

# Resolução de alguns exercícios de Geometria Diferencial

Exercícios do livro *Curvas e Superfícies* de Manfredo Perdigão do Carmo [1].

---

## Exercício 1 (Secção 4-4)

- Mostre que se uma curva  $C \subset S$  é uma linha de curvatura e uma geodésica então  $C$  é uma curva plana.
- Mostre que se uma geodésica (não rectilínea) é uma curva plana então é uma linha de curvatura.
- Dê um exemplo de uma linha de curvatura que seja uma curva plana mas não uma geodésica.

## Resolução

- Seja  $\gamma : I \rightarrow C$  uma parametrização pelo comprimento de arco da curva  $C$ . Porque  $\gamma$  é uma geodésica,  $\gamma''(s)$  é colinear com  $N(s) = N(\gamma(s))$ . Como  $\gamma$  é uma linha de curvatura temos que  $N'(s) = DN_{\gamma(s)}\gamma'(s)$  é colinear com  $\gamma'(s)$ . Logo derivando  $\gamma'(s) \wedge N(s)$  obtemos

$$\frac{d}{ds}(\gamma'(s) \wedge N(s)) = \gamma''(s) \wedge N(s) + \gamma'(s) \wedge N'(s) = 0,$$

o que mostra que  $v = \gamma'(s) \wedge N(s)$  é constante. Como  $\gamma'(s)$  e  $N(s)$  são vectores unitários e ortogonais,  $v$  é também um vector unitário. Para todo  $s \in I$  tem-se  $\langle \gamma'(s), v \rangle = 0$ , donde

$$\langle \gamma(s) - \gamma(0), v \rangle = \left\langle \int_0^s \gamma'(t) dt, v \right\rangle = \int_0^s \langle \gamma'(t), v \rangle dt = 0.$$

Isto mostra que a curva  $C$  está contida no plano ortogonal a  $v$  que passa por  $\gamma(0)$ .

- b. Porque  $\gamma$  é uma geodésica não rectilínea temos  $\gamma''(s) = c(s)N(s)$  com  $c(s) \neq 0$ . Como  $C$  é uma curva plana existe um vector unitário  $v$  tal que  $\langle \gamma'(s), v \rangle = 0$  para todo  $s \in I$ . Derivando esta relação vemos que  $\langle \gamma''(s), v \rangle = 0$ , o que prova que o vector  $v$  é também perpendicular a  $N(s)$ . Logo  $\{\gamma'(s), v, N(s)\}$  é um referencial ortonormado. Para mostrar que  $\gamma$  é uma linha de curvatura basta ver que  $N'(s) = DN_{\gamma(s)}\gamma'(s)$  é colinear com  $\gamma'(s)$ , facto que segue de se ter  $\langle N'(s), v \rangle = 0$  e  $\langle N'(s), N(s) \rangle = 0$  para todo  $s \in I$ . Por sua vez, estas duas relações resultam de derivar as igualdades  $\langle N(s), v \rangle = 0$  e  $\langle N(s), N(s) \rangle = \|N(s)\|^2 = 1$ .
- c. O plano e a esfera são exemplos de superfícies umbílicas, i.e., superfícies em que todas as direcções tangentes são principais, em qualquer ponto da superfície. Nestas superfícies qualquer curva é uma linha de curvatura. Tanto o plano como a esfera contêm curvas planas que não são geodésicas, e que são exemplos nas condições pedidas.

Outro exemplo. Numa superfície de revolução os paralelos são linhas de curvatura. Uma vez que são circunferências, os paralelos são curvas planas. Em geral os paralelos não são geodésicas. Por exemplo no toro só os dois equadores (interior e exterior) são geodésicas. Logo a generalidade dos paralelos são curvas planas e linhas de curvatura mas não são geodésicas.

**Exercício 2** (Secção 4-4) Prove que uma curva  $C \subset S$  é simultâneamente uma linha assimptótica e uma geodésica se e só se  $C$  fôr um segmento de linha recta.

