Princípio do Máximo

1 Teorema de Bolzano Weierstrass

Seja $\{x_n\}_n$ uma sucessão de vectores

$$x_n = (x_{n,1}, \ldots, x_{n,d}) \in \mathbb{R}^d.$$

Dada uma sequência estritamente crescente de números inteiros $\{n_k\}_k$,

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

a sucessão $\{x_{n_k}\}_k$ diz-se uma subsucessão de $\{x_n\}_n$.

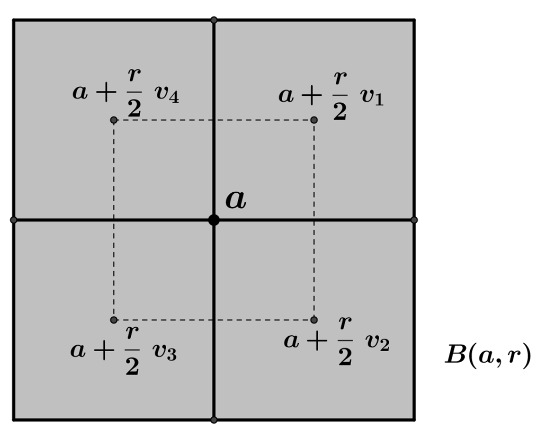
Vamos usar o termo d-cubo para designar um produto cartesiano de d intervalos fechados e limitados, todos com o mesmo comprimento.

Exercício 1. *Mostre que todo o d-cubo é uma bola fechada para a norma do máximo, cujo raio é metade do comprimento comum a todos os lados do d-cubo.*

Dividindo cada lado dum d-cubo ao meio obtemos uma decomposição deste em 2^d d-cubos com metade do lado.

Exercício 2. *Seja $B(a,r)$ a bola fechada de cento $a \in \mathbb{R}^d$ e raio $r > 0$ relativamente à norma do máximo $\|\cdot\|_\infty$. Mostre que $B(a,r)$ é a união da seguinte família com 2^d d-cubos*

$$\left\{ B\left(a + \frac{r}{2}\,v,\, \frac{r}{2}\right) \,:\, v \in \{-1,1\}^d \right\}.$$



Exercício 3. *Mostre que o diâmetro dum d-cubo B relativamente à norma do máximo,*

$$\operatorname{diam}(B) = \sup\{\|x-y\|_\infty \colon x, y \in B\}$$

é igual ao comprimento do seu lado.

Teorema 1. *Toda a sucessão limitada $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R}^d$ admite uma subsucessão convergente.*

Demonstração. Sendo $\{x_n\}_n$ uma sucessão limitada, existe $R > 0$ tal que $\|x_n\|_\infty \le R$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $|x_{n,j}| \le \|x_n\|_\infty \le R$, todos os termos da sucessão $\{x_n\}_n$ estão contidos no d-cubo $B_0 := [-R, R]^d$. Consideremos a decomposição $\{B_{0,j} \colon 1 \le j \le 2^d\}$ de B_0 em 2^d d-cubos com metade do lado de B_0 e os conjuntos $N_j := \{n \in \mathbb{N} \colon x_n \in B_{0,j}\}$, cuja união coincide com $\mathbb{N}$. Como esta união é finita, pelo menos um destes conjuntos tem de ser infinito. Definimos $B_1 = B_{0,k}$ onde $k = \min\{1 \le j \le 2^d \colon N_j \text{ é infinito }\}$. Subdividindo B_1 em d-cubos $B_{1,j}$, $1 \le j \le 2^d$, com metade do lado de B_1 escolhemos B_2 como o primeiro destes d-cubos tal que o conjunto $\{n \in \mathbb{N} \colon x_n \in B_2\}$ seja infinito. Continuando o procedimento até ao infinito construimos uma sucessão encaixada

$$B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_k \supset \cdots$$

onde cada B_k é um d-cubo de lado $R/2^{k-1}$ e a sucessão $\{x_n\}$ tem uma infinidade de termos em B_k, i.e., $\{n \in \mathbb{N} \colon x_n \in B_k\}$ é um conjunto infinito. Definindo recursivamente $n_1 = \min\{j \in \mathbb{N} \colon x_j \in B_1\}$ e $n_k = \min\{j > n_{k-1} \colon x_j \in B_k\}$, obtemos uma subsucessão $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que $x_{n_k} \in B_k$ para todo $k \in B_k$. Quaisquer que sejam $i, j \ge k$, $x_{n_i}, x_{n_j} \in B_k$ que é um d-cubo com diâmetro $R/2^{k-1}$. Logo

$$i, j \ge k \quad \Rightarrow \quad \|x_{n_i} - x_{n_j}\|_\infty \le \frac{R}{2^{k-1}}$$

o que mostra que $\{x_{n_j}\}_j$ é uma sucessão de Cauchy. Como $\mathbb{R}^d$ é completo (relativamente a qualquer das suas normas e em particular para a norma $\|\cdot\|_\infty$), esta subsucessão é convergente. ☐

