# Métodos Iterativos

Pedro Duarte

Março 2018

Os **métodos iterativos** que vamos abordar são ferramentas para:

1. **mostrar a existência de solução** duma equação;
2. e **aproximá-la numericamente**.

Os métodos iterativos **não servem** para achar **explicitamente a solução duma equação**.

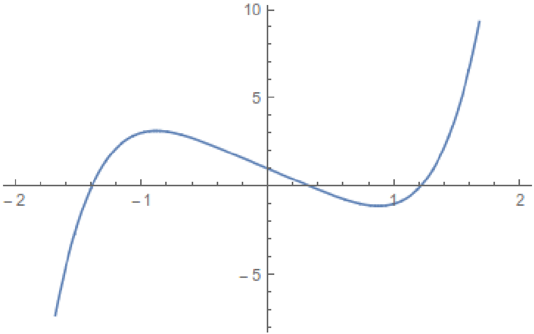
# Equações Algébricas

## Teorema (Ruffini-Abel)

*As soluções ($x \in \mathbb{C}$) da equação*

$$x^5 - 3\,x + 1 = 0$$

*não podem ser expressas em termos de radicais.*

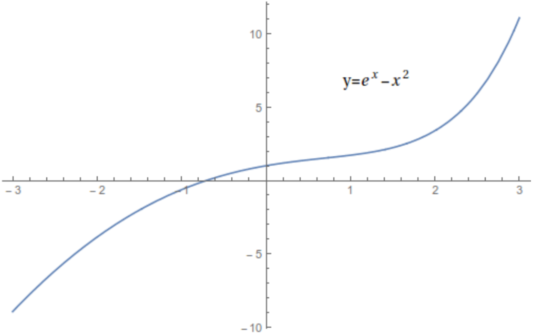


## Teorema (Liouville)

*As soluções ($x \in \mathbb{R}$) da equação*

$$e^x = x^\alpha$$

*não podem ser expressas em termos de funções elementares do parâmetro $\alpha$.*



Um sistema de $d$ equações lineares em $d$ incógnitas pode escrever-se na forma duma equação vectorial

$$AX = B \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{dd} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & \cdots & a_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{bmatrix}$$

cuja solução pode ser explicitamente determinada pelo **método de eliminação de Gauss**.

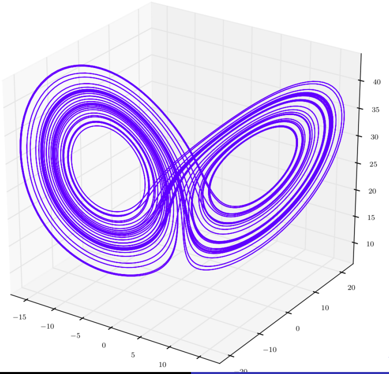
Quando $d \gg 10^4$ mesmo que a matriz $A$ seja esparsa a resolução do sistema por eliminação de Gauss não é computacionalmente viável.

# Equações diferenciais ordinárias

Para um conjunto aberto de condições iniciais a solução da equação de E. Lorenz

$$\begin{cases} x' &= 10\,(y-x) \\ y' &= x\,(2.66-z)-y \\ z' &= x\,y - 28\,z \end{cases}$$

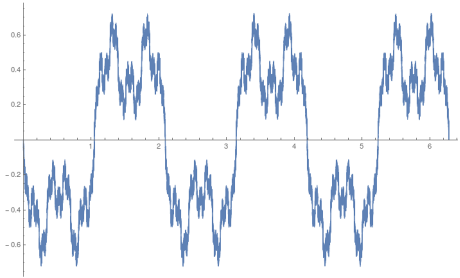
converge para um atractor caótico.



# Equações funcionais

O gráfico da única solução $\frac{2\pi}{3}$-periódica da seguinte equação funcional é uma curva fractal. A solução, pertence a classe de **funções** chamadas **de Weierstrass**, que são contínuas mas não são diferenciáveis em nenhum ponto.

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(f(3\,x) - \sin(3\,x)\right)$$



# Equações de Ponto fixo

Dada uma aplicação $f : X \to X$, um ponto $x \in X$ tal que

$$f(x) = x$$

diz-se um **ponto fixo** de $f$.

A equação anterior diz-se uma **equação de ponto fixo**.

