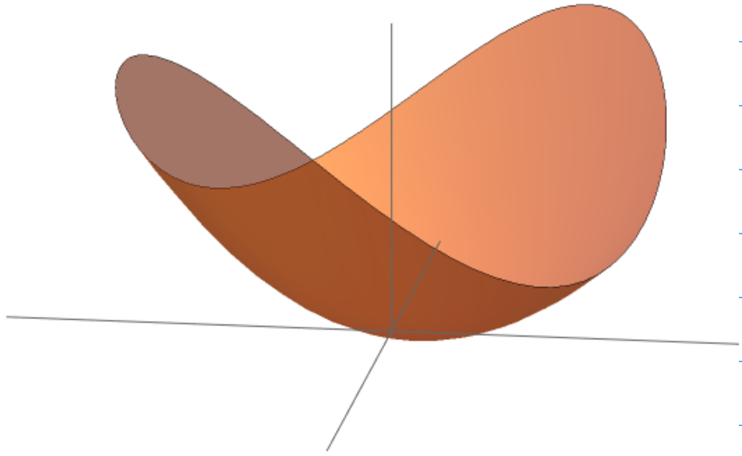
$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ tem valores próprios -1 e 1

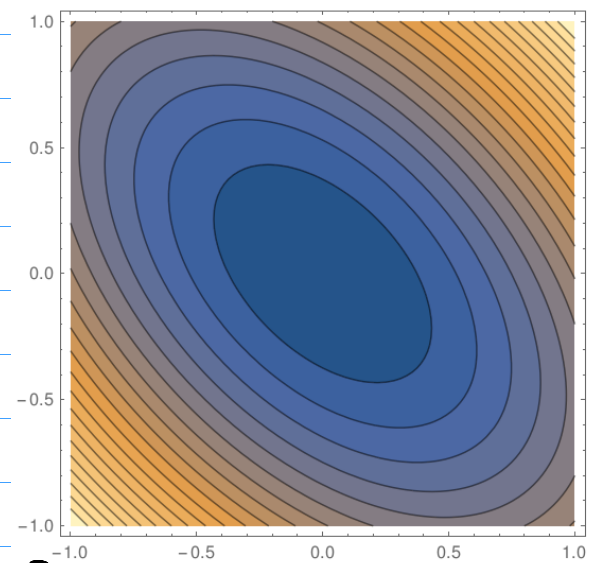




$Q_A(x,y) = [x\ y]\, A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2xy$ é indefinida

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ tem valores próprios 3 e 1





$Q_A(x,y) = [x\ y]\, A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x^2 + 2y^2 + 2xy$
é definida positiva.

Toda a matriz simétrica nxn A é diagonalizável:
existe uma matriz ortogonal M ($M^{-1}=M^t$) tal que

$$AM = MD \iff M^t A M = D$$

onde M é a matriz cujas colunas formam uma base ortonormada de vectores próprios de A e D e uma matriz diagonal cujas entradas são os valores próprios de A.

valores próprios de A

Logo $Q_A(Mx) = (Mx)^t A (Mx) = x^t M^t A M x$

$$= Q_D(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i^2$$

forma quadrática diagonal

M ortogonal significa que $f_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

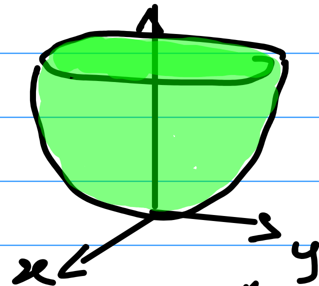
$f_M(x) = Mx$ é isometria.

Logo, a menos de compor com uma isometria, qualquer forma quadrática pode ser reduzida a uma forma quadrática diagonal cujos coeficientes são os valores próprios da matriz original.

FORMAS QUADRÁTICAS DIAGONAIS

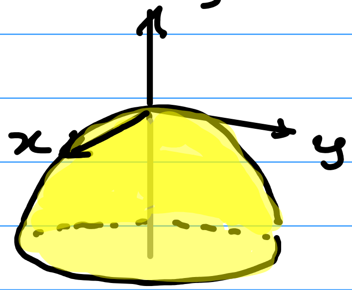
$$Q(x,y) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$$

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$



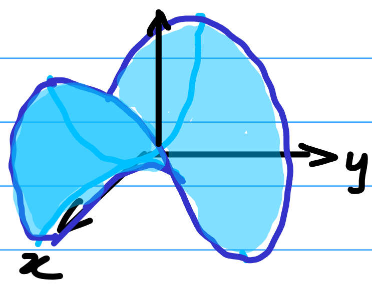
def. positiva

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$



def. negativa

$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



indefinida

Referência Bibliográfica
Elementary Linear Algebra With Applications
de Chris Rorres e Howard Anton

https://sku.ac.ir/Datafiles/BookLibrary/55/Howard%20Anton,%20Chris%20Rorres%20-%20Elementary%20Linear%20Algebra%20with%20Applications-Wiley%20(2005).pdf

26-03-2021

Existência de Extremos Absolutos

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ diz-se compacto se fôr fechado e limitado

TEOREMA DE WEIERSTRASS ou

O PRINCÍPIO DO MÁXIMO

Se $f: D \to \mathbb{R}$ é contínua e D é compacto então f admite um mínimo e um máximo absolutos.

IDEIA DA PROVA (EM $\mathbb{R}^2$)

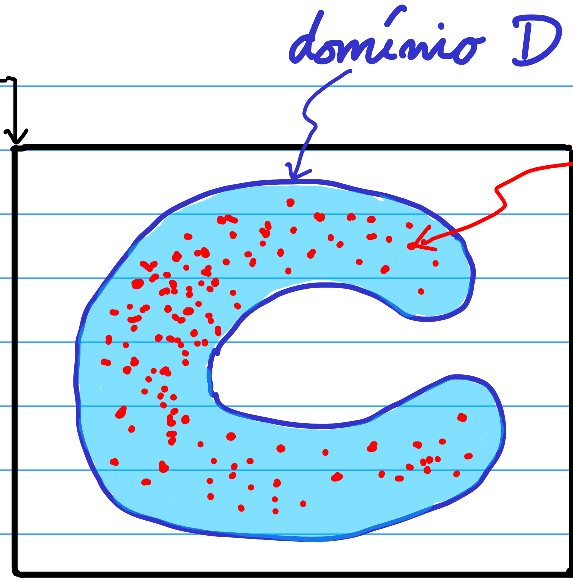
Seja $M = \sup_{x \in D} f(x)$ (que pode ser finito ou ∞)

Por definição de supremo existe uma sucessão de pontos $x_n \in D$, $n = 1, 2, 3, \dots$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = M.$$

D limitado $\Rightarrow$ $D \subseteq [-R, R] \times [-R, R]$ para algum $R > 0$.

Quadrado $[-R,R]^2$

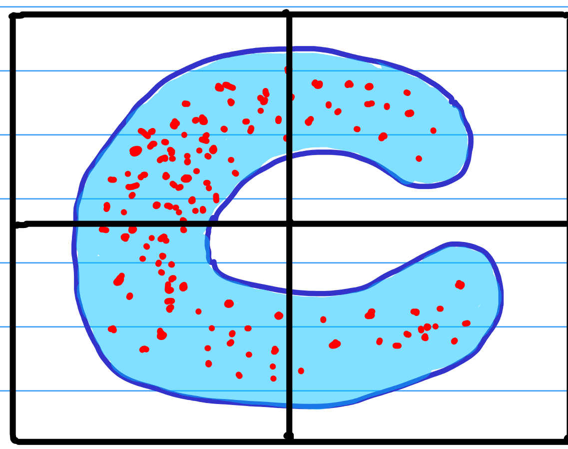


termos da sucessão x_n

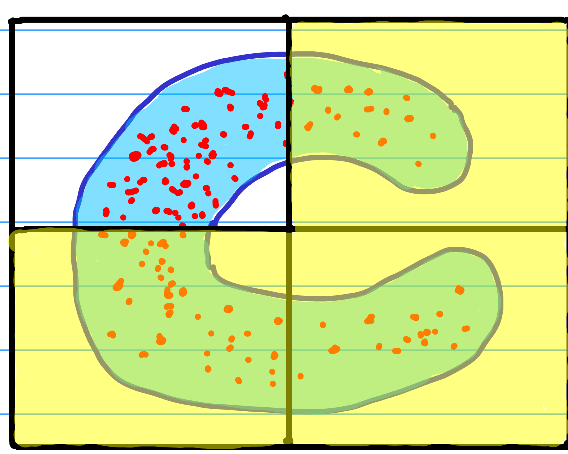
Se $x_n = x_0 \ \forall n \geq 0$

$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$

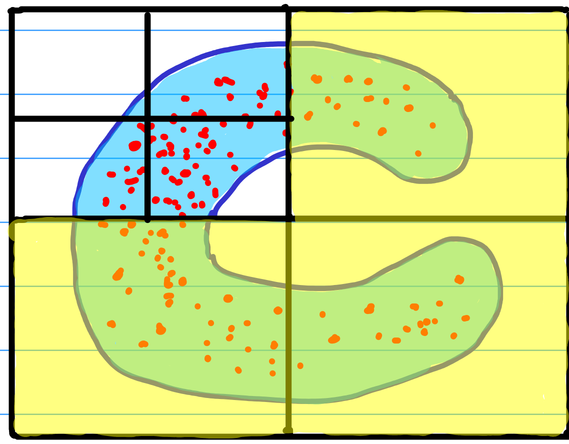
Dividimos o quadrado em 4 subquadrados iguais



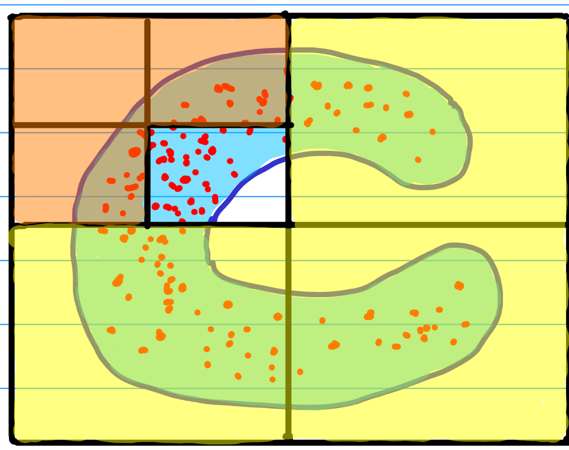
Escolhemos um dos subquadrados com uma infinidade de termos da sucessão x_n



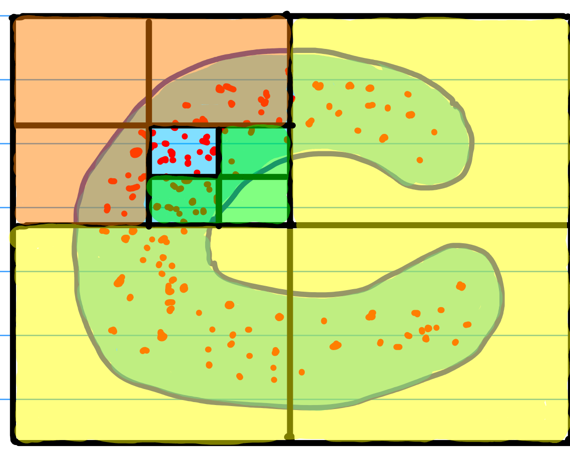
Dividimos de novo o quadrado escolhido em 4 partes iguais



e escolhemos um subquadrado contendo uma infinidade de termos da sucessão x_n.