2 Teorema de Weierstrass

Teorema 2. *Seja $X \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto fechado e limitado. Toda a função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ admite um máximo e um mínimo, i.e., existem pontos $x_*, y_* \in X$ (máximo e mínimo respectivamente) tais que $f(x_*) = \sup_{x\in X} f(x) \quad e \quad f(y_*) = \inf_{x\in X} f(x)$.*

Demonstração. Seja $b = \sup_{x\in X} f(x)$ e tome-se uma qualquer sucessão $b_n < b$ tal que $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Por exemplo $b_n = b - \frac{1}{n}$ se $b < +\infty$, ou $b_n = n$ se $b = +\infty$. Como b é o menor dos majorantes dos valores $f(x)$ com $x \in X$, b_n não é um majorante. Logo existe $x_n \in X$ tal que $b_n < f(x_n) \le b$, o que implica que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = b$. A sucessão $\{x_n\}$ de pontos que acabámos de descrever diz-se uma *sucessão maximizante* para f.

Como X é limitado, o mesmo acontece com a sucessão maximizante $\{x_n\}$. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass existe uma subsucessão $\{x_{n_k}\}_k$ que converge para um ponto $x_* \in \mathbb{R}^d$. Como X é fechado concluímos que $x_* \in X$. Finalmente, pela continuidade de f e pela uniciade do limite,

$$f(x_*) = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = b.$$

A existência de mínimo faz-se de modo inteiramente análogo construíndo uma sucessão minimizante e mostrando que ela converge para um ponto de X. $\square$

3 Extensão do Teorema de Weierstrass

Sejam $X \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto ilimitado e $f : X \to \mathbb{R}$ uma aplicação.

Dizemos que $f(x)$ tende para $+\infty$ quando $\|x\| \to +\infty$, escrevemos

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

se qualquer que seja $A > 0$ existir $R > 0$ tal que

$$x \in X \ \text{ e } \ \|x\| > R \ \Rightarrow \ f(x) > A.$$

Significa isto que tomando pontos $x \in X$ com norma arbitrariamente grande, os valores $f(x)$ da função f tendem para $+\infty$. Quando o domínio X é fechado em $\mathbb{R}^d$, as aplicações com este limite infinito dizem-se *funções próprias*.

O conjunto $\{x \in X : f(x) \leq A\}$ diz-se um *semiespaço de* f.

Proposição 1. *No contexto acima são equivalentes:*

(a) $\displaystyle\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty,$

(b) o semiespaço $\{x \in X : f(x) \leq A\}$ *é limitado,* $\forall\, A > 0$.

Demonstração. Segue da equivalência entre as três frases seguintes:

(1) $x \in X$ e $\|x\| > R \ \Rightarrow \ f(x) > A$

(2) $x \in X$ e $f(x) \leq A \ \Rightarrow \ \|x\| \leq R$

(3) $\{x \in X : f(x) \leq A\} \subset B(0, R)$

$\square$

Teorema 3. *Seja X um conjunto fechado mas ilimitado em $\mathbb{R}^d$. Toda a função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$ admite um mínimo, i.e., existe $x_* \in X$ tal que $f(x_*) = \inf_{x \in X} f(x)$.*

Demonstração. Tomemos um ponto $x_0 \in X$ e um número $A > f(x_0)$. Pela proposição anterior o conjunto $F := \{x \in X : f(x) \leq A\}$ é limitado. Este conjunto é não vazio porque $x_0 \in F$. Finalmente, F é fechado porque X é fechado e f é contínua.

Como F é fechado e limitado, pelo Teorema de Weierstrass existe $x_* \in F$ tal que $f(x_*) \leq f(x)$, $\forall\, x \in F$. Por outro lado, se $x \in X \setminus F$ então $f(x) > A$ e portanto $f(x_*) \leq f(x_0) < A < f(x)$. Logo $f(x_*) \leq f(x)$ para todo $x \in X$, ou seja $f(x_*) = \inf_{x \in X} f(x)$. $\square$

O procedimento mais simples para justificar que uma função tem limite infinito no infinito é o seguinte critério de comparação.