**Resolução** Seja  $\gamma : I \rightarrow C$  uma parametrização pelo comprimento de arco da curva  $C$ . Basta observar que a decomposição da aceleração  $\gamma''(s)$  nas suas componentes tangente e normal à superfície é dada por

$$\gamma''(s) = \frac{D\gamma'}{ds} + \langle \gamma''(s), N(s) \rangle N(s),$$

e que além disso

- $\gamma$  é uma geodésica sse  $\frac{D\gamma'}{ds} = 0$ ,
- $\gamma$  é uma linha assimptótica sse  $\langle \gamma''(s), N(s) \rangle = \text{II}_{\gamma(s)}\gamma'(s) = 0$ ,
- $C$  é um segmento de linha recta sse  $\gamma''(s) = 0$ .

**Exercício 5** (Secção 4-4) Considere o toro de revolução

$$T = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2 \} \quad (a > r > 0),$$

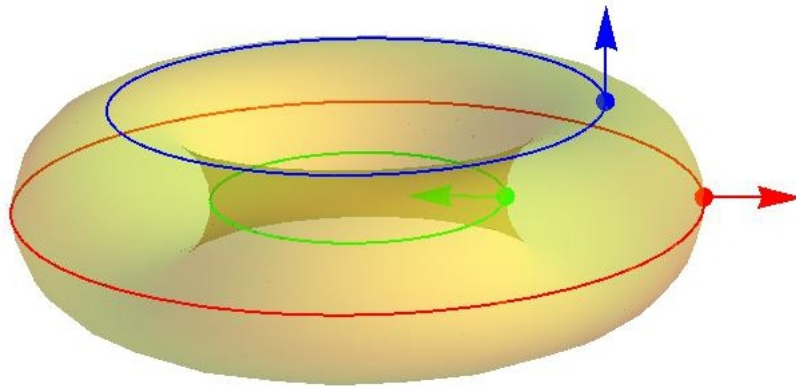
e os seguintes paralelos:

- paralelo máximo definido por  $x^2 + y^2 = (a + r)^2, z = 0$ ,
- paralelo mínimo definido por  $x^2 + y^2 = (a - r)^2, z = 0$ ,
- paralelo superior definido por  $x^2 + y^2 = a^2, z = r$ .

Verifique quais destes paralelos são (a) uma geodésica, (b) uma linha assintótica, e (c) uma linha de curvatura.

### Resolução

- (a) Os paralelos máximo e mínimo são geodésicas. O paralelo superior não. Basta comparar a aceleração dos paralelos (que aponta sempre para o centro da circunferência) com a normal ao toro.



- (b) Os três paralelos são linhas de curvatura porque  $T$  é uma superfície de revolução.
- (c) O paralelo máximo é formado por pontos elípticos. Como não há linhas assintóticas num ponto elíptico, o paralelo máximo não é uma linha assintótica. O paralelo mínimo é formado por pontos hiperbólicos. Logo as linhas assintóticas e as linhas de curvatura que passam por estes pontos são distintas. Como o paralelo mínimo é uma linha de curvatura, não pode também ser

uma linha assintótica. Finalmente o paralelo superior é formado de pontos parabólicos e é uma linha assintótica, porque é a linha de contacto tangencial entre o toro  $T$  e o plano  $z = r$ . (Ver exercício 2 da secção 3-2)

**Exercício 6** (Secção 4-4) Calcule a curvatura geodésica do paralelo superior do exercício 5.

**Resolução** O paralelo superior é uma circunferência de raio  $a$ , pelo que tem curvatura constante  $1/a$ . Como a aceleração duma parametrização deste paralelo (com velocidade constante) é tangente ao toro, a menos de um sinal, a curvatura do paralelo superior em  $\mathbb{R}^3$  coincide com a sua curvatura geodésica no toro  $T$ . O sinal da curvatura geodésica depende do sentido da parametrização.

**Exercício 7** (Secção 4-4) Intersecte o cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  com o plano que corta o eixo  $OX$  e faz um ângulo  $\theta$  com o plano  $XOY$ .