# Pontos fixos contractivos

**Teorema**

*Seja* $X \subset \mathbb{R}^d$ *um conjunto fechado e limitado e* $f : X \to X$ *uma aplicação contínua e contractiva, i.e., tal que para uma certa constante* $0 < \kappa < 1$*, quaisquer que sejam* $x, y \in X$,

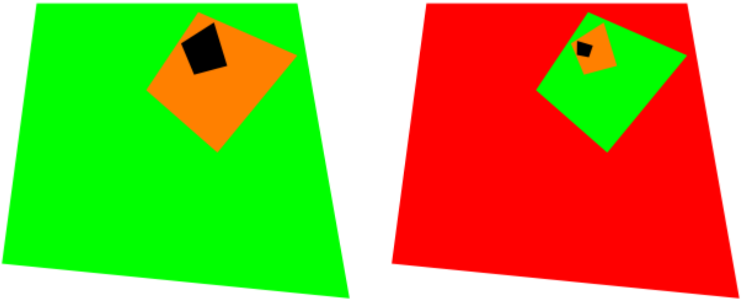
$$d(f(x), f(y)) \leq \kappa\, d(x, y).$$

*Então* $f$ *tem um único ponto fixo* $x_* = f(x_*)$ *e para todo* $x_0 \in X$,

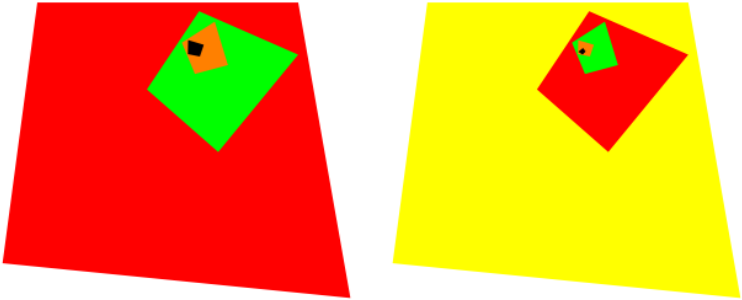
$$x_* = \lim_{n \to +\infty} f^n(x_0).$$