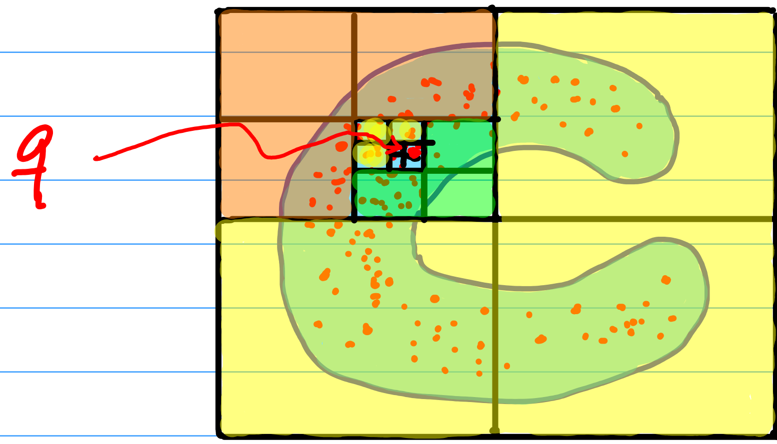


Repetindo este procedimento indefinidamente



obtemos uma sucessão de quadrados encaixados

$$Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \cdots \supset Q_n \supset Q_{n+1} \supset \cdots$$



com lados de comprimento ($R/2^n \to 0$) cada vez menor, todos eles contendo infinitos termos da sucessão.

Há um único ponto q na intersecção destes quadrados (que está em D porque D é fechado).

Como

✓ $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = M$

✓ cada quadrado Q_n tem ∞'s termos x_n

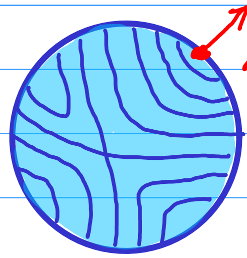
✓ f é contínua

segue que $f(q) = M$, ou seja, q é um máximo absoluto de f. $\blacksquare$

Em domínios compactos Teorema de Weierstrass	$\rightarrow$	Existência de extremos absolutos
Em domínios abertos Teorema de Fermat	$\rightarrow$	Critério (gradiente nulo) para detectar extremos locais
Fórmula de Taylor Matriz Hessiana	$\rightarrow$	Classificação dos pontos críticos

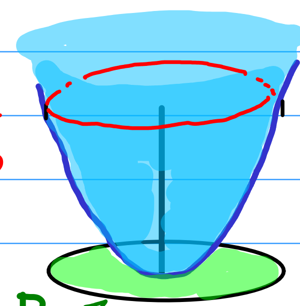
o máximo pode ocorrer na fronteira

conjuntos de nível



gradiente

máximos no bordo do domínio D



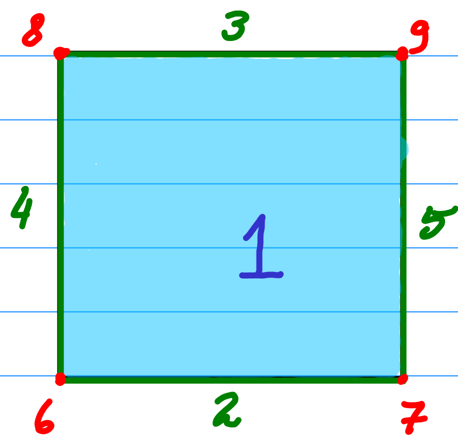
D

EXEMPLO 1 Determine os extremos absolutos da função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x - x^2 + \frac{xy}{2} + \frac{y}{2} - y^2$ no quadrado $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

D é compacto.

Pelo Teorema de Weierstrass f admite um máximo e um mínimo absolutos.

ESTRATÉGIA: Vamos procurar os extremos absolutos de f entre: (I) os pontos críticos interiores ao domínio, (II) os pontos críticos em cada uma das arestas (a restrição de f a uma aresta é uma função de uma só variável), (III) os cantos do domínio D.



(I) $f(x,y) = x - x^2 + \frac{xy}{2} + \frac{y}{2} - y^2$

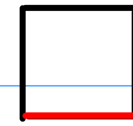
$\nabla f = \left(1 - 2x + \frac{y}{2}, \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - 2y\right)$

Pontos críticos: $\nabla f = (0,0) \iff \begin{cases} -2x + \frac{y}{2} = -1 \\ \frac{x}{2} - 2y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -2x + y/2 = -1 \\ 2x - 8y = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 8y - y/2 = 3 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y = 2/5 \\ 2x = 1 + \frac{1}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3/5 \\ y = 2/5 \end{cases} \iff (x,y) = (3/5, 2/5) \in \operatorname{int}(D).$

$(\mathrm{II})\ (y=0,\ 0<x<1)$



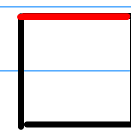
$$f(x,y) = x - x^2 + \frac{xy}{2} + \frac{y}{2} - y^2$$

$$g(x) = f(x,0) = x - x^2$$

$$g'(x) = 1 - 2x = 0 \iff x = 1/2$$

$(x,y) = (\frac{1}{2}, 0)$ é ponto crítico da restrição de f a este lado.

$(\mathrm{II})\ (y=1,\ 0<x<1)$



$$f(x,y) = x - x^2 + \frac{xy}{2} + \frac{y}{2} - y^2$$

$$g(x) = f(x,1) = x - x^2 + \frac{x}{2} + 1/2 - 1$$

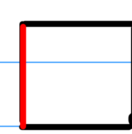
$$= -\frac{1}{2} + \frac{3x}{2} - x^2$$

$$g'(x) = \frac{3}{2} - 2x = 0 \iff x = 3/4$$

$(x,y) = (3/4, 1)$ é ponto crítico da restrição de f a este lado.

$(\mathrm{II})\ (x=0,\ 0<y<1)$

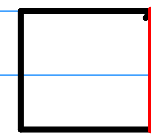
$$f(x,y) = x - x^2 + \frac{xy}{2} + \frac{y}{2} - y^2$$



$$g(y) = f(0,y) = \frac{y}{2} - y^2$$

$$g'(y) = \frac{1}{2} - 2y = 0 \iff y = \frac{1}{4}$$

$(x,y) = (0,\frac{1}{4})$ é ponto crítico da restrição de f a este lado.



(II) $(x = 1,\ 0 < y < 1)$

$$f(x,y) = x - x^2 + \frac{xy}{2} + \frac{y}{2} - y^2$$

$$g(y) = f(1,y) = y - y^2$$

$$g'(y) = 1 - 2y = 0 \iff y = 1/2$$

$(x,y) = (1,\frac{1}{2})$ é ponto crítico da restrição de f a este lado.

(I) $(\frac{3}{5},\frac{2}{5}) \rightsquigarrow f(\frac{3}{5},\frac{2}{5}) = 2/5$

(II) $(\frac{1}{2},0) \rightsquigarrow f(\frac{1}{2},0) = 1/4$

$(\frac{3}{4},1) \rightsquigarrow f(\frac{3}{4},1) = 1/16$

$(0,\frac{1}{4}) \rightsquigarrow f(0,\frac{1}{4}) = \frac{1}{16}$

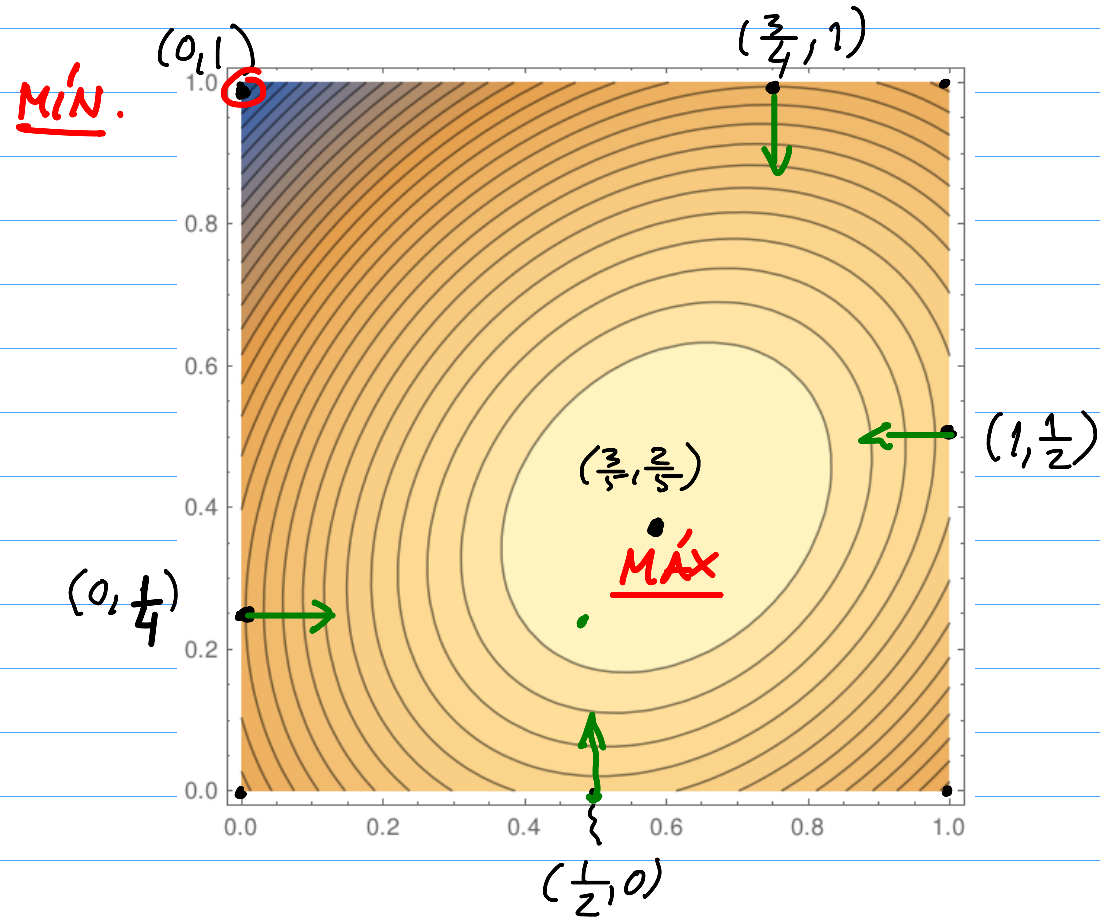
$(1,\frac{1}{2}) \rightsquigarrow f(\frac{1}{2},1) = 1/4$

(III) $f(0,0) = 0$ $\quad$ $f(1,0) = 0$

$f(0,1) = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $f(1,1) = 0$

$$-\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{16} < \frac{1}{4} < \frac{2}{5}$$

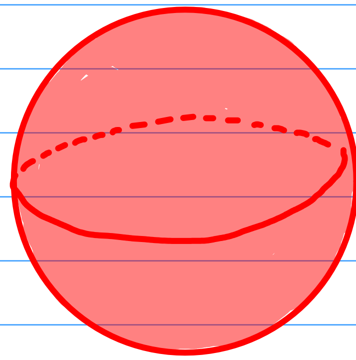
$$-\frac{1}{2} = f(0,1) \qquad \frac{2}{5} = f\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$$



Para resolver o mesmo problema num cubo em $\mathbb{R}^3$ seria necessário a consideração de

$$\underset{V}{8} + \underset{A}{12} + \underset{F}{6} + \underset{int}{1} = 27 \quad \text{casos.}$$

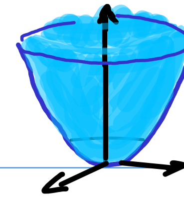
EXEMPLO 2 Determine os extremos absolutos da função $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2$ na esfera sólida $D = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.