- Mostre que a curva de intersecção é uma elipse  $C$ .
- Calcule os valores absolutos das curvaturas geodésicas de  $C$  no cilindro, nos pontos onde  $C$  intersecta os seus eixos principais.

### Resolução

- O plano que corta o eixo  $OX$  e faz um ângulo  $\theta$  com o plano  $XOY$  é descrito pela equação  $z = (\tan \theta) y$  e admite a seguinte base ortonormada  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, \cos \theta, \sin \theta)$ . Neste referencial o.n. a intersecção do plano com o cilindro é a elipse

$$C = \{ x e_1 + y e_2 : x^2 + (\cos^2 \theta) y^2 = 1 \} .$$

Os eixos principais desta elipse são as direcções dos vectores  $e_1$  e  $e_2$ , e os pontos em que estes eixos cortam  $C$  são  $\pm(1, 0, 0)$  e  $\pm(0, 1, \tan \theta)$  respectivamente.

- A elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tem curvatura  $\frac{a}{b^2}$  nos pontos  $(\pm a, 0)$ , e curvatura  $\frac{b}{a^2}$  nos pontos  $(0, \pm b)$ .<sup>1</sup> Logo a elipse  $C$  tem curvatura  $\kappa = \cos^2 \theta$  nos pontos  $\pm(1, 0, 0)$  e tem curvatura

<sup>1</sup>A justificação deste facto é um outro exercício.

$\kappa = \frac{1}{\cos \theta}$  nos pontos  $\pm(0, 1, \tan \theta)$ . Parametrizando a elipse  $C$  pelo comprimento de arco, nestes quatro pontos a aceleração  $\gamma''$  é colinear e de sentido oposto aos vectores de posição dos pontos relativos à origem  $(0, 0, 0)$ . Nos pontos  $\pm(1, 0, 0)$  a aceleração é colinear com a normal ao cilindro, pelo que a curvatura geodésica é nula. (Esboce o cilindro, a elipse e as respectivas normais para melhor visualizar) Nos pontos  $\pm(0, 1, \tan \theta)$  a normal exterior ao cilindro é  $N = \pm(0, 1, 0)$ . A curvatura da elipse é  $\kappa = \frac{1}{\cos \theta}$ , e a aceleração nestes pontos é  $\gamma'' = \mp \kappa e_2 = \mp(0, 1, \tan \theta)$ . A curvatura normal  $\kappa_n = |\langle \gamma'', N \rangle| = 1$ , donde segue que  $|\kappa_g| = \sqrt{\kappa^2 - \kappa_n^2} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} = \left| \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right|$ .

**Exercício 8** (Secção 4-4) Mostre que se todas as geodésicas de uma superfície conexa são curvas planas então a superfície está contida num plano ou numa esfera.

**Resolução** Se uma geodésica  $\gamma(s)$  passando por  $p = \gamma(0)$  for uma linha recta então  $\Pi_p \gamma'(0) = \langle \gamma''(0), N(p) \rangle = 0$ . Se  $p \in S$  não for um ponto planar então existem no máximo duas linhas assintóticas que passam por  $p$ . Tomando um vector  $v \in T_p S$  que não corresponda a uma direcção assintótica, a única geodésica  $\gamma$  tal que  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = v$  não pode ser uma linha recta. Pelo exercício 1b desta secção,  $\gamma$  é uma linha de curvatura, o que prova que  $v$  é uma direcção principal de  $S$  no ponto  $p$ . Logo, como quase todas as direcções são principais o ponto  $p$  é umbílico<sup>2</sup>. Finalmente como todos os pontos planares são umbílicos, este argumento prova que todos os pontos da superfície  $S$  são umbílicos. Logo, porque  $S$  é conexa, pela Proposição 4 da secção 3-2<sup>3</sup>, esta superfície está contida num plano ou numa esfera.