# Pontos fixos contractivos

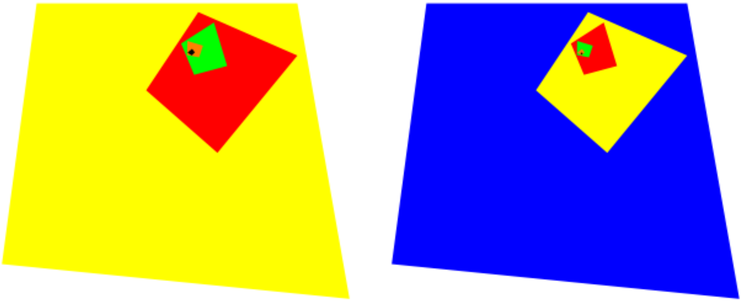
# Pontos fixos contractivos



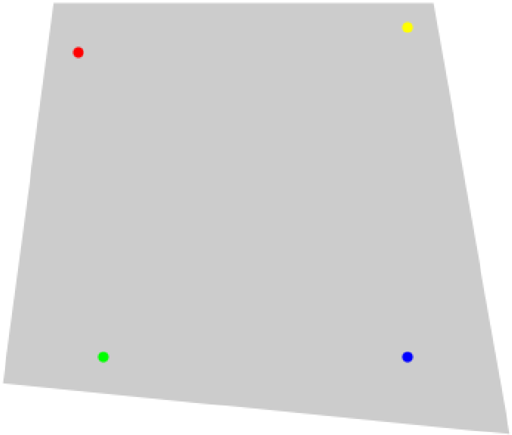
# Pontos fixos contractivos



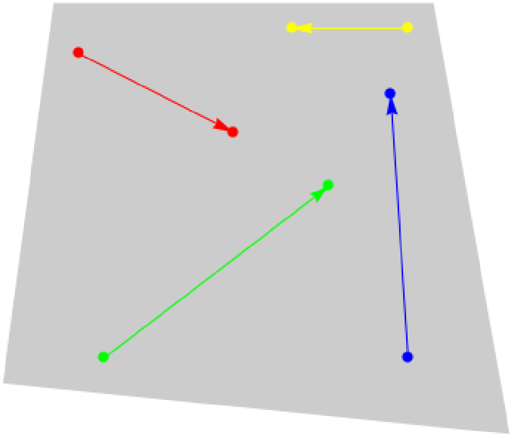
# Pontos fixos contractivos

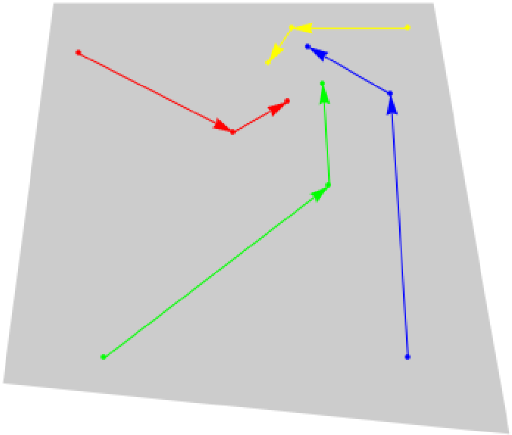


# Pontos fixos contractivos

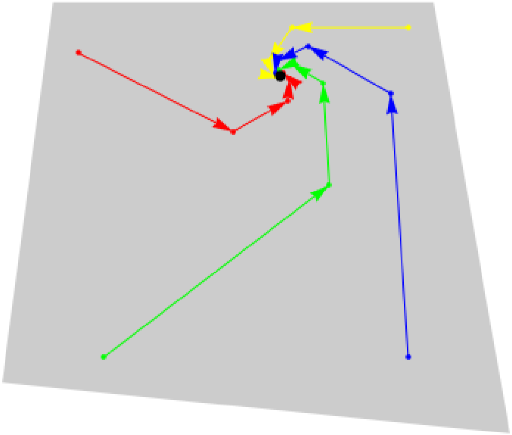


# Pontos fixos contractivos





# Pontos fixos contractivos



# Espaço Métrico

## Definição

*Um* **espaço métrico** *é um par* $(X, d)$ *onde* $X$ *é um conjunto e* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *uma aplicação tal que*

1. $d(x, y) \geq 0$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,
4. $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$.

# Exemplos de espaços métricos

Qualquer subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^d$ com a distância induzida

$$d(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} |x_j - y_j|^2}$$

é um espaço métrico.

# Bolas abertas e fechadas

Seja $(X, d)$ um espaço métrico.

Dados $a \in X$ e $r > 0$,
A **bola aberta** de centro $a$ e raio $r$ é o conjunto

$$B_r(a) := \{x \in X \colon d(x, a) < r\} .$$

A **bola fechada** de centro $a$ e raio $r$ é o conjunto

$$\overline{B}_r(a) := \{x \in X \colon d(x, a) \leq r\} .$$

Seja $(X, d)$ um espaço métrico.

Um subconjunto $A \subseteq X$ diz-se

**aberto** em $(X, d)$ se $\forall\, a \in A\ \exists r > 0$ tal que $B_r(a) \subseteq A$

**fechado** em $(X, d)$ se $X \setminus A$ for aberto em $(X, d)$

O **fecho topológico** de $A \subseteq X$ é o subconjunto

$$\bar{A} := \{x \in X : \forall r > 0,\ B_r(a) \cap A \neq \emptyset\}\,.$$

Seja $(X, d)$ um espaço métrico.

Uma sucessão $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos em $X$ diz-se **convergente para** $a \in X$ e escrevemos

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{se} \quad \lim_{n\to\infty} d(x_n, a) = 0$$

i.e., se para todo o aberto $U \subset X$ com $a \in U$ existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq p,\ x_n \in U$.

# Noção de Sucessão de Cauchy

Seja $(X, d)$ um espaço métrico.

Uma sucessão $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ diz-se uma **sucessão de Cauchy** se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, p \in \mathbb{N} \quad \forall\, n, m \geq p, \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$$

# Espaço métrico completo

Seja $(X, d)$ um espaço métrico.

**Definição**

*Um espaço métrico* $(X, d)$ *diz-se* **completo** *se toda a sucessão de Cauchy for convergente.*

# Exemplos de espaços métricos completos

Seja $d(x, y)$ a distância Euclideana em $\mathbb{R}^d$.

**Proposição**

*Se $X$ for um suconjunto fechado de $\mathbb{R}^d$ então $(X, d)$ é um espaço métrico completo.*

# Teorema do Ponto Fixo de Banach

Seja $(X, d)$ um espaço métrico.

**Definição**

*Uma aplicação* $f : X \to X$ *diz-se* **contractiva** *se existir* $0 < \kappa < 1$ *tal que para todo* $x, y \in X$, $d(f(x), f(y)) \leq \kappa\, d(x, y)$.

**Teorema (S. Banach)**

*Seja* $(X, d)$ *um espaço métrico completo. Toda a aplicação contractiva* $f : X \to X$ *admite um único ponto fixo* $x_* \in X$. *Além disso, para qualquer ponto* $x_0 \in X$,

$$x_* = \lim_{n\to\infty} f^n(x_0).$$

# Prova

Seja $x_n = f^n(x_0)$. Dados $n > m$,

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_m) \leq \kappa^m \, d(x_{n-m}, x_0) &\leq \kappa^m \sum_{j=1}^{n-m} d(x_j, x_{j-1}) \\
&= \kappa^m \sum_{j=1}^{n-m} d(f^{j-1}(f(x_0)), f^{j-1}(x_0)) \\
&= \kappa^m \sum_{j=1}^{n-m} \kappa^{j-1} \, d(x_0, f(x_0)) \leq \frac{\kappa^m}{1-\kappa} \, d(x_0, f(x_0)).
\end{aligned}
$$

Logo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é sucessão de Cauchy.

# Prova

A sucessão $\{x_n\}$ converge e o limite $x_* = \lim_{n\to\infty} x_n$ é o (único) ponto fixo de $f$.