Exercício 4. *Dadas duas funções $f, g : X \to \mathbb{R}$ veja que*

$$f(x) \geq g(x),\ \forall\, x \in X \quad e \quad \lim_{\|x\| \to +\infty} g(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Exemplo 1. *Ache a área mínima para a superfície duma caixa paralelipipédica de lados x, y e z (números positivos) com volume igual a 1.*

Resolução. Consideremos o conjunto fechado e ilimitado

$$X := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ x\,y\,z = 1\,\}$$

que representa as caixas paralelipipédicas com volume unitário. A área da superfície duma caixa com dimensões (x, y, z) é dada por

$$A(x, y, z) := 2\,x\,y + 2\,x\,z + 2\,y\,z.$$

O problema posto consiste em mostrar que existe o mínimo da função $A(x, y, z)$ sobre o conjunto X e encontrar um ponto $(x_0, y_0, z_0) \in X$ que o realize

$$A(x_0, y_0, z_0) = \inf_{(x,y,z) \in X} A(x, y, z).$$

Este é um problema de *extremos condicionados.* Pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange vê-se que $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1) \in X$ é o único extremo condicionado deste problema, mas há ainda que justificar porque é que ele corresponde ao mínimo da função $A(x, y, z)$ sobre o conjunto X.

Definindo $m(x, y, z) := \min\{|x|, |y|, |z|\}$ temos

$$m(x, y, z)^2\, \|(x, y, z)\|_\infty \leq |x|\,|y|\,|z| = 1$$

pelo que para $(x, y, z) \in X$

$$A(x, y, z) = \frac{2}{z} + \frac{2}{y} + \frac{2}{x} \geq \frac{2}{m(x, y, z)} \geq 2\,\sqrt{\|(x, y, z)\|_\infty}.$$

Esta desigualdade mostra que

$$\lim_{\|(x,y,z)\| \to +\infty} A(x, y, z) = +\infty.$$

Pelo Teorema 3, a função A admite um mínimo em X. Logo o único extremo condicionado $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1) \in X$ encontrado pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange tem necessariamente de ser este mínimo.

Assim a caixa paralelipipédica de volume unitário que minimiza a área da sua superfície é a caixa cúbica. $\square$

Exercício 5. *Mostre que o conjunto X do exemplo anterior é fechado em $\mathbb{R}^3$.*

4 Funções Homogéneas

Introduzimos agora uma classe de funções cujo comportamento simples no infinito permite usá-las como modelos comparativos (Exercício 4) no estudo de limites no infinito.

Chama-se *função homogénea de grau* $\alpha \in \mathbb{R}$ a uma função $f : D \to \mathbb{R}$ com domínio $D = \mathbb{R}^d$ ou $D = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tal que

$$f(tx) = t^{\alpha} f(x), \quad \forall x \in D \quad \forall \lambda > 0.$$

Exemplo 2. *A função* $f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \|x\|^{\alpha}$, *é homogénea de grau* α, *qualquer que seja a norma escolhida* $\|\cdot\|$ *em* $\mathbb{R}^d$.

Exemplo 3. *A função* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_d) := x_1^{r_1} \dots x_d^{r_d}$, *com* $r_1, \dots, r_d \in \mathbb{N}$, *diz-se um* monómio *de grau* $r = r_1 + \cdots + r_d$ *e é uma função homogénea de grau* r.

Exemplo 4. *Chama-se* polinómio homogéneo de grau r *a uma função* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *que se exprima como uma combinação linear finita de monómios todos com grau* r. *Por exemplo* $f(x, y) := 3x^2 y + x y^2 - y^3$ *é um polinómio homogéneo de grau* 3.

Todo o polinómio homogéneo de grau r *é uma função homogénea de grau* r.

Exemplo 5. *Sejam* $f, g : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *duas funções homogéneas, de graus* α *e* β *respectivamente. Supondo que* $g(x) \neq 0$, $\forall x \neq 0$, *então* $h = f/g$ *é uma função homogénea de grau* $\alpha - \beta$.

Proposição 2. *Se* $f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ *é contínua e homogénea de grau* α *então existem números* $m \leq M$ *tais que*

$$m \|x\|^{\alpha} \leq f(x) \leq M \|x\|^{\alpha}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$$

Demonstração. Como S é um conjunto fechado e limitado e f é uma função contínua contínua em S, pelo Teorema de Weierstrass existem números $m \leq M$ tais que $M = \sup_{x \in S} f(x)$ e $m = \inf_{x \in S} f(x)$, o que implica que $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in S$.