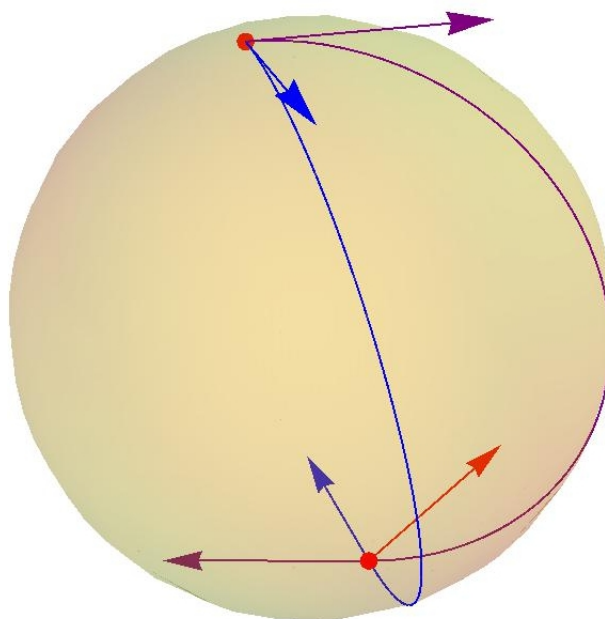
**Exercício 9** (Secção 4-4) Considere dois meridianos  $C_1$  e  $C_2$  da esfera  $S^2$  que fazem entre si um ângulo  $\theta$ . Sejam  $p_1$  e  $p_2$  os pontos onde estes dois meridianos se cruzam. Considere um vector  $w_0 \in T_{p_1} S^2$  e faça os transportes paralelos de  $w_0$  ao longo de  $C_1$  e ao longo de  $C_2$  até ao ponto  $p_2$ . Sejam  $w_1$  e  $w_2$  os vectores obtidos em  $T_{p_2} S^2$  através deste transporte paralelo. Calcule o ângulo entre  $w_1$  e  $w_2$ .

**Resolução** Observamos que os meridianos  $C_1$  e  $C_2$  são semi-circunferências. Vejamos que o ângulo  $\angle_{p_2}(w_1, w_2)$  que queremos calcular não depende do vector inicial  $w_0$ . Seja  $\gamma$  a curva fechada diferenciável por troços que começa em  $p_2$ , segue ao longo de  $C_1$  com velocidade constante até  $p_1$ , e depois segue ao longo de  $C_2$  com velocidade constante

<sup>2</sup>Quando um ponto não é umbílico existem no máximo duas direcções principais

<sup>3</sup>resultado mencionado nas aulas teóricas

de volta até  $p_2$ . O transporte paralelo ao longo de  $\gamma$  transforma  $w_1$  em  $w_2$ . Como este transporte paralelo  $P_\gamma : T_{p_2}S^2 \rightarrow T_{p_2}S^2$  é uma rotação, o ângulo  $\angle_{p_2}(w_1, w_2)$  é por definição igual à holonomia  $h_\gamma$  ao longo da curva fechada  $\gamma$ , que não depende de  $w_0$ . Note que se  $\theta = \angle(v_1, v_2) > 0$  então a curva  $\gamma$  fica negativamente orientada.



Nesta figura  $p_1$  é o polo Norte e  $p_2$  o polo Sul. Os meridianos  $C_1$  e  $C_2$  estão representados nas cores azul e púrpura respectivamente. Os vectores  $v_1$  e  $v_2$  tangentes aos meridianos  $C_1$  e  $C_2$  estão representados nas mesmas cores azul e púrpura. O vector vermelho em  $p_2$  representa o transporte paralelo de  $v_2$  ao longo de  $C_1$ .

- a. *Primeira solução:* Sejam  $v_1$  o vector unitário tangente a  $C_1$  em  $p_1$ , e  $v_2$  o vector unitário tangente a  $C_2$  no mesmo ponto  $p_1$ . Façamos  $w_0 = v_2$ . Como  $C_2$  é um arco geodésico o campo tangente a  $C_2$  é paralelo e portanto  $w_2 = -v_2$  é o transporte paralelo de  $w_0 = v_2$  ao longo de  $C_2$ . Analogamente o transporte paralelo ao longo de  $C_1$ , de  $p_1$  para  $p_2$ , transforma  $v_1$  em  $-v_1$ . Como o transporte paralelo preserva ângulos orientados segue que

$$\angle_{p_2}(w_1, -v_1) = \angle_{p_2}(P_{C_1}(v_2), P_{C_1}(v_1)) = \angle_{p_1}(v_2, v_1) = -\theta .$$