A desigualdade anterior implica a seguinte estimativa explicita da convergência dos iterados de $x_0$ para o ponto fixo $x_*$.

$$d(x_*, x_m) \leq \frac{\kappa^m}{1-\kappa}\, d(x_0, f(x_0)).$$

# Espaço Métrico Completo (Revisão)

**Definição**

*Um* **espaço métrico** *é um par* $(X, d)$ *onde* $X$ *é um conjunto e* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *uma aplicação tal que*

1. $d(x, y) \geq 0$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,
4. $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$.

**Definição**

*Um espaço métrico* $(X, d)$ *diz-se* **completo** *se toda a sucessão de Cauchy for convergente.*

# Teorema do Ponto Fixo de Banach (Revisão)

## Definição

*Uma aplicação* $f : X \to X$ *diz-se* $\kappa$-**contractiva** *se* $0 \leq \kappa < 1$ *e*

$$d(f(x), f(y)) \leq \kappa\, d(x, y), \quad \text{quaisquer que sejam } x, y \in X.$$

## Teorema (S. Banach)

*Seja* $(X, d)$ *um espaço métrico completo. Toda a aplicação* $\kappa$*-contractiva* $f : X \to X$ *com* $0 \leq \kappa < 1$ *admite um único ponto fixo* $x_* \in X$*. Além disso, para qualquer ponto* $x_0 \in X$,

$$x_* = \lim_{n\to\infty} f^n(x_0)$$

*com*

$$d(x_*, f^n(x_0)) \leq \frac{\kappa^n}{1-\kappa}\, d(x_0, f(x_0)).$$

**Definição**

*Um* **espaço normado** *é um par* $(V, \|\cdot\|)$ *onde* $V$ *é um espaço vectorial sobre o corpo* $\mathbb{R}$ *e* $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ *é uma aplicação tal que:*

1. $\|x\| \geq 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
4. $\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$.

# Espaço de Banach

Todo o espaço normado $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço metrico com a distância $d(x, y) = \|x - y\|$.

**Definição**

*Um espaço normado que seja completo (enquanto espaço métrico) diz-se um* **espaço de Banach**.

Para cada $1 \leq p < \infty$, a aplicação $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,

$$\|x\|_p := \left( \sum_{j=1}^{d} |x_j|^p \right)^{1/p}$$

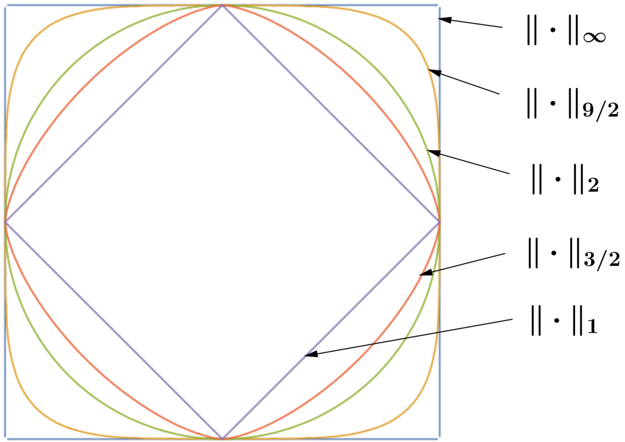
é uma norma.

A aplicação $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq d} |x_j| = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p$$

é também uma norma.

# Forma das bolas em $\mathbb{R}^d$




$$\|x\|_\infty \le \|x\|_{\frac{9}{2}} \le \|x\|_2 \le \|x\|_{\frac{3}{2}} \le \|x\|_1 \le \sqrt{d}\, \|x\|_\infty$$

# Equivalência das normas em dimensão finita

## Definição

*Duas normas* $\|\cdot\|$ *e* $\|\cdot\|'$ *num espaço vectorial* $V$ *dizem-se* **equivalentes** *se existir* $C < \infty$ *tal que para todo* $x \in V$,

$$C^{-1}\,\|x\| \leq \|x\|' \leq C\,\|x\|\,.$$

## Proposição

*Todo o espaço normado de dimensão finita é completo.*
*Num espaço vectorial de dimensão finita todas as normas são equivalentes.*

# Norma no espaço de matrizes

Seja $\mathrm{Mat}_d(\mathbb{R})$ o espaço vectorial das matrizes quadradas $d \times d$. Define-se a **norma operatória** duma matriz por

$$\|A\| := \max_{\|v\|=1} \|A\,v\| .$$

## Proposição

*A aplicação* $\|\cdot\| : \mathrm{Mat}_d(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *é uma norma com as seguintes propriedades:*

1. $\|I\| = 1$,
2. $\|A\,B\| \leq \|A\|\;\|B\|, \quad \forall\; A, B \in \mathrm{Mat}_d(\mathbb{R})$,
3. $\|A\,v\| \leq \|A\|\;\|v\|, \quad \forall\; A \in \mathrm{Mat}_d(\mathbb{R})$ *e* $v \in \mathbb{R}^d$.