Por outro lado a função $g(x) := f(x)/\|x\|^{\alpha}$ é 0-homogénea, i.e., $g(\lambda x) = g(x) \ \forall \lambda > 0$. Logo $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

$$g(x) = g(x/\|x\|) = f(x/\|x\|) \in [m, M]$$

o que implica que $m \|x\|^{\alpha} \leq f(x) \leq M \|x\|^{\alpha}$, $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. □

Exercício 6. *Mostre que*

$$\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} \frac{x^2 + y^2 - x y}{\log(x^2 + y^2)} = +\infty.$$

Sugestão: *Use que* $\lim_{t \to +\infty} \frac{t}{\log t} = +\infty$ *e escreva*

$$\frac{x^2 + y^2 - x y}{\log(x^2 + y^2)} = \frac{x^2 + y^2 - x y}{x^2 + y^2} \frac{x^2 + y^2}{\log(x^2 + y^2)}.$$

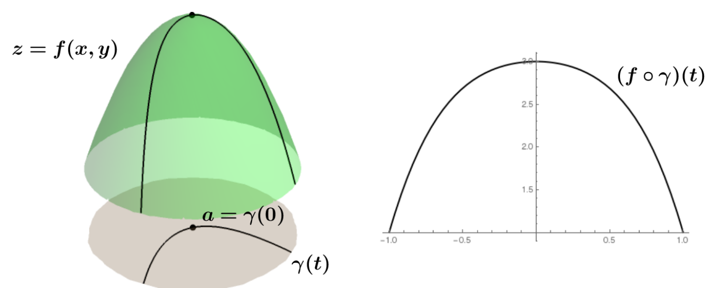
5 Pontos Críticos

Sejam $D \subset \mathbb{R}^d$ um domínio aberto, $a \in D$ um ponto e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função.

Dizemos que a é um *máximo local de* f se existir $\delta > 0$ tal que
$B(a, \delta) \subset D$ e $f(a) \geq f(x),\ \forall\, x \in B(a, \delta)$.

Dizemos que a é um *mínimo local de* f se existir $\delta > 0$ tal que
$B(a, \delta) \subset D$ e $f(a) \leq f(x),\ \forall\, x \in B(a, \delta)$.

Finalmente dizemos que a é um *ponto crítico de* f se para toda a curva diferenciável $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to D$ tal que $\gamma(0) = a$ tivermos $(f \circ \gamma)'(0) = 0$.



Exercício 7. *Supondo que f é uma função diferenciável, mostre que se $a \in D$ for um máximo ou mínimo local de f então a é um ponto crítico de f.*

Proposição 3. *Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $a \in D$.
Então a é um ponto crítico de $f \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f(a) = 0$*

Demonstração. Seja $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to D$ uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = a$ e $\gamma'(0) = v$. Pela regra da Cadeia,

$$(f \circ \gamma)'(0) = \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \nabla f(a) \cdot v.$$

Dado $v \in \mathbb{R}^d$, o segmento de recta $\gamma(t) := a + t\, v$ toma valores em D quando parametrizado num intervalo $]-\varepsilon, \varepsilon[$ com ε suficientemente pequeno. Logo são equivalentes as afirmações:

(1) a é um ponto crítico de f;

(2) $\nabla f(a) \cdot v = 0,\ \forall\, v \in \mathbb{R}^d$;

(3) $\nabla f(a) = 0$.

□

6 Formas Quadráticas

Chama-se forma quadrática a uma função $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dada por um polinómio homogéneo de segundo grau,

$$f(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\, x_i\, x_j.$$

Como os monómios $x_i\,x_j$ e $x_j\,x_i$ coincidem, os coeficientes a_{ij} podem ser escolhidos de forma simétrica, i.e., $a_{ij} = a_{ji}$. Por outras palavras estes coeficientes podem ser dispostos segundo uma matriz simétrica $A = [a_{ij}] \in \mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{R})$. Fazendo a identificação $\mathbb{R}^d \equiv \mathrm{Mat}_{d\times 1}(\mathbb{R})$, a forma quadrática acima exprime-se como

$$f(x) = f_A(x) := x^T\,A\,x = x \cdot (A\,x).$$

A última expressão representa o produto interno entre os vectores x e $A\,x$. A notação f_A enfatiza a dependência da forma quadratica $f(x)$ na matriz simétrica A.