Por outro lado

$$\angle_{p_2}(-v_1, w_2) = \angle_{p_2}(-v_1, -v_2) = -\angle_{p_1}(v_1, v_2) = -\theta .$$

Note-se que os planos tangentes à esfera em  $p_1$  e  $p_2$  apesar de serem iguais têm orientações opostas porque as respectivas normais satisfazem  $N(p_2) = -N(p_1)$ . Logo  $\angle(w_1, w_2) \equiv -2\theta \pmod{2\pi}$ .

- b. *Segunda solução:* Suponhamos  $\theta = \angle_{p_1}(v_1, v_2) > 0$ . Meia esfera tem área  $2\pi$ , pelo que a região  $R$  limitada entre os meridianos  $C_1$  e  $C_2$  tem a correspondente área proporcional ao ângulo entre os meridianos, o que dá  $\text{Área}(R) = 2\theta$ . Por um resultado visto na teórica, como  $\gamma$  está negativamente orientada, a holonomia na esfera ao longo de  $\gamma$  é dada por

$$h_\gamma = -\text{Área}(R) = -2\theta .$$

**Exercício 13** (Secção 4-4) Seja  $V$  uma vizinhança conexa de um ponto  $p$  numa superfície  $S$ , e assuma que o transporte paralelo entre quaisquer dois pontos de  $V$  não depende da curva que os liga. Prove que a curvatura Gaussiana de  $V$  é zero.

**Resolução** Uma consequência da hipótese é que o transporte paralelo ao longo de qualquer curva simples fechada  $\gamma$ , tal que  $\gamma \cup \text{int}(\gamma) \subset V$ , é sempre trivial, i.e., a holonomia  $h_\gamma$  é igual a zero. Mas se  $\gamma$  fôr diferenciável e estiver positivamente orientada então  $h_\gamma = 2\pi - \int_\gamma \kappa_g$ , e pelo Teorema de Gauss-Bonnet,

$$\iint_{\text{int}(\gamma)} K = 2\pi - \int_\gamma \kappa_g = h_\gamma = 0 .$$

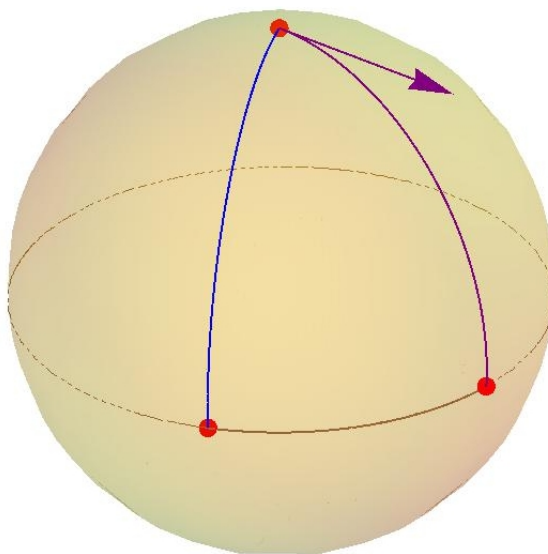
Isto implica que a curvatura  $K$  tem de ser nula. Se não fosse existiria um aberto  $U \subset V$  onde  $K > 0$ , ou então onde  $K < 0$ . Suponhamos por exemplo que  $K(p) > 0$  para todo  $p \in U$ . Escolhendo uma curva fechada  $\gamma$  contida em  $U$  obtemos a seguinte contradição

$$0 = h_\gamma = \iint_{\text{int}(\gamma)} K > 0$$

já que  $K > 0$  em  $U$ .