## Proposição

*Fixada uma norma* $\|\cdot\|$ *em* $\mathbb{R}^d$ *e uma função contínua* $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$,

$$\left\| \int_a^b f(t)\, dt \right\| \le \int_a^b \|f(t)\|\, dt.$$

$$\begin{aligned}
\left\| \int_a^b f(t)\, dt \right\| &= \left\| \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(t_i)\, dt_i \right\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^n f(t_i)\, dt_i \right\| \\
&\le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \|f(t_i)\, dt_i\| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \|f(t_i)\|\, dt_i \\
&= \int_a^b \|f(t)\|\, dt
\end{aligned}$$

# Teorema do Valor Médio de Lagrange

**Teorema**

*Seja $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ uma função diferenciável num domínio $D$ convexo tal que $\|J_f(x)\| \leq \kappa$ para todo $x \in D$. Então*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \kappa\, \|x - y\|, \;\; \forall \;\, x, y \in D.$$

Se $r : [0,1] \to D$ com $r(t) := x + t\,(y - x)$ então

$$r(0) = x, \quad r(1) = y \quad \text{e} \quad r'(t) = y - x.$$

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\| = \|(f \circ r)(1) - (f \circ r)(0)\| &= \left\| \int_0^1 (f \circ r)'(t)\, dt \right\| \\ &= \left\| \int_0^1 J_f(r(t))\, r'(t)\, dt \right\| \leq \int_0^1 \|J_f(r(t))\,(y - x)\| \; dt \\ &\leq \int_0^1 \|J_f(r(t))\| \; \|y - x\| \; dt \leq \kappa\, \|y - x\|\,. \end{aligned}$$

# Pontos fixos contractivos

## Definição

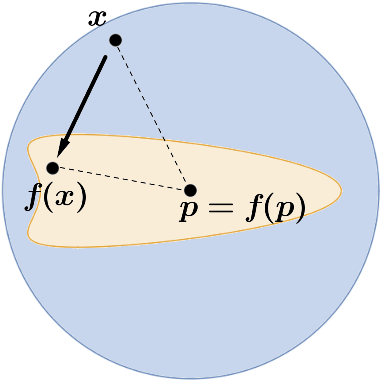
*Seja $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ diferenciável. Um ponto fixo $p = f(p)$, $p \in D$, da função $f$ diz-se* **contractivo** *se $\|J_f(p)\| < 1$. Quando $J_f(p) = 0$ o ponto fixo diz-se* **super contractivo**.

## Proposição

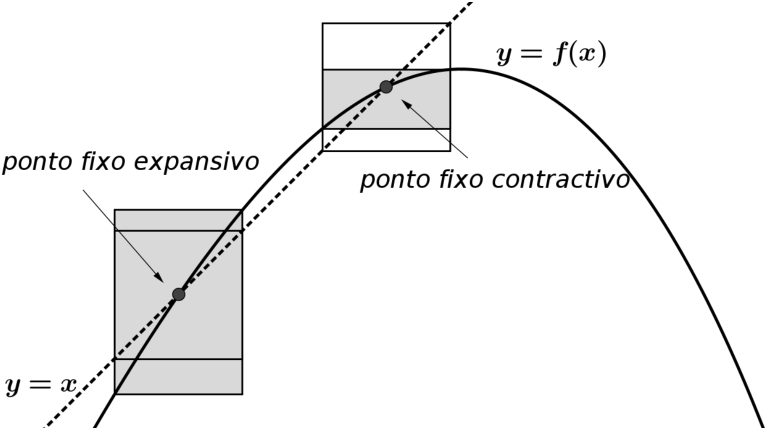
*Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ uma função de classe $C^1$ e $p \in D$ um ponto fixo contractivo de $f$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que*

1. $f(\bar{B}_\varepsilon(p)) \subset \bar{B}_\varepsilon(p)$,
2. $f|_{B_\varepsilon(p)} : \bar{B}_\varepsilon(p) \to \bar{B}_\varepsilon(p)$ *é uma aplicação contractiva,*
3. $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = p$, *qualquer que seja $x \in \bar{B}_\varepsilon(p)$.*

# Pontos fixos contractivos



# Pontos fixos contractivos



Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável.