Pelo Teorema de Weierstrass a função f_A admite um máximo e um mínimo na esfera unitária

$$\mathbb{S} := \{x \in \mathbb{R}^d \colon \|x\| = 1\}.$$

Pretendemos agora determinar os valores máximo, $\lambda_{\max} = \lambda_{\max}(A)$, e mínimo, $\lambda_{\min} = \lambda_{\min}(A)$, da forma quadrática f_A em $\mathbb{S}$. Como $f_A(x)$ é uma função homogénea de grau 2, pela Proposição 2 seguirá que para todo $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\lambda_{\min}(A)\,\|x\|^2 \le f_A(x) \le \lambda_{\max}(A)\,\|x\|^2.$$

Dada uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dizemos que $p \in \mathbb{S}$ é um *ponto crítico de* $f|_{\mathbb{S}}$ (restrição de f à esfera $\mathbb{S}$) se para toda a curva diferenciável $\gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\to \mathbb{S}$ tal que $\gamma(0) = p$ tivermos $(f\circ\gamma)'(0) = 0$.

Exercício 8. *Seja $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Mostre que se $p \in \mathbb{S}$ for um extremo de f em $\mathbb{S}$, i.e., $f(p) = \sup\{f(x) \colon x \in \mathbb{S}\}$ ou $f(p) = \inf\{f(x) \colon x \in \mathbb{S}\}$ então p é um ponto crítico de f em $\mathbb{S}$.*

Exercício 9 (Regra de Leibnitz)**.** *Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}^d$ funções diferenciáveis num aberto $D \subset \mathbb{R}^d$. Mostre que para todo $x \in D$ e $v \in \mathbb{R}^d$,*

$$(f\cdot g)'_v(x) = f'_v(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'_v(x).$$

Exercício 10. *Mostre que o gradiente de $f_A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é* $\nabla f_A(x) = 2\,A\,x$.
Sugestão: *Usando o exercício anterior veja que*

$$(f_A)'_v(x) = v\cdot(A\,x) + x\cdot(A\,v) = v\cdot(2\,A\,x).$$

Proposição 4. *Dado $p \in \mathbb{S}$, p é ponto crítico de f_A em $\mathbb{S}$ se e somente se p é um vector próprio unitário de A, i.e., $A\,p = \lambda\,p$, com valor próprio associado $\lambda = f_A(p)$.*

Demonstração. Seja $p \in \mathbb{S}$. Dado $v \in \mathbb{R}^d$ vector unitário tal que $p \perp v$, i.e., $v \cdot p = 0$, a curva parametrizada $\gamma(t) := (\cos t)\,p + (\sin t)\,v$ descreve um círculo máximo em $\mathbb{S}$ com $\gamma(0) = 0$ e $\gamma'(0) = v$.

Se p é ponto crítico de f_A em $\mathbb{S}$ temos

$$0 = (f_A\circ\gamma)'(0) = (\nabla f_A)(\gamma(0))\cdot\gamma'(0) = (\nabla f_A)(p)\cdot v = v\cdot(A\,p).$$

Como o vector (unitário) $v \in p^\perp$ é arbitrário segue que

$$A\,p \in (p^\perp)^\perp = \mathbb{R}\,p.$$

Logo existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A\,p = \lambda\,p$ e $f_A(p) = p \cdot (A\,p) = p \cdot (\lambda\,p) = \lambda$.

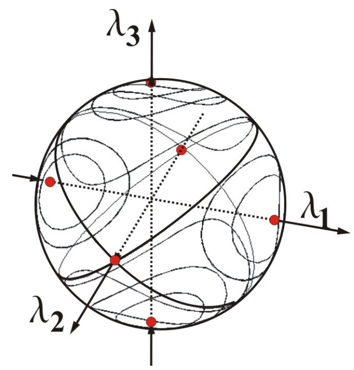
Reciprocamente, se $A\,p = \lambda\,p$ com $p \in \mathbb{S}$, Dada uma curva $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{S}$ diferenciável tal que $\gamma(0) = p$, derivando a relação $\|\gamma(t)\|^2 = 1$ obtemos

$$0 = \frac{d}{dt}\gamma(t) \cdot \gamma(t) = 2\,\gamma(t) \cdot \gamma'(t).$$

Logo

$$(f \circ \gamma)'(0) = \nabla f(p) \cdot \gamma'(0) = \lambda\,p \cdot \gamma'(0) = \lambda\,(\gamma(0) \cdot \gamma'(0)) = 0$$

o que mostra que p é um ponto crítico de $f|_{\mathbb{S}}$. $\square$



A figura acima mostra a intersecção com a esfera $\mathbb{S}$ das superfícies de nível duma forma quadrática diagonal

$$f(x_1, x_2, x_3) := \lambda_1\,x_1^2 + \lambda_2\,x_2^2 + \lambda_3\,x_3^2$$

com $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Os seis pontos críticos de $f|_{\mathbb{S}}$ correspondem às direcções próprias da matriz diagonal $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$ ou seja são as intersecções dos três eixos coordenados com a esfera $\mathbb{S}$.