**Exercício 15** (Secção 4-4) Seja  $p_0$  um polo da esfera  $S^2$  e  $p, q$  dois pontos no correspondente equador de modo que os arcos de meridianos  $p_0p$  e  $p_0q$  façam um ângulo  $\theta$  em  $p_0$ . Considere o vector unitário  $v$  tangente ao meridiano  $p_0q$  em  $p_0$  e tome o transporte paralelo de  $v$  ao longo da curva fechada  $\gamma$  formada pelo meridiano  $p_0q$ , o arco de paralelo  $qp$  e o meridiano  $pp_0$ .

- Determine o ângulo que a posição final do transporte paralelo de  $v$  ao longo de  $\gamma$  faz com  $v$ .
- Repita o cálculo quando os pontos  $p, q$  estiverem no paralelo de co-latidade  $\varphi$ .



**Resolução** Vamos supôr que  $\theta > 0$ , de modo que a curva  $\gamma$  esteja positivamente orientada como na figura acima. Nas duas alíneas, o ângulo que se pretende calcular é a holonomia  $h_\gamma$  ao longo de  $\gamma$ . Para curvas simples fechadas  $\gamma$ , positivamente orientadas, e que sejam diferenciáveis, valem as fórmulas

$$h_\gamma = 2\pi - \int_\gamma \kappa_g = \iint_{\text{int}\gamma} K,$$

sendo a segunda uma consequência de Gauss-Bonnet. Para curvas nas mesmas condições mas apenas diferenciáveis por troços valem as fórmulas

$$h_\gamma = 2\pi - \int_\gamma \kappa_g - \sum_i \theta_i = \iint_{\text{int}\gamma} K,$$

onde os termos  $\theta_i$  representam os ângulos externos da curva  $\gamma$ .



- a. A curva  $\gamma$  é uma linha poligonal geodésica pelo que a curvatura geodésica  $\kappa_g$  é nula. Os ângulos externos são respectivamente  $\pi - \theta$ ,  $\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{\pi}{2}$ . Logo

$$h_\gamma = 2\pi - \left( \pi - \theta + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \theta .$$

Alternativamente, justificando que  $\text{Área}(\text{int}\gamma) = \theta$ , como a esfera tem curvatura Gaussiana  $K = 1$  o resultado segue.

- b. Supondo que  $p, q$  estão sobre o paralelo de co-latidade<sup>4</sup>  $\varphi$ , os ângulos externos são exactamente os mesmos, mas notamos que a curvatura geodésica do arco de paralelo  $qp$  já não é nula. Usando coordenadas esféricas, o que equivale a considerar a parametrização canónica da esfera vemos que

$$\text{Área}(\text{int}\gamma) = \int_0^\varphi \int_0^\theta \sin v \, du \, dv = \theta (1 - \cos \varphi) .$$

Logo, como a curvatura Gaussiana é  $K = 1$ , a holonomia ao longo de  $\gamma$  é

$$h_\gamma = \theta (1 - \cos \varphi) .$$

Alternativamente podemos usar a primeira fórmula calculando a curvatura geodésica do paralelo de co-latidade  $\varphi$ . Este paralelo é um arco de circunferência de raio  $\sin \varphi$ , pelo que tem curvatura  $\frac{1}{\sin \varphi}$ . A sua curvatura geodésica é igual a<sup>5</sup>  $\kappa_g = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$ . Por outro lado, o arco  $pq$  tem ângulo  $\theta$ , pelo que o seu comprimento é igual a  $\theta \sin \varphi$ . Logo a holonomia é igual a

$$\begin{aligned} h_\gamma &= 2\pi - \int_{qp} \kappa_g - \left( \pi - \theta + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \theta - \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \theta \sin \varphi = \theta (1 - \cos \varphi) . \end{aligned}$$

**Exercício 22** (Secção 4-4) Seja  $p \in S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Dada uma curva  $\gamma : [0, \ell] \rightarrow S^2$  regular e diferenciável por troços tal que  $p = \gamma(0) = \gamma(\ell)$ ,

<sup>4</sup>A co-latidade de um ponto  $p \in S^2$  é o ângulo orientado entre os vectores de posição do polo Norte  $(0, 0, 1)$  e do ponto  $p$  relativamente à origem.