PROBLEMA: Como determinar os extremos de f que ocorrem na fronteira

$$fr(D) = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\} \quad ?$$

A resposta será dada na próxima aula!



TEOREMA $D \subseteq \mathbb{R}^n$ fechado mas ilimitado.
Se $f: D \to \mathbb{R}$ é contínua e $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$
então f admite um mínimo absoluto.

PROVA Seja $x_0 \in D$ e $M = f(x_0)$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty \implies \exists\, \delta > 0$$

$$\forall x \in D \quad \|x\| \geq \frac{1}{\delta} \implies f(x) > M$$

Logo $A = \{x \in D : f(x) \leq M\} \subseteq B_{\frac{1}{\delta}}(0)$

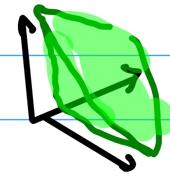
fechado e limitado
$\Updownarrow$
compacto.

Pelo Teorema de Weierstrass existe $a \in A$ tal que

$$x \in A \implies f(x) \geq f(a).$$

Mas $x \notin A \implies f(x) > M = f(x_0) \geq f(a)$ — $x_0 \in A$

$\therefore$ a é um ponto mínimo absoluto de f. $\blacksquare$



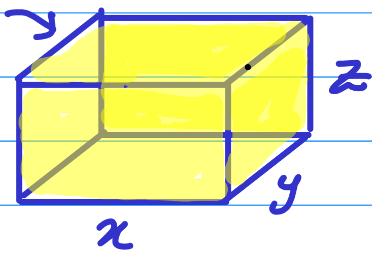
EXEMPLO

$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, xyz = 1\}$

é fechado mas ilimitado

$A : D \longrightarrow \mathbb{R} \qquad A(x,y,z) = 2(xy + xz + yz)$

A área da superfície



$u = \min\{x,y,z\}$
$v = \max\{x,y,z\}$

$u^2 v \leq xyz = 1 \implies \frac{1}{u} \geq \sqrt{v}$

$$A(x,y,z) = 2\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) \geq \frac{2}{u} \geqslant 2\sqrt{v}$$

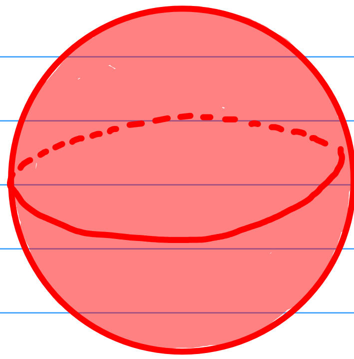
que tende para $+\infty$ quando $(x,y,z) \to \infty$.

Logo $\lim\limits_{(x,y,z)\to\infty} A(x,y,z) = +\infty$ e pelo teorema anterior A admite um mínimo absoluto.

30-03-2021

EXTREMOS CONDICIONADOS

<u>EXEMPLO 2</u> Determine os extremos absolutos da função $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2$ na esfera sólida $D = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.



<u>PROBLEMA</u>: Como determinar os extremos de f que ocorrem na fronteira

$$fr(D) = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\} \quad ?$$

Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1

$C = \{ x \in D : f(x) = c \}$ região de condicionamento

$g|_C : C \to \mathbb{R}$ função objectivo (que queremos maximizar ou minimizar).

Um ponto $a \in C$ tal que

$$g(a) = \max_{x \in C} g(x) \quad \text{ou} \quad g(a) = \min_{x \in C} g(x)$$

diz-se um extremo condicionado de g em C.

TEOREMA (MÉTODO DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE)

Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1

$C = \{ x \in D : f(x) = c \}$ uma hipersuperfície tal que

$\nabla f(x) \neq 0 \quad \forall x \in C$.

a extremo condicionado de g em C

$$\Longrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \qquad \nabla g(a) = \lambda \nabla f(a).$$

O Método dos Multiplicadores de Lagrange consiste em encontrar os extremos condicionados entre as soluções

$$\begin{cases} f(x) = c \\ \nabla g(x) = \lambda \nabla f(x) \end{cases} \iff \begin{cases} f(x) = c \\ g_{x_1}(x) = \lambda f_{x_1}(x) \\ \cdots \\ g_{x_n}(x) = \lambda f_{x_n}(x) \end{cases}$$

deste sistema de $n+1$ equações em $n+1$ variáveis.

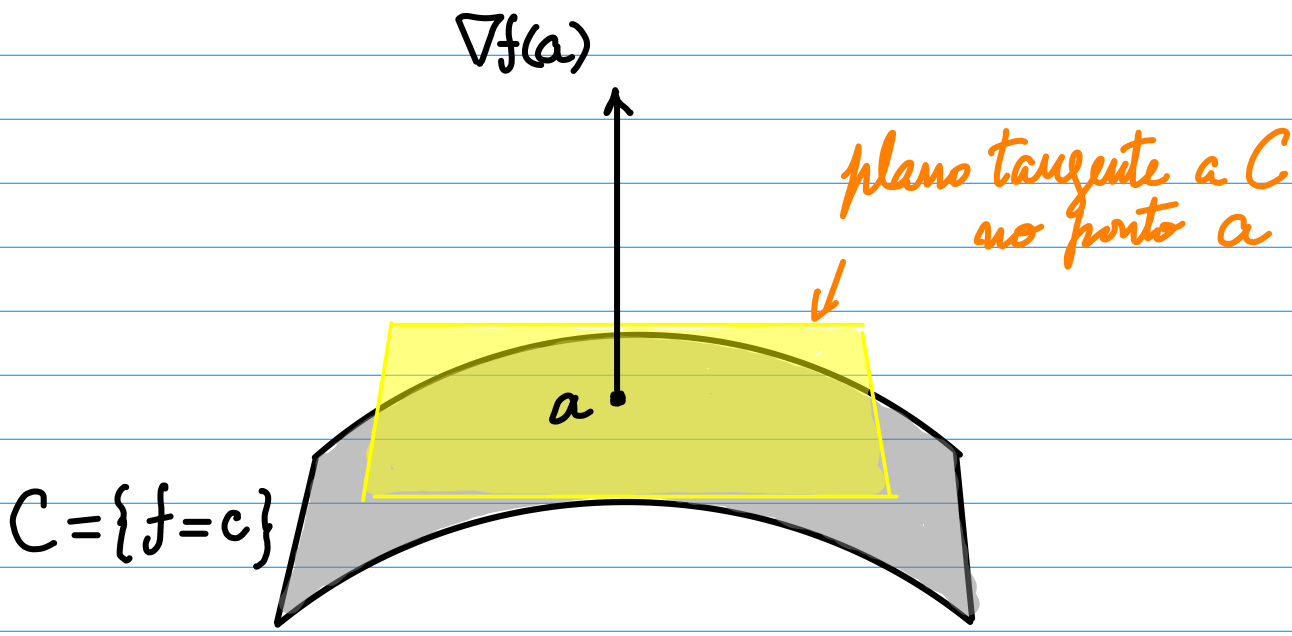
PROVA DO TEOREMA

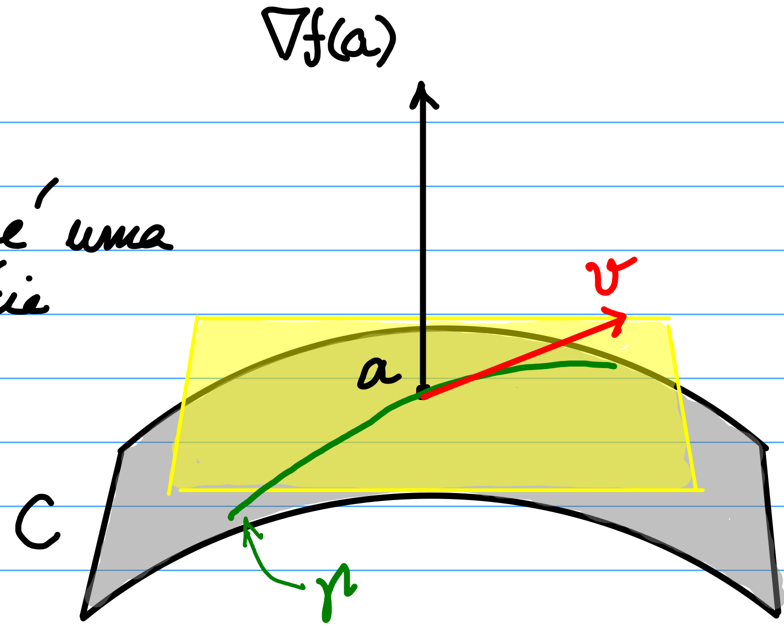
$a \in C$ extremo de $g|_C$ $\quad m = g(a)$

Suponhamos (por redução ao absurdo) que

$$\nabla g(a) \neq \lambda \nabla f(a) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

($\nabla f(a)$ e $\nabla g(a)$ são linearmente independentes)