Exercício 11. *Esboce as superfícies de nível das formas quadráticas definidas pelas matrizes simétricas:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

e descreva as intersecções destas superfícies de nível com a esfera $\mathbb{S}$. Compare com a figura acima.

Proposição 5. *Dada uma matriz simétrica $A \in \mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{R})$ são equivalentes:*

(a) $f_A(x) > 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

(b) Todos os valores próprios de A são positivos,

(c) Existe $c > 0$ tal que $\forall\, x \in \mathbb{R}^d$, $f(x) \geq c\,\|x\|^2$.

Demonstração. Pelo Teorema de Weierstrass, (a) implica $\lambda_{\min}(A) := \min_{x\in S} f_A(x) > 0$. Da Proposição 4 segue que $\lambda_{\min}(A)$ é o menor valor próprio de A. Logo todos os valores próprios de A são positivos, o que prova (b). Supondo (b) temos $\lambda_{\min}(A) > 0$ e da Proposição 2 segue que $f(x) \geq \lambda_{\min}(A)\,\|x\|^2$, o que prova (c). Finalmente, como (c) implica (a), as três afirmações são equivalentes. $\square$

Uma matriz simétrica $A \in \mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{R})$ diz-se *definida positiva* se qualquer uma das três condições equivalentes da proposição anterior for satisfeita.

Exercício 12. *Dada uma matriz simétrica $A \in \mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{R})$ são equivalentes:*

(a) $f_A(x) < 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

(b) Todos os valores próprios de A são negativos,

(c) Existe $c > 0$ tal que $\forall\, x \in \mathbb{R}^d$, $f(x) \leq -c\,\|x\|^2$.

Uma matriz simétrica $A \in \mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{R})$ diz-se *definida negativa* se qualquer uma das três condições equivalentes da exercício anterior for satisfeita. Uma matriz simétrica $A \in \mathrm{Mat}_{d\times d}(\mathbb{R})$ diz-se *indefinida* se admitir valores próprios de sinais contrários, i.e., se $\lambda_{\min}(A) < 0 < \lambda_{\max}(A)$.

Observação 1. *Se A for indefinida, escolhendo vectores próprios unitários $v_{\min}, v_{\max} \in \mathbb{S}$ respectivamente associados aos valores próprios $\lambda_{\min}(A)$ e $\lambda_{\max}(A)$ temos $f_A(t\,v_{\min}) = \lambda_{\min}(A)\,t^2 < 0$ e $f_A(t\,v_{\max}) = \lambda_{\max}(A)\,t^2 > 0$.*

7 Máximos e Mínimos Locais

Vamos establecer fórmulas explícitas para o resto de segunda ordem num desenvolvimento de Taylor de primeira ordem, chamadas fórmulas do resto de Lagrange, primeiro para funções a uma variável e depois para funções a várias variáveis.

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 definida num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$.

Proposição 6. *Dados $a, x \in I$ existe c entre a e x tal que*

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(c)}{2}\,(x-a)^2.$$

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) - f'(a)\,(x-a) &= \int_a^x (f'(t) - f'(a))\,dt \\ &= \int_a^x \int_a^t f''(s)\,ds\,dt \\ &= \int_a^x f''(s)\,(x-s)\,ds \\ &= \frac{(x-a)^2}{2} \int_0^1 (2-2t)\,f''(a + t\,(x-a))\,dt. \end{aligned}$$

Nos dois primeiros passos usamos o Teorema Fundamental do Cálculo, $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$ e $f'(t) - f'(a) = \int_a^x f''(s)\,ds$. No terceiro passo invertemos a ordem de integração. $\int_a^x \int_a^t f''(s)\,ds\,dt = \int_a^x \int_s^x f''(s)\,dt\,ds = \int_a^x f''(s)\,(x-s)\,ds$. No quarto e último passo fazemos a mudança de variável $s = s + t\,(x-a)$ onde $(x-s)\,ds = (1-t)\,(x-a)\,dt$.

