Extremos Condicionados

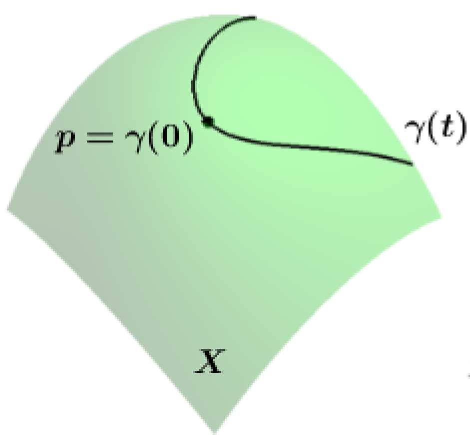
1 Optimização Condicionada

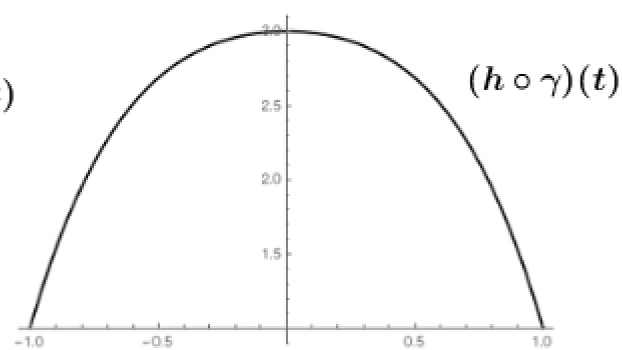
Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto (não aberto) e $h : U \to \mathbb{R}$ uma função contínua definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $X \subset U$. Pelo Teorema de Weierstrass existem $a, b \in X$ tais que $h(a) = \min\{h(x) \colon x \in X\}$ e $h(b) = \max\{h(x) \colon x \in X\}$. O problema de encontrar os pontos a e b, respectivamente mínimo e máximo absolutos de $h|_X$, diz-se um problema de *optimização condicionada*.

Vamos usar as ferramentas do Cálculo Diferencial para estudar este problema.

Sejam $h : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $X \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão k e classe C^r, $r \geq 1$. Mais presisamente seja $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ uma função de classe C^r tal que $X = \{x \in U \colon f(x) = c\}$, onde $c \in \mathbb{R}^{n-k}$ é um valor regular da aplicação f. Como visto anteriormente, sendo não vazio, o conjunto X é uma variedade de dimensão $k = n - (n - k)$.

Um ponto $p \in X$ diz-se um *extremo* (absoluto) de $h|_X$ se $h(p) = \min\{h(x) \colon x \in X\}$ ou $h(p) = \max\{h(x) \colon x \in X\}$; e diz-se um *ponto crítico* de $h|_X$ se para toda a curva parametrizada $\gamma :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tal que $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(t) \in X \quad \forall t \in]-\delta, \delta[$ tivermos que $(h \circ \gamma)'(0) = 0$.





Proposição 1. *Todo o extremo de $h|_X$ é um ponto crítico de $h|_X$.*

Demonstração. Exercício. $\square$

Proposição 2. *Dado $p \in X$, p é um ponto crítico de $h|_X \;\Leftrightarrow\;$ existem $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$ (ditos os multiplicadores de Lagrange) tais que*

$$\nabla h(p) = \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \, \nabla f_j(p).$$

Demonstração. Por definição de ponto crítico, dada uma curva $\gamma :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tal que $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(t) \in X \quad \forall t \in]-\delta, \delta[$, temos

$$0 = (h \circ \gamma)'(0) = \nabla h(p) \cdot \gamma'(0).$$

Equivalentemente, $p \in X$ é ponto crítico de $h|_X$ sse

$$\nabla h(p) \cdot v = 0, \quad \forall\, v \in T_p X.$$

Por outro lado, como $X = \{x \in U \colon f(x) = c\}$ onde $c \in \mathbb{R}^{n-k}$ é um valor regular da aplicação f temos

$$T_p X = \mathrm{Nuc}(J_f(p)) = \langle \nabla f_1(p), \dots, \nabla f_{n-k}(p) \rangle^{\perp},$$

onde $\langle v_1, \dots, v_{n-k} \rangle$ designa o espaço gerado pelos vectores $v_1, \dots, v_{n-k} \in \mathbb{R}^n$. Note que as linhas da matriz Jacobiana $J_f(p)$ são os gradientes das componentes da aplicação $f : U \to \mathbb{R}^{n-k}$.

Logo $p \in X$ é ponto crítico de $h|_X$ sse

$$\nabla h(p) \in T_p X^{\perp} = \langle \nabla f_1(p), \dots, \nabla f_{n-k}(p) \rangle,$$

ou seja, $p \in X$ é ponto crítico de $h|_X$ sse existem $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\nabla h(p) = \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \, \nabla f_j(p).$$

□

2 Método dos Multiplicadores de Lagrange

Os extremos de $h|_X$ e mais geralmente todos os pontos críticos de $h|_X$, são soluções do seguinte sistema nas $(n-k)+n$ variáveis $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}, x_1, \dots, x_n)$.

$$\begin{cases} f(x) = c \\ \nabla h(x) = \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \nabla f_j(x) \end{cases}$$

envolvendo as seguintes $(n-k)+n$ equações

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = c_1 \\ \cdots \\ f_{n-k}(x_1, \dots, x_n) = c_{n-k} \\ \frac{\partial h}{\partial x_1}(x) = \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x) \\ \cdots \\ \frac{\partial h}{\partial x_n}(x) = \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(x) \end{cases}.$$

O método de Raphson-Newton permite aproximar as soluções deste sistema nos casos em que ele não pode ser resolvido analiticamente.

Exercício 1. *Mostre que o conjunto*

$$X = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon x^2 + y^2 - z\,w = 1,\ z + w = 1\}$$

é uma variedade compacta (uma esfera) e determine os extremos absolutos da função $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $h(x, y, z, w) := x + y$, *no conjunto* X.

O problema seguinte foi resolvido na aula

Exercício 2. *Ache os extremos absolutos da função* $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h(x, y, z) := x - y + z$, *sobre semi-esfera*

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z \geq 0\}.$$