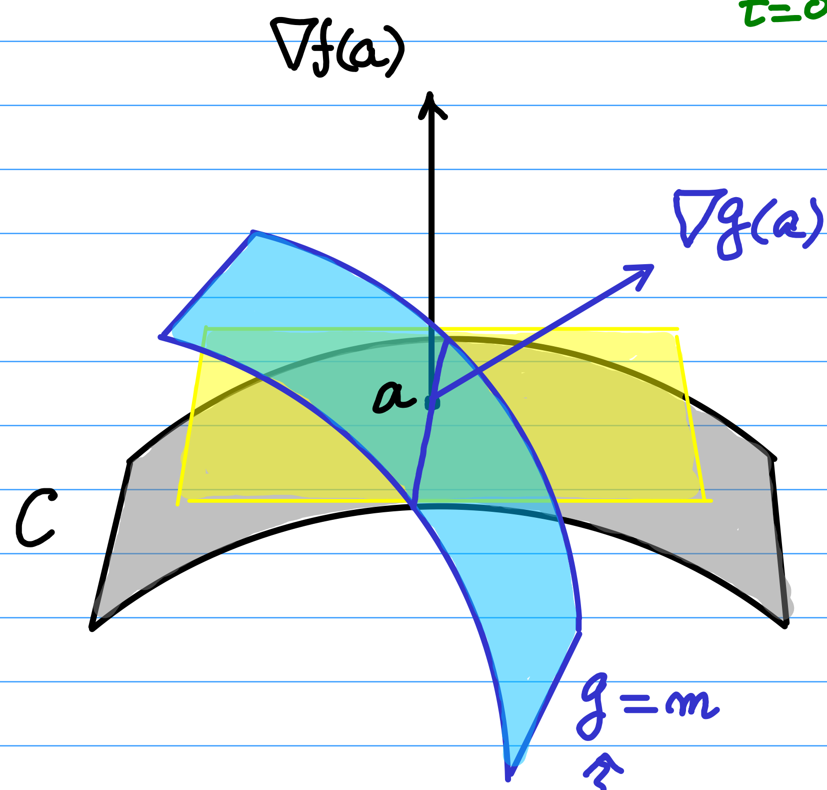


Porque C é uma hipersuperfície

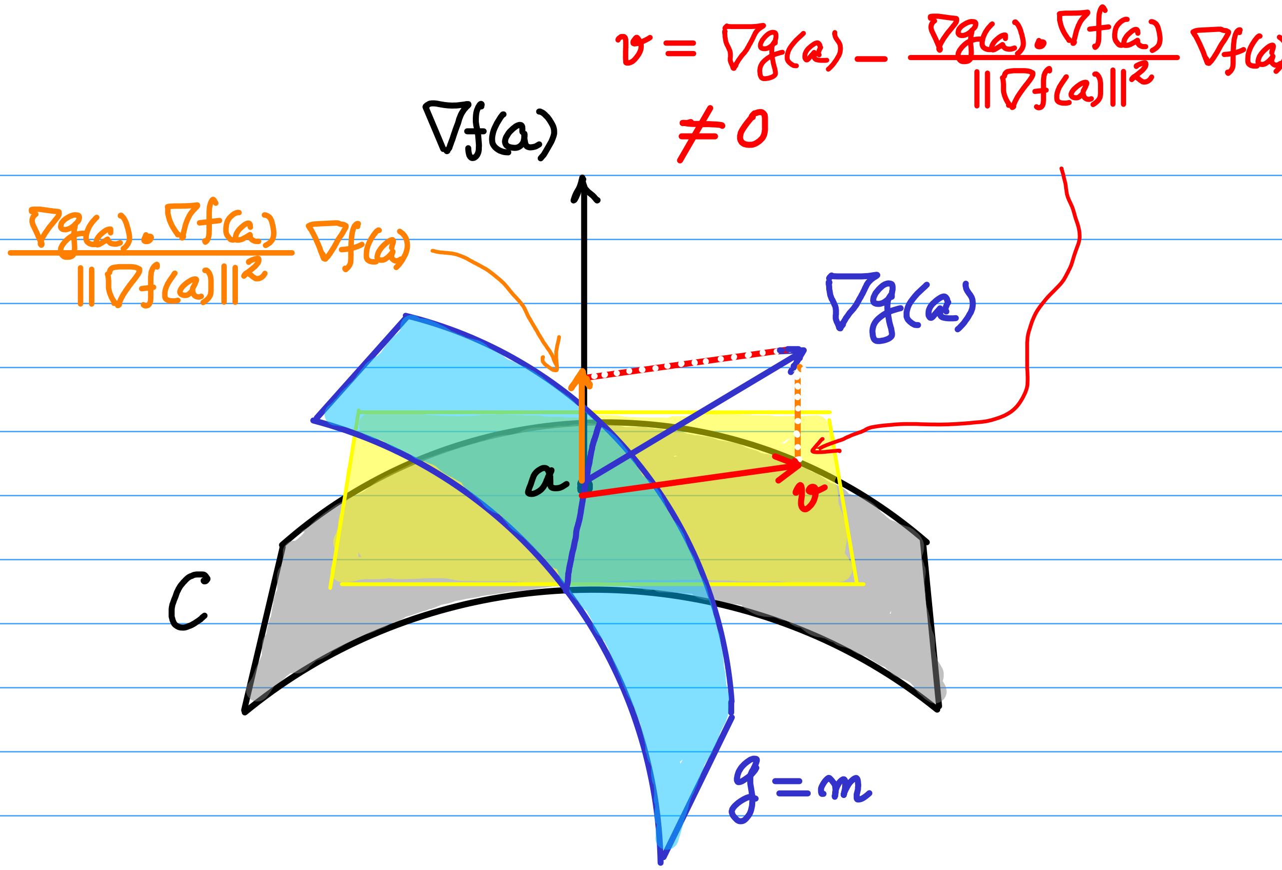
dado um vetor v tal que $\nabla f(a) . v = 0$ existe uma linha parametrizada γ com traço contido em C tal que $\gamma(0) = a$ e $\gamma'(0) = v$.

$\gamma :]-1,1[\longrightarrow C$

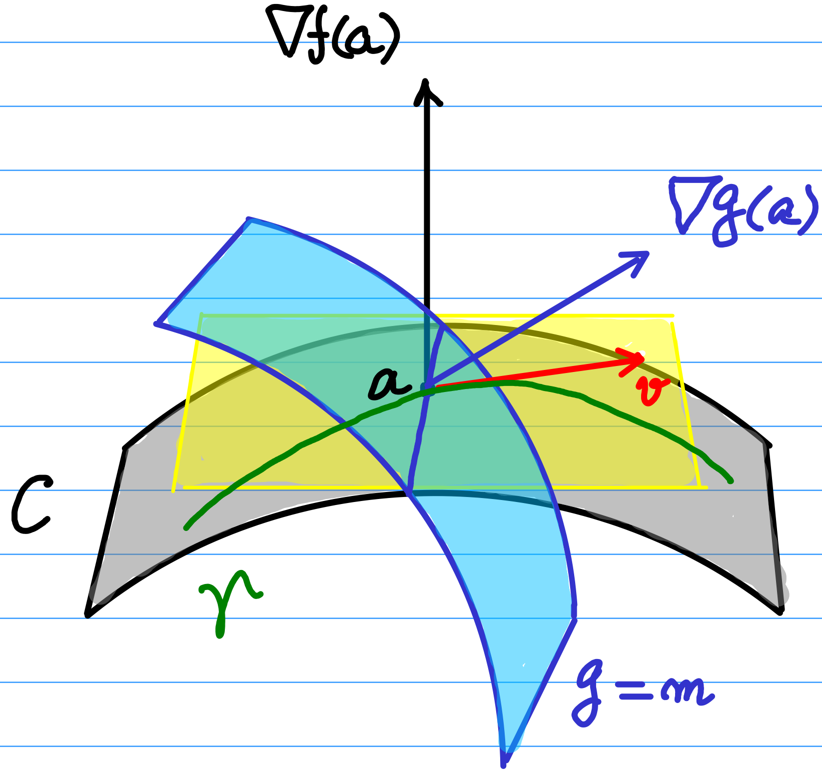
$t = 0 \rightsquigarrow a$



nível da função objectivo que contém o ponto a.



$\therefore$ Existe uma linha parametrizada γ contida em C tal que $\gamma(0) = a$ e $\gamma'(0) = v$.



$\gamma(t) \in C \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad m = h(0)$ extremo de $h(t) = g(\gamma(t))$

$$\Rightarrow \quad 0 = h'(0) = (g \circ \gamma)'(0) = \nabla g(a) \cdot \gamma'(0)$$

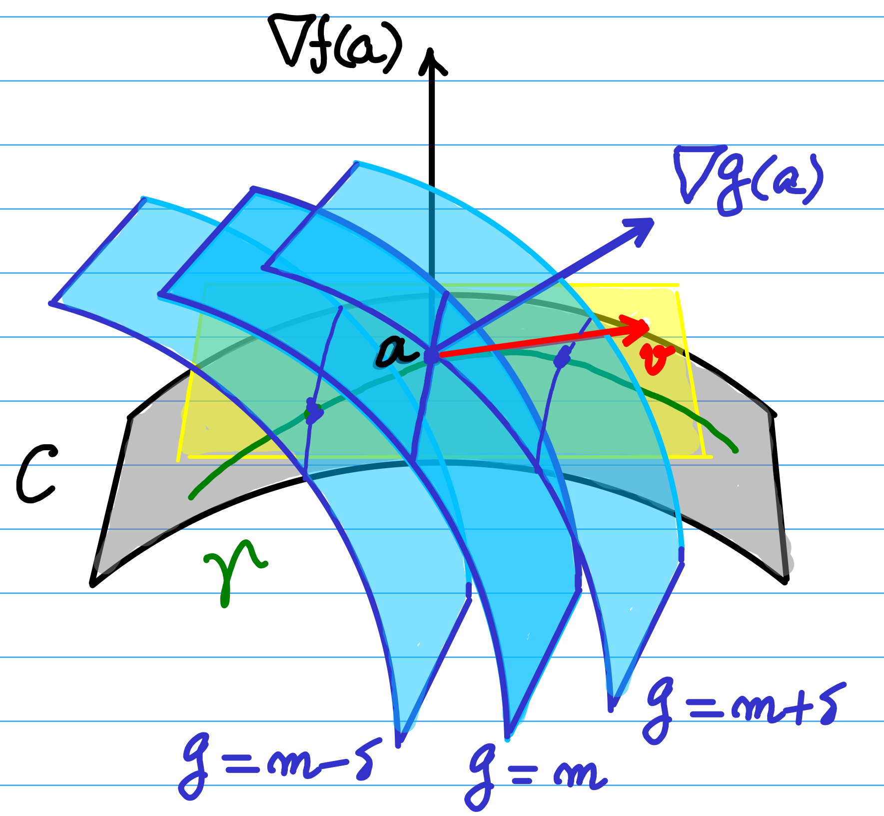
$$= \nabla g(a) \cdot v > 0 \qquad \underline{\text{ABSURDO}}!$$

Alternativamente

$$\nabla g(a) \cdot v = \|\nabla g(a)\|^2 - \frac{(\nabla g(a) \cdot \nabla f(a))^2}{\|\nabla f(a)\|^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \nabla g(a) \cdot \nabla f(a) = \pm \|\nabla g(a)\| \cdot \|\nabla f(a)\|$$