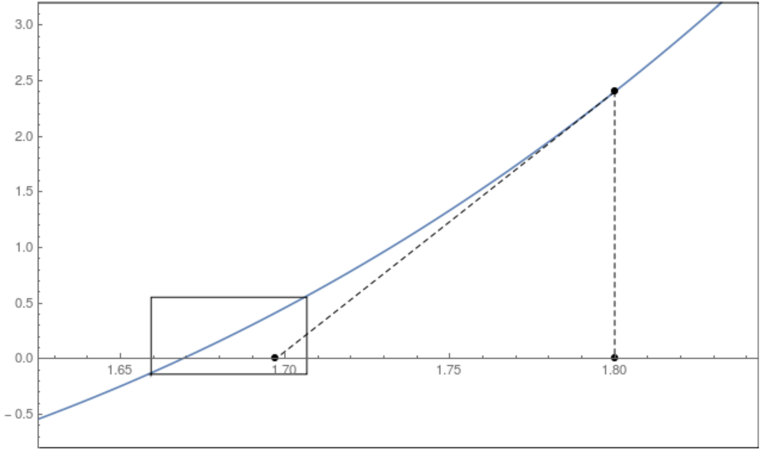
**Objectivo**: Aproximar uma raíz $x_*$ da equação $f(x) = 0$.

**Input**: Um número $\varepsilon > 0$ e uma primeira aproximação $x_0$ da raíz $x_*$

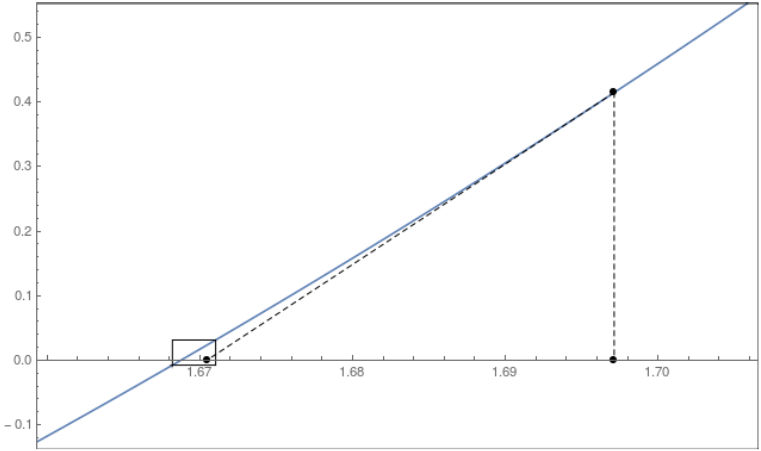
**Algorítmo**: Determinamos o ponto $x_1$ em que a recta tangente ao gráfico $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ interscta o eixo dos $xx$.
O procedimento anterior é repetido, construindo $x_2$ a partir de $x_1$, $x_3$ à custa de $x_2$ e assim por diante até se encontrar uma aproximação $x_n$ com o erro prentendido.

**Output** : Uma aproximação $x_n$ da raíz $x_*$ com erro $< \varepsilon$.

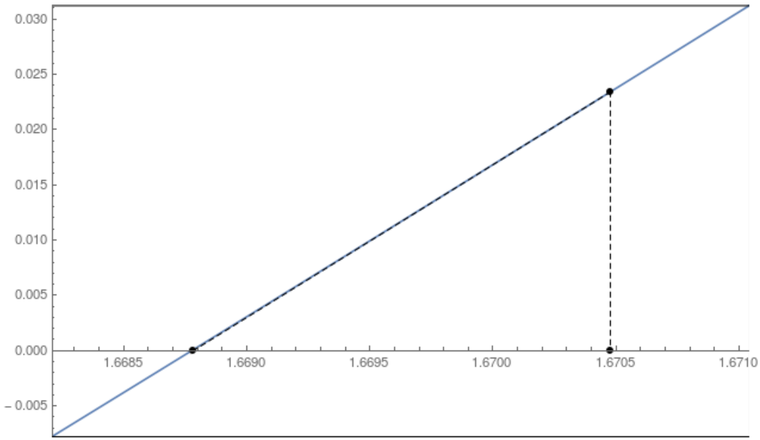
# O Método de Raphson-Newton



# O Método de Raphson-Newton



# O Método de Raphson-Newton



A recta tangente ao gráfico $y = f(x)$ em $(x_n, f(x_n))$ tem equação

$$y = f(x_n) + f'(x_n)\,(x - x_n)$$

$x_{n+1}$ é a raíz da equação linear $f(x_n) + f'(x_n)\,(x - x_n) = 0$

$$\Updownarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

# O Iterador do Método de Raphson-Newton

Dada $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ o **iterador do método de Raphson-Newton** é a função $N_f : D_f \to \mathbb{R}$ definida por

$$N_f(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

no domínio

$$D_f := \{x \in D\colon f'(x) \neq 0\}.$$

Dado $x \in D_f$,

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_f(x) = x$$

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad N_f'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)\, f''(x)}{f'(x)^2} = 1 - 1 = 0$$

# Convergência do Método de Raphson-Newton

Dado $x \in D_f$,

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad N_f(x) = x \\ f(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad N_f'(x) = 0 \end{aligned}$$