Suponhamos agora que $a \leq x$. O caso $x \leq a$ trata-se de forma análoga. Então $J := \{f''(s) \colon s \in [a,x]\}$ é um intervalo fechado e limitado (porquê?). Logo existem números A e B tais que $J = [A,B]$. Dado $t \in [0,1]$, como $f''(a + t\,(x-a)) \in J$, temos

$$A \leq f''(a + t\,(x-a)) \leq B.$$

Integrando e usando que $\int_0^1 (2-2t)\,dt = 1$ obtemos

$$A \leq \int_0^1 (2-2t)\,f''(a + t\,(x-a))\,dt \leq B.$$

Logo $\int_0^1 f''(a + t\,(x-a))\,dt \in J$, i.e., existe $c \in [a,x]$ tal que

$$f''(c) = \int_0^1 (2-2t)\,f''(a + t\,(x-a))\,dt.$$

□

No resto da secção supomos que $D \subset \mathbb{R}^d$ é um domínio aberto e que $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2. A matriz Hessiana de f no ponto a é a matriz quadrada $H_f(a) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right]$ com as segundas derivadas parciais de f no ponto a.

Dados pontos $a, x \in \mathbb{R}^d$ definimos o segmento de recta

$$[a,x] := \{a + t\,(x-a) \colon 0 \leq t \leq 1\}.$$

Proposição 7. *Dados $a, x \in D$ com $[a,x] \subset D$, existe $c \in [a,x]$ tal que*

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2}\,(x-a) \cdot (H_f(c)\,(x-a)).$$

Demonstração. Seja $\gamma : [0,1] \to D$ a parametrização do segmento de recta $[a,x] \subset D$, $\gamma(t) := a + t\,(x-a)$ e $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função de classe C^2, $h(t) := (f \circ \gamma)(t)$.

Aplicando a Proposição 6 à função $h(t)$, de classe C^2, com $a = 0$ e $x = 1$ temos para algum $s \in [0,1]$,

$$h(1) = h(0) + h'(0)\,(1-0) + \frac{1}{2}\,h''(s)\,(1-0)^2 = h(0) + h'(0) + \frac{1}{2}\,h''(s).$$

Por outro lado $h(1) = f(\gamma(1)) = f(x)$ e $h(0) = f(\gamma(0)) = f(a)$.

Derivando, como $\gamma'(t) = x - a$, temos

$$h'(t) = \nabla f(\gamma(t))) \cdot (x-a) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))\,(x_i - a_i)$$

e em $t = 0$, $h'(0) = \nabla f(a) \cdot (x - a)$.

Derivando em t uma segunda vez obtemos

$$\begin{aligned}
h''(t) &= \sum_{i=1}^{d} \left[\nabla \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot (x - a) \right] (x_i - a_i) \\
&= \sum_{i=1}^{d} \left[\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\gamma(t)) \cdot (x_j - a_j) \right] (x_i - a_i) \\
&= \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\gamma(t)) \cdot (x_j - a_j)\,(x_i - a_i) \\
&= (x - a)^T H_f(\gamma(t))\,(x - a).
\end{aligned}$$

Logo $h''(s) = (x - a) \cdot (H_f(c)\,(x - a))$ com $c = \gamma(s) \in [a, x]$. □

Seja $X \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto fechado e limitado. Designamos por $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ o espaço linear de todas as funções contínuas $f : X \to \mathbb{R}$, no qual se define a norma

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in X} |f(x)|.$$

Exercício 13. *Mostre que* $(\mathcal{C}(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ *é um espaço normado completo.*

Pelo Teorema de Weierstrass o funcional $\mathrm{Max} : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Max}(f) := \max_{x \in X} f(x)$, está bem definido.

Proposição 8. *O funcional* $\mathrm{Max} : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *é Lispchitz contínuo:*

$$|\mathrm{Max}(f) - \mathrm{Max}(g)| \leq \|f - g\|_\infty \quad \forall\, f, g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}).$$

Demonstração. Dadas $f, g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ sejam $a, b \in X$ dois pontos tais que $f(a) = \mathrm{Max}(f)$ e $g(b) = \mathrm{Max}(g)$. Como $g(a) \leq g(b) = \mathrm{Max}(g)$ temos

$$\mathrm{Max}(f) = f(a) \leq g(a) + \|f - g\|_\infty \leq g(b) + \|f - g\|_\infty = \mathrm{Max}(g) + \|f - g\|_\infty.$$

Analogamente, como $f(b) \leq f(a) = \mathrm{Max}(f)$,

$$\mathrm{Max}(g) = g(b) \leq f(b) + \|f - g\|_\infty \leq f(a) + \|f - g\|_\infty = \mathrm{Max}(f) + \|f - g\|_\infty.$$