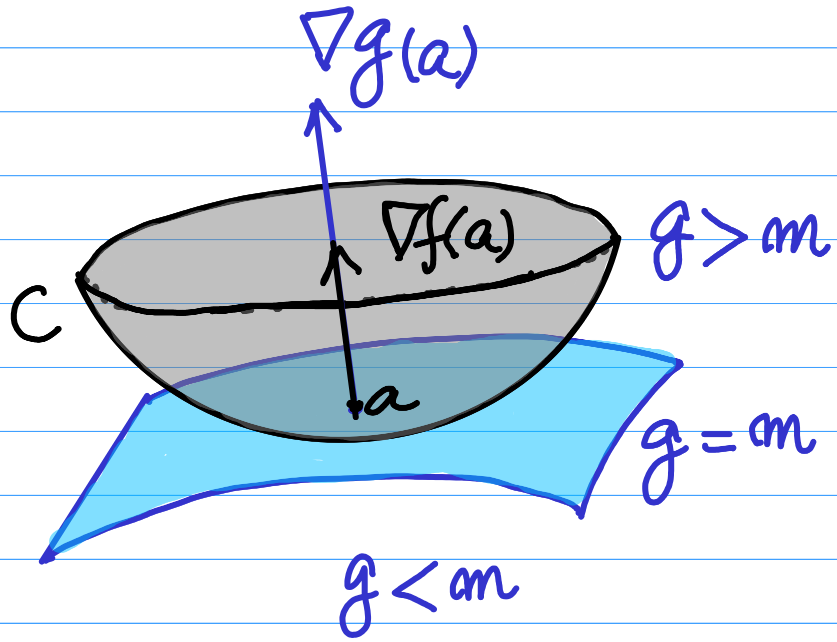
$$\Rightarrow \quad \nabla g(a) = \lambda \nabla f(a) \quad \text{com } \lambda \in \mathbb{R}.$$



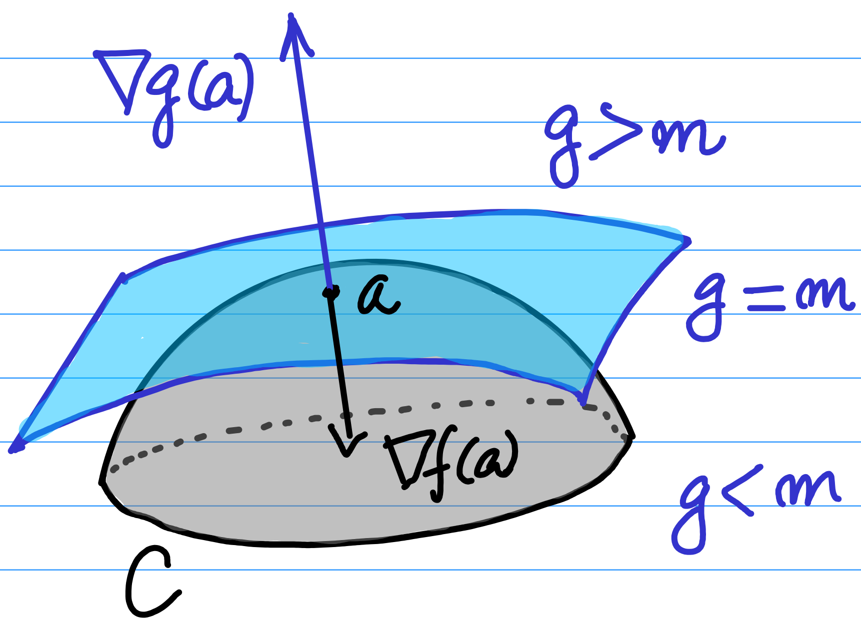
As figuras seguintes ilustram a relação entre a região de condicionamento (cinzento) e o nível da função objectivo (azul) num extremo condicionado.

$$\boxed{g(a) = m}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} C \subseteq \{x : g(x) \geq m\} \\ a \text{ mínimo de } g|_C \end{array}}$$



$$\boxed{\begin{array}{c} C \subseteq \{x : g(x) \leq m\} \\ a \text{ máximo de } g|_C \end{array}}$$



região de condicionamento

nível da função objetivo g

EXERCÍCIO Determine os extremos absolutos da função $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2$ na esfera sólida $D = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

Extremos no interior $(x^2+y^2+z^2<1)$

$$\nabla g = (2x, 4y, -6z) = (0,0,0) \iff (x,y,z) = (0,0,0)$$

$$H_g = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

tem valores próprios $2, 4, -6$ logo é indefinida

$\therefore (0,0,0)$ ponto de sela.

Extremos no bordo $(x^2+y^2+z^2=1)$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\quad f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

$$\nabla f = (2x, 2y, 2z)$$

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 1 \\ \nabla g(x,y,z) = \lambda \nabla f(x,y,z) \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \leftarrow \\ 2x = \lambda 2x \\ 2y = \lambda 4y \\ 2z = -\lambda 6z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \overline{\hphantom{x^2+y^2+z^2=1}} \\ x(\lambda-1) = 0 \\ y(2\lambda-1) = 0 \\ z(3\lambda+1) = 0 \end{cases}$$

$\lambda = 1 \Longrightarrow y = z = 0 \Longrightarrow x = \pm 1 \Longrightarrow (x,y,z) = (\pm 1, 0, 0)$

$\lambda = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = z = 0 \Longrightarrow y = \pm 1 \Longrightarrow (x,y,z) = (0, \pm 1, 0)$

$\lambda = -\frac{1}{3} \Longrightarrow x = y = 0 \Longrightarrow z = \pm 1 \Longrightarrow (x,y,z) = (0, 0, \pm 1)$

X $\lambda \neq 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} (x,y,z) = (0,0,0) \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{array}\right\}$ impossível

$g(\pm 1, 0, 0) = 2$ $\quad \underline{g(0, \pm 1, 0) = 4}$ $\quad \underline{g(0,0,\pm 1) = -3}$

máx $\quad g(0,0,0) = 0 \quad$ mín.

EXERCÍCIO $D = \{(x,y,z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xyz = 1\}$

$A : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A(x,y,z) = 2(xy + xz + yz)$

Encontre o mínimo de A. (Já vimos na aula passada que esta função admite mínimo absoluto).

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = xyz$

$\nabla A = (2y + 2z, 2x + 2z, 2x + 2y)$

$\nabla f = (yz, xz, xy)$

$$\nabla A = \lambda \nabla f \iff \nabla A \times \nabla f = (0,0,0) \iff$$

$$(0,0,0) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \boxed{y+z} & x+z & \boxed{x+y} \\ \boxed{yz} & xz & \boxed{xy} \end{vmatrix} \iff \begin{cases} (x+\cancel{z})\cancel{x}y = (x+\cancel{y})\cancel{x}z \\ (y+\cancel{z})x\cancel{y} = (\cancel{x}+y)\cancel{y}z \\ (\cancel{y}+z)x\cancel{z} = (\cancel{x}+z)y\cancel{z} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \cancel{x}y = \cancel{x}z \\ \cancel{y}x = \cancel{y}z \\ \cancel{z}x = \cancel{z}y \end{cases} \iff x = y = z = 1$$

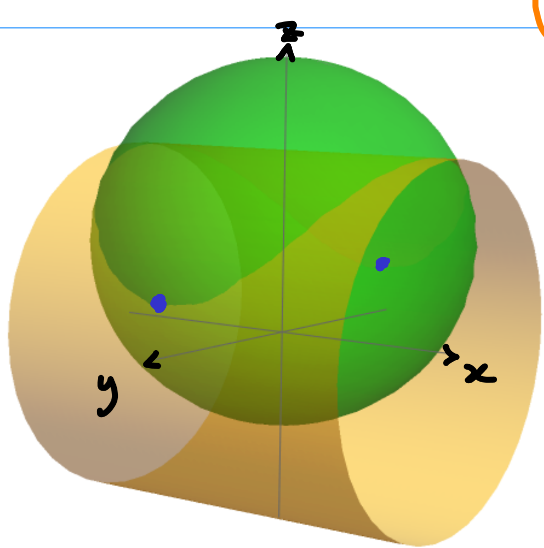
$\therefore$ $(x,y,z) = (1,1,1)$ é o mínimo absoluto de A

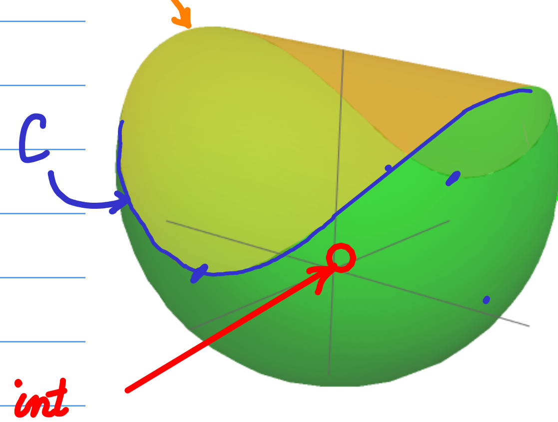
com $A(1,1,1) = 6$.

<u>EXEMPLO</u> Determine os extremos absolutos de

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = y$ no conjunto

$$D = \{(x,y,z) : \underline{y^2+z^2 \leq 1}, \ \underline{x^2+y^2+(z-\tfrac{1}{2})^2 \leq 1}\}$$





TEOREMA (MÉTODO DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE)

Sejam $f_1, f_2, g : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1

$C = \{(x,y,z) : f_1(x,y,z) = c_1,\ f_2(x,y,z) = c_2\}$ uma curva

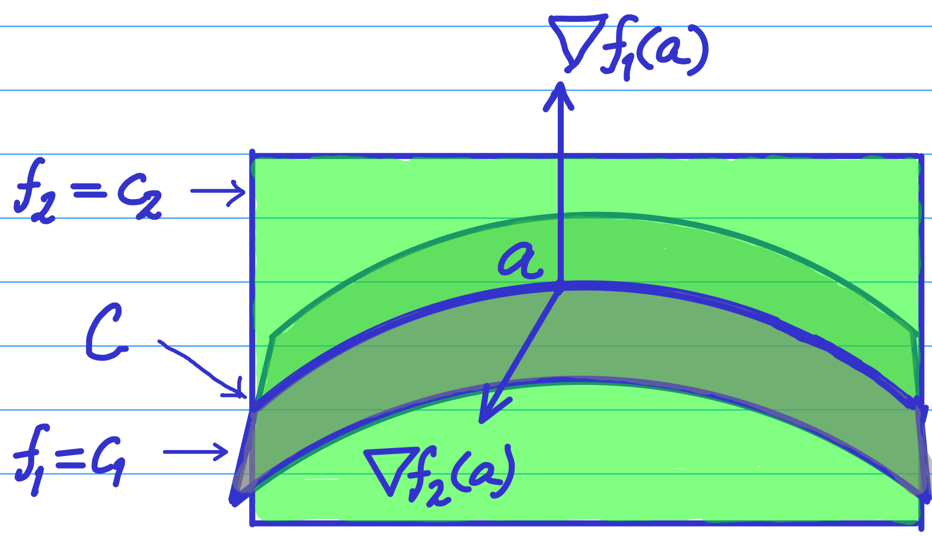
tal que $\nabla f_1(x,y,z) \times \nabla f_2(x,y,z) \neq (0,0,0)\ \forall (x,y,z) \in C$.