**Proposição**

*Todas as raízes de* $f(x) = 0$ *em* $D_f$ *são* **pontos fixos super contractivos** *do iterador* $N_f$. *Em particular, dada uma raíz* $x_* \in D_f$ *de* $f(x) = 0$, *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que*

$$x_* = \lim_{n\to\infty} N_f^n(x_0), \quad \forall\, x_0 \in \bar{B}_\varepsilon(x_*).$$

# Velocidade de convergência

$$N_f(x_*) = x_*, \quad N_f'(x_*) = 0 \quad \text{e} \quad N_f''(x_*) = \frac{f''(x_*)}{f'(x_*)}$$

Pela fórmula do resto de Lagrange do desenvolvimento de Taylor de 2ª ordem de $N_f(x)$ no ponto $x_*$ existe $x^{**}$ entre $x$ e $x_*$ tal que

$$N_f(x) = x_* + \tfrac{1}{2}\, N_f''(x^{**})\,(x - x_*)^2$$

## Proposição

*Seja $I \subset D_f$ um intervalo. Se*

1. $x_* \in I$ *e* $f(x_*) = 0$,
2. $\frac{1}{2}\,|N_f''(x)| \leq L$, *para todo o* $x \in I$,
3. $|x_0 - x_*| < L^{-1}$

*então os iterados* $x_n = N_f^n(x_0)$ *convergem para* $x_*$ *e os erros* $\varepsilon_n := |x_n - x_*|$ *satisfazem* $\varepsilon_{n+1} \leq L\,\varepsilon_n^2$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

# Convergência quadrática

$$\varepsilon_{n+1} \leq L\,\varepsilon_n^2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

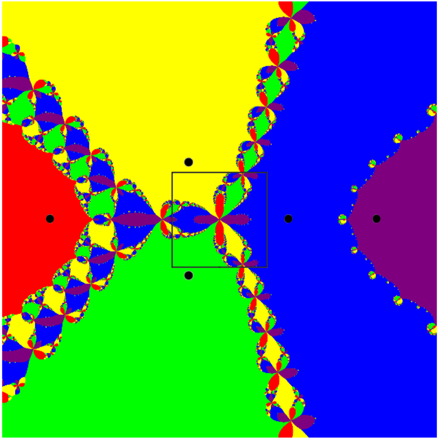
$$\varepsilon_n \leq L^{-1}\,(L\,\varepsilon_0)^{2^n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

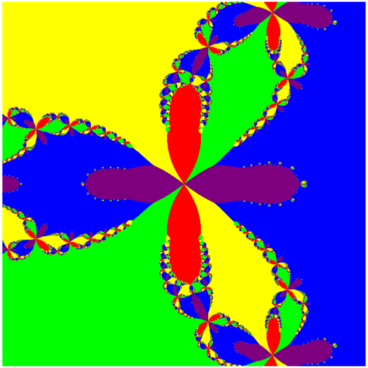
Se $L\,\varepsilon_0 < 1$ então $\varepsilon_n$ converge para 0 mais rapidamente do que qualquer progressão geométrica.

Este tipo de convergência diz-se **quadrática**.

# Aplicação do Médodo Raphson-Newton a um polinómio

Os zeros da equação $x^5 - 3\,x^3 + 1 = 0$.





Um sistema de $d$ equações em $d$ incógnitas

$$\begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_d) & = 0 \\ \qquad \cdots & \\ f_d(x_1,\ldots,x_d) & = 0 \end{cases}$$

pode ser representado através duma única equação vectorial

$$f(x) = 0$$

onde $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ é a função definida por

$$f(x_1,\ldots,x_d) := (f_1(x_1,\ldots,x_d),\ldots,f_d(x_1,\ldots,x_d))$$

e $D$ representa o domínio comum às funções componentes $f_i$.

# O Método de Raphson-Newton para sistemas de equações

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ uma função de classe $C^2$.
Pela definição de diferenciabilidade duma função $f$ temos

$$f(x) \approx f(x_0) + J_f(x_0)\,(x - x_0) \quad \text{quando} \;\; x \to x_0$$

A equação linear $f(x_0) + J_f(x_0)\,(x - x_0) = 0$ tem solução

$$x_1 = x_0 - [J_f(x_0)]^{-1} f(x_0).$$

O **iterador do método de Raphson-Newton** é neste caso a função $N_f : D_f \to \mathbb{R}^d$ definida por

$$N_f(x) := x - [J_f(x)]^{-1} f(x)$$

no domínio

$$D_f := \{x \in D \subset \mathbb{R}^d : \; \det[J_f(x)] \neq 0\}.$$

Dado $x \in D_f$,

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_f(x) = x$$

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad J_{N_f}(x) = 0$$

**Proposição**

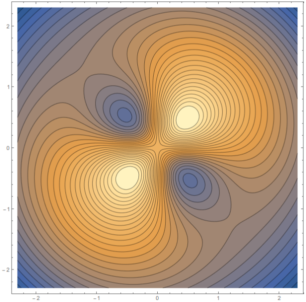
*Todas as raízes de* $f(x) = 0$ *em* $D_f$ *são* **pontos fixos super contractivos** *do iterador* $N_f$. *Em particular, dada uma raíz* $x_* \in D_f$ *de* $f(x) = 0$, *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que*

$$x_* = \lim_{n\to\infty} N_f^n(x_0), \quad \forall\, x_0 \in \bar{B}_\varepsilon(x_*).$$