Juntas, estas duas desigualdades implicam que

$$-\|f - g\|_\infty \leq \mathrm{Max}(f) - \mathrm{Max}(g) \leq \|f - g\|_\infty$$

ou seja que $|\mathrm{Max}(f) - \mathrm{Max}(g)| \leq \|f - g\|_\infty$. □

Exercício 14. *Mostre que o funcional* $\mathrm{Min} : \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Min}(f) := \min_{x \in X} f(x)$, *é também Lispchitz contínuo.*

Exercício 15. *Dada* $f : D \to \mathbb{R}$ *de classe* C^2, *sejam* $\lambda_{\min}, \lambda_{\max} : D \to \mathbb{R}$ *as funções que a cada* $x \in D$ *associam respectivamente o menor e o maior valores próprios da matriz Hessiana* $H_f(x)$. *Mostre que as funções* $\lambda_{\min}$ *e* $\lambda_{\max}$ *são contínuas.*

Proposição 9. *Seja $a \in D$ um ponto crítico de f.*

(a) Se $H_f(a)$ é definida positiva então a é um mínimo local de f.

(b) Se $H_f(a)$ é definida negativa então a é um máximo local de f.

(c) Se $H_f(a)$ é indefinida então a não é máximo nem mínimo local.

Demonstração. Se $H_f(a)$ for definida positiva, pela Proposição 5 temos $\lambda_{\min}(a) \geq \delta > 0$ e pelo Exercício 15 existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subset D$ e para todo $x \in B(a,r)$, $\lambda_{\min}(x) \geq \delta/2 > 0$. Usando agora a Proposição 7, como $\nabla f(a) = 0$, temos para todo $x \in B(a,r)$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{1}{2}(x-a) \cdot (H_f(c)\,(x-a)) \\ &\geq f(a) + \frac{\lambda_{\min}(c)}{2}\,\|x-a\|^2 \\ &\geq f(a) + \frac{\delta}{4}\,\|x-a\|^2 \geq f(a). \end{aligned}$$

Logo $x = a$ é um mínimo local de f

Se $H_f(a)$ for definida negativa, pelo Exercício 12 temos $\lambda_{\max}(a) \leq -\delta$ com $\delta > 0$. Pelo Exercício 15 existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subset D$ e para todo $x \in B(a,r)$, $\lambda_{\max}(x) \leq -\delta/2 < 0$. Usando agora a Proposição 7, como $\nabla f(a) = 0$, temos para todo $x \in B(a,r)$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{1}{2}(x-a) \cdot (H_f(c)\,(x-a)) \\ &\leq f(a) + \frac{\lambda_{\max}(c)}{2}\,\|x-a\|^2 \\ &\leq f(a) - \frac{\delta}{4}\,\|x-a\|^2 \leq f(a). \end{aligned}$$

Logo $x = a$ é um máximo local de f.

Se $H_f(a)$ for indefinida, por definição $\lambda_{\min}(a) < 0 < \lambda_{\max}(a)$. Pelo Exercício 15 existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subset D$ e para todo $x \in B(a,r)$, $\lambda_{\min}(x) \leq -\delta/2 < \delta/2 < \lambda_{\max}(x)$. Pela Proposição 7, como $\nabla f(a) = 0$, temos para um certo $c \in [a,x]$ e todo $x \in B(a,r)$,

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{2}(x-a) \cdot (H_f(c)\,(x-a)).$$

Em particular $c \in D$ e $\lambda_{\min}(H_f(c)) = \lambda_{\min}(c) \leq -\delta/2 < 0$ e $\lambda_{\max}(H_f(c)) = \lambda_{\max}(c) \geq \delta/2 > 0$. Logo escolhendo $x_{\min} \in D$ tal que $x_{\min} - a$ seja uma direcção própria de $H_f(c)$ associada ao valor próprio $\lambda_{\min}(c)$ temos

$$f(x_{\min}) = f(a) + \frac{\lambda_{\min}(c)}{2}\,\|x_{\min}-a\|^2 \geq f(a) - \frac{\delta}{4}\,\|x_{\min}-a\|^2 < f(a).$$

Analogamente, escolhendo $x_{\max} \in D$ tal que $x_{\max} - a$ seja uma direcção própria de $H_f(c)$ associada ao valor próprio $\lambda_{\max}(c)$ temos

$$f(x_{\max}) = f(a) + \frac{\lambda_{\max}(c)}{2}\,\|x_{\max}-a\|^2 \geq f(a) + \frac{\delta}{4}\,\|x_{\max}-a\|^2 > f(a).$$

$\square$