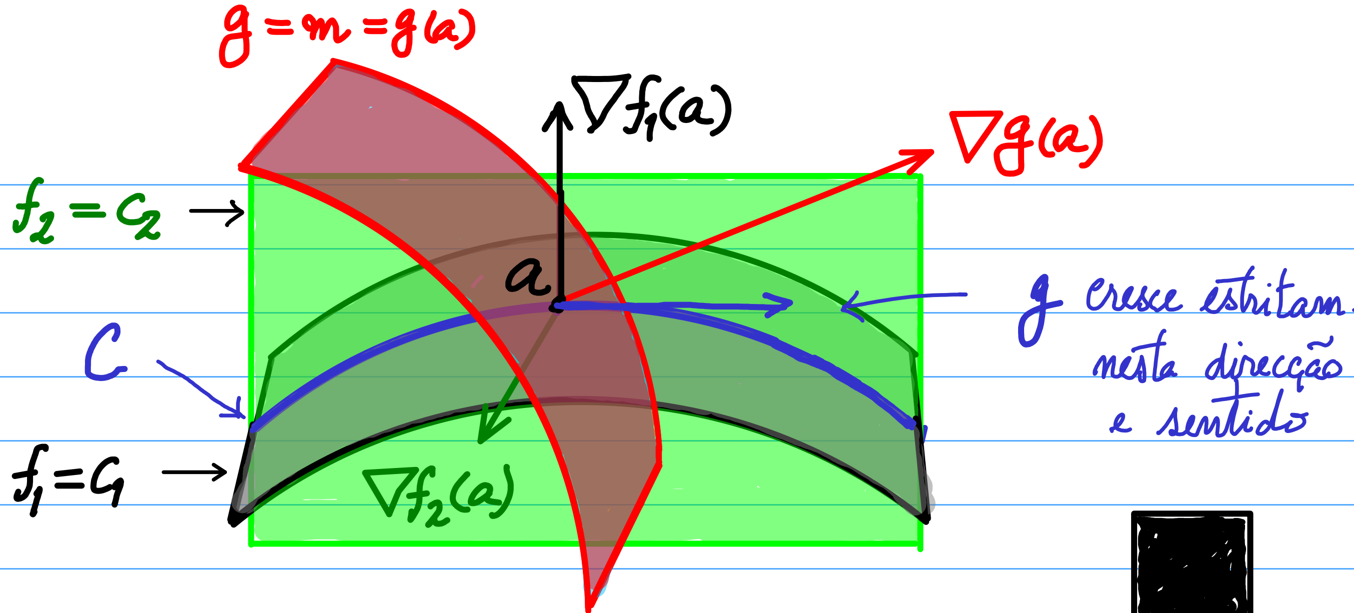
a extremo condicionado de g em C

multiplicadores de lagrange

$$\Longrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \nabla g(a) = \lambda_1 \nabla f_1(a) + \lambda_2 \nabla f_2(a)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \det(\nabla g(a), \nabla f_1(a), \nabla f_2(a)) = 0.$$





∎

VOLTANDO AO EXEMPLO

$$g(x,y,z) = y \qquad \Rightarrow \nabla g = (0,1,0)$$

$$f_1(x,y,z) = y^2+z^2 \qquad \Rightarrow \nabla f_1 = (0,2y,2z)$$

$$f_2(x,y,z) = x^2+y^2+(z-\tfrac{1}{2})^2 \Rightarrow \nabla f_2 = (2x,2y,2z-1)$$

- No interior de

$$D = \{(x,y,z) : y^2+z^2 \leq 1, \quad x^2+y^2+(z-\tfrac{1}{2})^2 \leq 1\}$$

não pode haver pontos críticos porque $\nabla g \neq (0,0,0)$.

- Na superfície (porção do bordo)

$$A = \{(x,y,z) : f_1(x,y,z) = 1, \ f_2(x,y,z) < 1\}$$

os pontos críticos de $g|_A$ satisfazem

$$\nabla g = \lambda \nabla f_1 \iff (0,1,0) = \lambda(0,2y,2z)$$

$$\iff z = 0 \implies 1 = y^2 + z^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm 1$$

$$\implies 1 = x^2 + y^2 + (z - \tfrac{1}{2})^2 \geq 1 + \tfrac{1}{4}$$ impossível!

- Na superfície (porção do bordo)

$$B = \{(x,y,z) : f_1(x,y,z) < 1 \,,\ f_2(x,y,z) = 1\}$$

os pontos críticos de $g|_B$ satisfazem

$$\nabla g = \lambda \nabla f_2 \iff (0,1,0) = \lambda(2x, 2y, 2z-1)$$

$$\iff x = 0 \,,\ z = \tfrac{1}{2} \implies y^2 = 1 \iff y = \pm 1$$

$$\underbrace{(x,y,z) = (0,1,\tfrac{1}{2})}_{g = 1} \quad \text{ou} \quad \underbrace{(x,y,z) = (0,-1,\tfrac{1}{2})}_{g = -1}$$

- Na interseção das duas porções de bordo

$$C = \{(x,y,z) : f_1(x,y,z) = 1 \,,\ f_2(x,y,z) = 1\}$$

os pontos críticos de $g|_C$ satisfazem

$$0 = \det(\nabla g, \nabla f_1, \nabla f_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2y & 2z \\ 2x & 2y & 2z-1 \end{vmatrix} = 4xz$$

$$\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad z = 0$$

$\boxed{\text{CASO } x=0}$

$$\begin{cases} y^2+(z-\frac{1}{2})^2=1 \\ y^2+z^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+z^2-z+\frac{1}{4}=1 \\ y^2+z^2=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=1/4 \\ y=\pm\frac{\sqrt{15}}{4} \end{cases} \qquad (x,y,z)=\left(0,\pm\frac{\sqrt{15}}{4},\frac{1}{4}\right)$$

$$\downarrow$$

$$g=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$\boxed{\text{CASO } z=0}$

$$y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1$$

$$x^2+1+\frac{1}{4}=1 \quad \text{impossível!}$$

Logo $\quad -1 < -\frac{\sqrt{15}}{4} < \frac{\sqrt{15}}{4} < 1$

$$\underset{\substack{\text{valor mínimo}}}{g(0,-1,\tfrac{1}{2})} = -1 \qquad 1 = \underset{\substack{\text{valor máximo}}}{g(0,1,1/2)}$$

$(0,-1,1/2)$ é o mínimo absoluto de $g|_D$

$(0,1,1/2)$ é o máximo absoluto de $g|_D$.

31-03-2021

Uma função contínua $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida num domínio D com interior não vazio diz-se uma parametrização ou superfície parametrizada. O contradomínio $f(D)$ diz-se o traço de f.

PARAMETRIZAÇÕES REGULARES

Uma parametrização $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diz-se regular se f fôr de classe C^1 em $\operatorname{int}(D)$ e

$$\forall (u,v) \in \operatorname{int}(D) \qquad \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \neq (0,0,0),$$

i.e. se as derivadas parciais f_u e f_v forem linearmente independentes.

PARAMETRIZAÇÕES SIMPLES

Uma superfície parametrizada injectiva diz-se simples.

Definição 4.26 *Seja* $D \subset \mathbb{R}^2$ *um conjunto conexo por arcos, com interior não vazio e tal que* $D \subset \overline{\operatorname{int} D}$. *Uma parametrização* $r : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto r(u, v)$, *diz-se* **regular**,

1. *se* r *é de classe* C^1 *no interior de* D *e*
2. *se os vectores* $\dfrac{\partial r}{\partial u}(u, v)$ *e* $\dfrac{\partial r}{\partial v}(u, v)$ *são linearmente independentes, para todo* $(u, v) \in \operatorname{int} D$ *(o que é equivalente a dizer que* $\dfrac{\partial r}{\partial u} \times \dfrac{\partial r}{\partial v}(u, v)$ *é não nulo).*

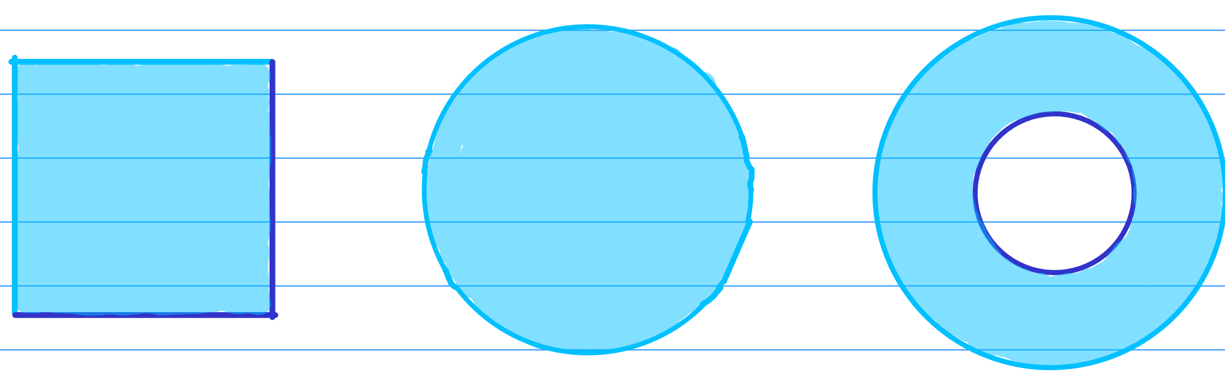
Hipóteses não assumidas acima.

Definição 4.27 *Um conjunto* $D \subset \mathbb{R}^2$ *limitado, não vazio e com* $D \subset \overline{\operatorname{int} D}$, *diz-se uma* **região ou domínio admissível** *se, e só se,*

1. *D é um conjunto conexo por arcos, cuja fronteira é a união finita de curvas de Jordan que não se intersectam;*
2. *as curvas de Jordan referidas no ponto anterior são uniões finitas de gráficos de funções reais contínuas definidas em intervalos compactos de* $\mathbb{R}$.