*A velocidade da convergência* $N_f^n(x_0) \to x_*$ *é quadrática.*

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função

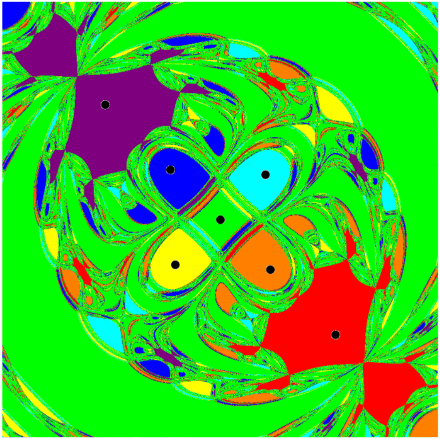
$$f(x,y) := 1 - \frac{1}{100}(x^2+y^2) + \frac{x\,y}{(1+x^2+y^2)^3}$$




Esta função tem sete pontos críticos que são soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

O gráfico seguinte mostra as bacias de atracção dos sete pontos críticos de $f(x, y)$ para o iterador de Raphson-Newton.



# O espaço $\mathcal{C}([a, b])$

O conjunto

$$\mathcal{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ é contínua em } [a, b]\}$$

é um espaço vectorial e um **espaço de Banach** com a norma

$$\|f\|_\infty := \max_{t \in [a,b]} |f(t)| \, .$$

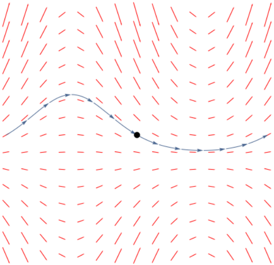
# Teorema de Cauchy

## Teorema

*Seja* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* $C^1$. *Dado* $(t_0, x_0) \in D$ *existe* $\varepsilon > 0$ *tal que o* **problema de valor inicial**

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

*tem uma única solução no intervalo* $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$.



# Equação Integral

O problema de Cauchy reduz-se a uma **equação integral**

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

Esta é uma equação de ponto fixo no espaço $\mathcal{C}([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon])$ das funções contínuas $x : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}$.

# Transformação Integral

Seja $F : \mathcal{C}([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]) \to \mathcal{C}([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon])$ a transformação

$$F(x)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

As soluções do problema de Cauchy $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ são os pontos fixos da transformação $F$.

# Contractividade da Transformação Integral

Suponhamos que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq L$ para todo $(t,x) \in D = \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} |F(x)(t) - F(y)(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} (f(s,x(s)) - f(s,y(s)))\, ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))|\, ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} L\, |x(s) - y(s)|\, ds \leq L\,\varepsilon\, \|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

Logo

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq L\,\varepsilon\, \|x - y\|_\infty .$$

A transformação $F$ é contractiva se $0 < \varepsilon < L^{-1}$

# Equação Funcional

Consideremos o seguinte subespaço vectorial fechado em $\mathcal{C}([0, \frac{2\pi}{3}])$

$$\mathcal{X} := \left\{ f \in \mathcal{C}([0, \frac{2\pi}{3}]) \colon f(0) = f(\frac{2\pi}{3}) \right\}$$

## Proposição

*A equação funcional*

$$f(x) = \frac{1}{2}\,(f(3\,x) - \sin(3\,x))$$

*tem uma única solução no espaço* $\mathcal{X}$.

# Uma Transformação Linear Contractiva

A soluções da equação funcional anterior são os **pontos fixos** da transformação $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$

$$F(f)(x) := \frac{1}{2}\,(f(3\,x) - \sin(3\,x))$$

$$f \in \mathcal{X} \quad \Rightarrow \quad F(f) \in \mathcal{X}$$

$$\begin{aligned} |F(f)(x) - F(g)(x)| &= \left| \frac{1}{2}\, f(3\,x) - \frac{1}{2}\, g(3\,x) \right| \\ &\leq \frac{1}{2}\, |f(3\,x) - g(3\,x)| \leq \frac{1}{2}\, \|f - g\|_\infty \end{aligned}$$

Logo

$$\|F(f) - F(g)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\, \|f - g\|_\infty$$

$$F(0)(x) = -\frac{1}{2}\sin(3\,x)$$

Por indução obtemos

$$F^n(0)(x) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j}\sin(3^j\,x)$$

Logo o ponto fixo da transformação $F$ é a **função de Weierstrass**

$$W(x) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j}\sin(3^j\,x).$$