Os conjuntos que se seguem são exemplos que se encontram nas condições da definição anterior:

$$]0, 2] \times [3, 4[, \;\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}, \;\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}.$$



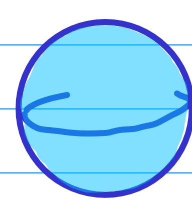
Definição 4.28 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que uma função $f : A \to \mathbb{R}^m$ é um* **homeomorfismo** *de A sobre $f(A)$ se é injectiva, contínua e se a sua inversa, $f^{-1} : f(A) \to A$, também é uma função contínua.*

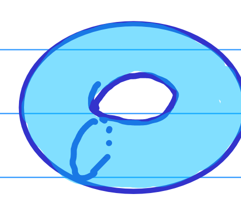
Definição 4.29 *Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ uma região admissível. Chamamos* **parametrização admissível** *a uma função $r : D \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto r(u, v)$, tal que*

1. *r é um homeomorfismo de $\operatorname{int} D$ sobre $r(\operatorname{int} D)$;*
2. *r é regular, isto é,*
   (a) *$r \in C^1(\operatorname{int} D)$;*
   (b) *$\dfrac{\partial r}{\partial u} \times \dfrac{\partial r}{\partial v}(u, v)$ é não nulo, para todo $(u, v) \in \operatorname{int} D$;*
3. *r prolonga-se a um aberto $\Omega \supset \overline{D}$, de tal forma que $r \in C^1(\Omega)$.*

PROPOSIÇÃO Se $f : D \to \mathbb{R}^3$ for uma parametrização admissível, num domínio admissível, então o traço $S = f(\operatorname{int}(D))$ é uma superfície

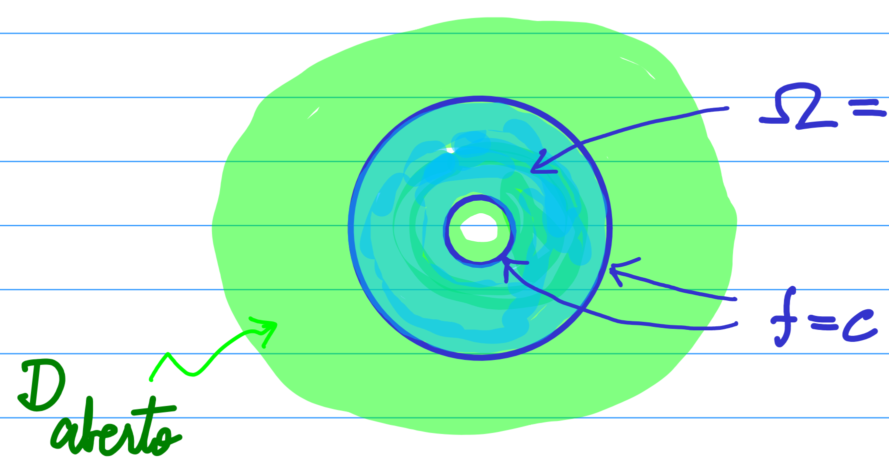
$S \subseteq \mathbb{R}^3$ diz-se uma superfície se fôr localmente representado como o gráfico duma função de classe C^1 de um dos tipos $z = \varphi(x,y)$, $y = \varphi(x,z)$ ou $x = \varphi(y,z)$ em algum aberto de $\mathbb{R}^2$.


esfera


toro

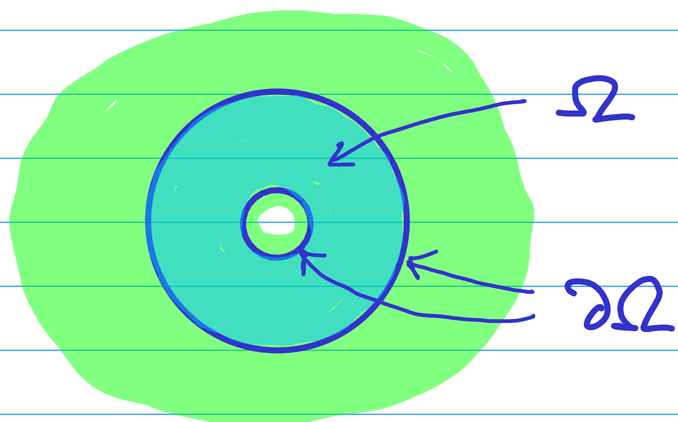
PROPOSIÇÃO Se $S \subseteq \mathbb{R}^3$ é uma superfície, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto, $f: \Omega \to S$ uma parametrização regular simples e $D \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio admissível tal que $\overline{D} \subseteq \Omega$ então $f|_D : D \to \mathbb{R}^3$ é uma parametrização admissível.

DEFINIÇÃO Vamos chamar domínio com bordo regular a conjunto compacto (fechado e limitado) da forma $\Omega = \{(x,y) \in D : f(x,y) \leq c\}$ onde $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$ sempre que $(x,y) \in D$ e $f(x,y) = c$



PROPOSIÇÃO Seja Ω um domínio com bordo regular como acima. Então $\partial\Omega = \{(x,y) \in D : f(x,y) = c\}$ é a fronteira do conjunto Ω em $\mathbb{R}^2$.

O conjunto $\partial\Omega$ diz-se o bordo do domínio Ω.



PROVA

$\{x \in D : f(x) < c\}$ aberto $\Longrightarrow \{x \in D : f(x) < c\} \subseteq \mathrm{int}(\Omega)$

Ω compacto $\Longrightarrow$ Ω fechado $\Longrightarrow \mathrm{fr}(\Omega) \subseteq \Omega$

$$\Longrightarrow \mathrm{fr}(\Omega) \subseteq \{x \in D : f(x) = c\}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{fr}(\Omega) = \{x \in D : f(x) = c\}$$

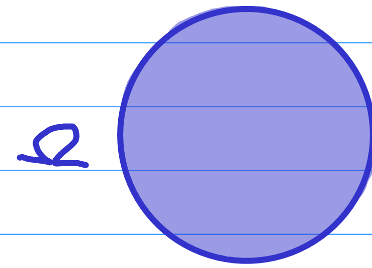
$\blacksquare$

EXEMPLO 1 $\Omega = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$

é um domínio com bordo regular

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2+y^2$

$\nabla f(x,y)\neq(0,0)$
sempre que $x^2+y^2=1$

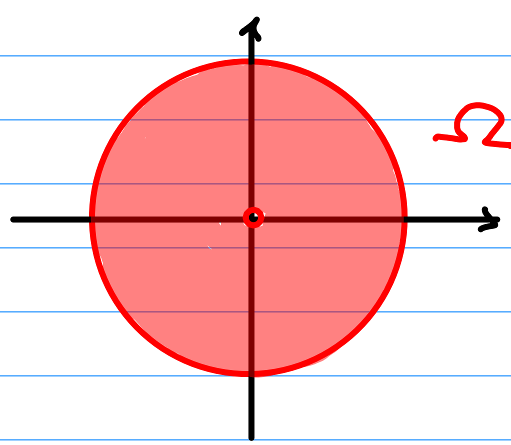


EXEMPLO 2 $\Omega = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : 0<x^2+y^2\leq 1\}$

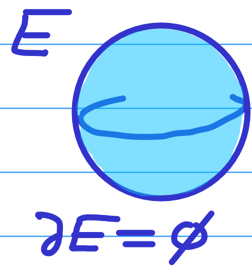
não é compacto e como tal não é um domínio com bordo regular, apesar de termos

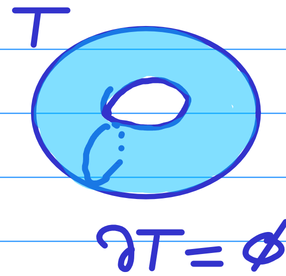
$\Omega=\{(x,y)\in D: f(x,y)\leq 1\}$ onde $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

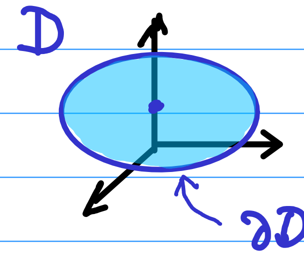
e $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, ser de classe C^1.

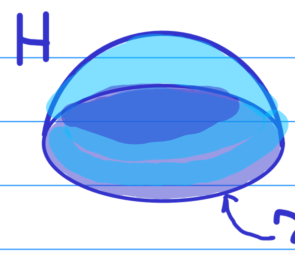


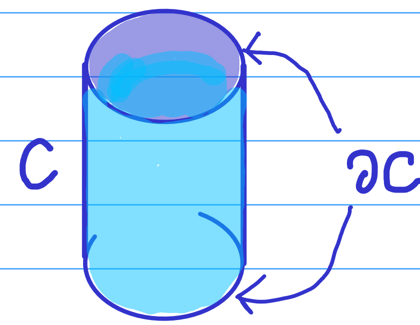
EXEMPLOS DE SUPERFÍCIES COM BORDO REGULAR



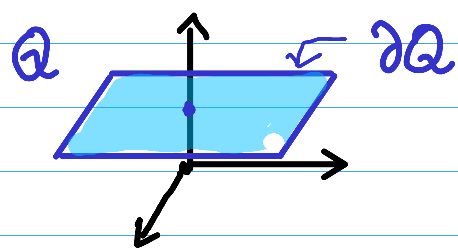






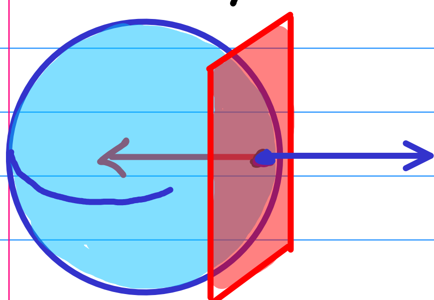


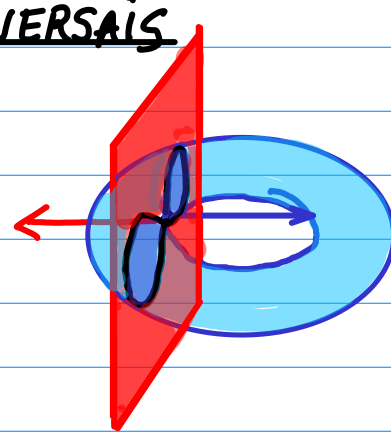
SUPERFÍCIE COM BORDO IRREGULAR

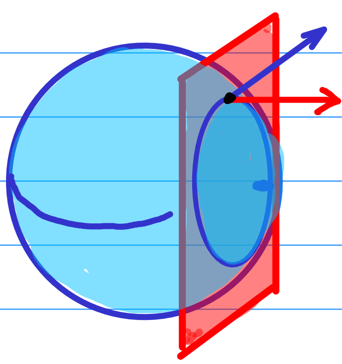


A irregularidade do bordo
resulta da presença de cantos

INTERSECÇÕES NÃO TRANVERSAIS







← INTERSECÇÃO TRANSVERSAL

DEFINIÇÃO Vamos chamar superfície com bordo regular a um conjunto compacto de forma

$$\Omega = \{(x,y,z) \in D : f(x,y,z) = a,\ g(x,y,z) \leq b\}$$

onde $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 tais que

(a) $\nabla f(x,y,z) \neq (0,0,0)$ sempre que $(x,y,z) \in \Omega$

(b) $\nabla f(x,y,z) \times \nabla g(x,y,z) \neq (0,0,0)$ sempre que $(x,y,z) \in \Omega$ e $g(x,y,z) = b$.

O conjunto

$$\partial\Omega = \{(x,y,z) \in D : f(x,y,z) = a,\ g(x,y,z) = b\}$$

diz-se o bordo de Ω. Este conjunto não é a fronteira de Ω.

A condição (a) garante que o conjunto de nível f(x,y,z)=a determina uma superfície contendo Ω.

A condição (b) garante que as superfícies { f(x,y,z)=a } e { g(x,y,z)=b } se intersectam transversalmente ao longo do bordo $\partial\Omega$.

EXEMPLO 1

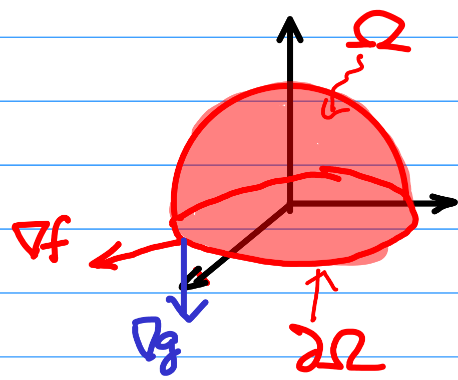
$$\Omega = \Big\{(x,y,z) : \overbrace{x^2+y^2+z^2}^{f(x,y,z)} = 1, \ \overbrace{z}^{-g(x,y,z)} \geq 0 \Big\}$$

$g \leq 0$

$\nabla f = (2x, 2y, 2z)$ $\quad \nabla g = (0, 0, -1)$

$$\nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2x & 2y & 2z \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2y, 2x, 0) \neq (0,0,0)$$

se $z = 0$, $x^2+y^2+z^2 = 1$



$$\partial\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1, \ z = 0\}$$

EXEMPLO 2

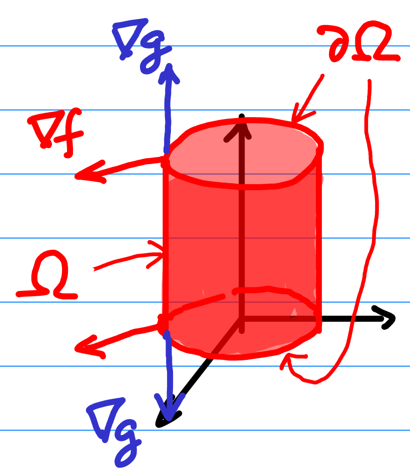
$$\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2=1,\ 0\leq z \leq 1\}$$

$$= \{(x,y,z) : \underbrace{x^2+y^2}_{f(x,y,z)}=1,\ \underbrace{z(z-1)}_{g(x,y,z)}\leq 0\}$$

$\nabla f = (2x, 2y, 0)$ $\qquad$ $\nabla g = (0,0,2z-1)$

$$\nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2x & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2z-1 \end{vmatrix} = \left(2y(2z-1), -2x(2z-1), 0\right)$$

- $z=0,\ x^2+y^2=1 \implies \nabla f \times \nabla g = (-2y, 2x, 0) \neq \vec{0}$
- $z=1,\ x^2+y^2=1 \implies \nabla f \times \nabla g = (2y, -2x, 0) \neq \vec{0}$



$$\partial\Omega = \{(x,y,z) : x^2+y^2=1,\ z=0\} \cup \{(x,y,z) : x^2+y^2=1,\ z=1\}$$

PROPOSIÇÃO Seja $S \subseteq \mathbb{R}^3$ uma superfície definida como um conjunto de nível ($D \subseteq \mathbb{R}^3$ aberto)

$$S = \{(x,y,z) \in D : f(x,y,z) = a\}$$

tal que $\nabla f(x,y,z) \neq (0,0,0)$ $\forall (x,y,z) \in S$

Seja $r : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ uma parametrização regular simples num aberto U. Dado um domínio com bordo regular $\Omega \subseteq U$, o conjunto $M = r(\Omega)$ é uma superfície com bordo regular tal que

$$\partial M = r(\partial \Omega).$$

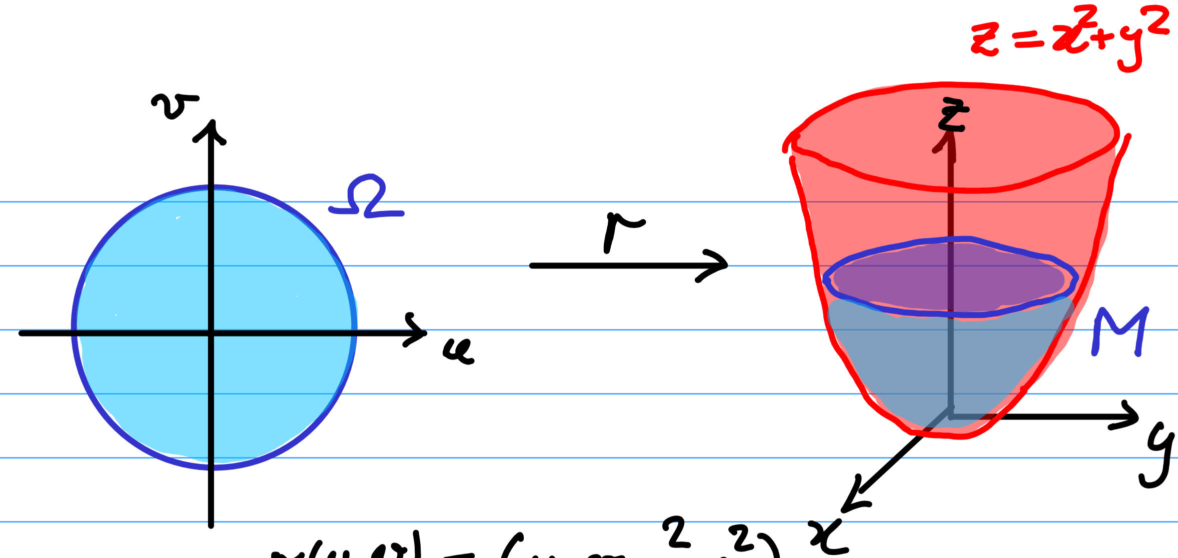
EXEMPLO

$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $r(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$
parametrização regular simples do gráfico

$$S = \{(x,y,z) : z = x^2+y^2\}$$

$\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \leq 1\}$ domínio com bordo regular

$M = r(\Omega) = \{(x,y,z) : -z+x^2+y^2 = 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$
é uma superfície com bordo regular.



$r(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$

ORIENTAÇÕES

Uma superfície $S \subseteq \mathbb{R}^3$ fica orientada pela escolha de um dos seus lados que pode ser especificado por um campo normal unitário $N: S \to \mathbb{R}^3$ (função contínua tal que $\|N(x,y,z)\| = 1$, $N(x,y,z)$ ortogonal a S no ponto (x,y,z), $\forall (x,y,z) \in S$)

Exemplo 1 Dada $f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e $S = \{(x,y,z) \in D : f(x,y,z) = c\}$ tal que $\nabla f(x,y,z) \neq (0,0,0)$ sempre que $(x,y,z) \in S$,

$$N: S \to \mathbb{R}^3, \quad N(x,y,z) = \frac{\nabla f(x,y,z)}{\|\nabla f(x,y,z)\|}$$

é um campo normal unitário que determina uma orientação em S

Exemplo 2 Se $r: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ for uma parametrização regular simples da superfície S então $N: S \to \mathbb{R}^3$ definida por

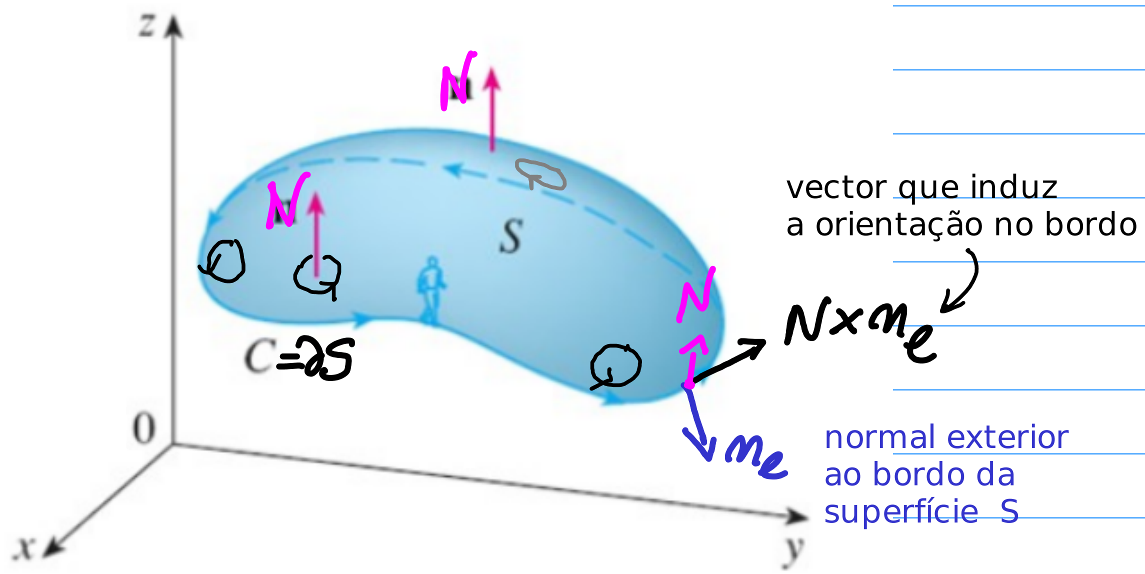
$$N(r(u,v)) = \frac{\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\|}$$ é um campo

normal unitário que determina uma orientação em S.

ORIENTAÇÃO INDUZIDA NO BORDO DUMA SUPERFÍCIE COM BORDO REGULAR

Seja S uma superfície com bordo orientada pela escolha dum campo normal unitário $N: S \to \mathbb{R}^3$. Esta por sua vez induz uma orientação no bordo ∂S que pode ser descrita informalmente como o sentido em que um observador deve percorrer o bordo do lado N

de forma a manter S à sua esquerda.



EXEMPLO $S=\{(x,y,z): \underbrace{x^2+y^2}_{f(x,y,z)}=1\ ,\ \underbrace{0\leq z\leq 1}_{\underbrace{z(z-1)\leq 0}_{g(x,y,z)}}\}$

$$N=\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}=(x,y,0)$$

$$n_e=\nabla g=(0,0,2z-1)$$
$$=\begin{cases}(0,0,1) & z=1\\(0,0,-1) & z=1\end{cases}$$