<sup>5</sup>A justificação deste facto é um exercício em sim mesmo. Veja para isso que a aceleração do paralelo num ponto faz um ângulo  $\varphi$  com a tangente ao meridiano nesse ponto.

designamos por  $P_\gamma : T_p S^2 \rightarrow T_p S^2$  o transporte paralelo ao longo de  $\gamma$ . Mostre que para cada rotação  $R$  de  $T_p S^2$  existe uma curva  $\gamma$  nas condições anteriores tal que  $P_\gamma = R$ .

**Resolução** Qualquer ponto  $p \in S^2$  pode ser visto como o polo Norte da esfera num sistema de coordenadas conveniente. Seja  $0 < \theta \leq 2\pi$  o ângulo da rotação  $R : T_p S^2 \rightarrow T_p S^2$ . Pelo exercício 15b desta secção, aplicado ao polo  $p_0$  e a mais dois pontos sobre o equador, o triângulo geodésico  $\gamma$  que aí foi construído tem holonomia  $h_\gamma = \theta$ , o que mostra que  $P_\gamma = R$ .

**Exercício 23** (Secção 4-4) Mostre que as isometrias da esfera unitária

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

são as restrições a  $S^2$  das transformações lineares ortogonais em  $\mathbb{R}^3$ .

**Resolução** Seja  $g : S^2 \rightarrow S^2$  uma isometria. Fixemos  $p = (0, 0, 1)$  e  $q = g(p)$ . Consideremos em seguida uma transformação linear ortogonal  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $Aq = p$ . Definindo  $g_1 = A \circ g$ , pelo exercício 11a da secção 4-2,  $g_1 : S^2 \rightarrow S^2$  é uma isometria. Por construção  $g_1(p) = p$ , e  $D(g_1)_p : T_p S^2 \rightarrow T_p S^2$  é uma isometria linear (i.e. uma rotação ou então uma reflexão em torno dum eixo). Seja  $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a única transformação ortogonal que coincide com  $D(g_1)_p$  em  $T_p S^2$  e que fixa todos os pontos da recta gerada por  $p$ .<sup>6</sup> Definindo  $g_2 = B^{-1} \circ g_1$ , pelo exercício 11a da secção 4-2,  $g_2 : S^2 \rightarrow S^2$  é uma isometria. Por construção  $g_2(p) = p$  e  $D(g_2)_p$  é a identidade em  $T_p S^2$ . Vejamos agora que  $g_2 : S^2 \rightarrow S^2$  é a aplicação identidade. Dado  $r \in S^2$ ,  $r \neq \pm p$ , seja  $\theta = \angle(p, r)$  e  $\gamma : [0, \theta] \rightarrow S^2$  o arco de meridiano parametrizado pelo comprimento de arco que satisfaz  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(\theta) = r$ . A curva  $\gamma$  é um arco geodésico. Como  $g_2$  é uma isometria da esfera,  $\gamma_2 = g_2 \circ \gamma$  é também uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco tal que  $\gamma_2(0) = g_2(p) = p = \gamma(0)$  e  $\gamma_2'(\theta) = D(g_2)_p \gamma'(\theta) = \gamma'(\theta)$ . Logo  $\gamma_2 = \gamma$ , e em particular  $g_2(r) = g_2(\gamma(\theta)) = \gamma_2(\theta) = \gamma(\theta) = r$ . Como  $r$  é arbitrário, podemos concluir que  $g_2 = \text{id}_{S^2}$ . Finalmente, como  $\text{id}_{S^2} = g_2 = B^{-1} \circ g_1 = B^{-1} \circ A \circ g$ , obtemos que  $g = (A^{-1} \circ B)|_{S^2}$ .

**Exercício 1** (Secção 4-5) Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular, compacta, conexa, orientável que não é homeomórfica a uma esfera. Prove que há pontos de  $S$  onde a curvatura Gaussiana é positiva, negativa, e nula.

<sup>6</sup>Se  $D(g_1)_p$  for uma rotação de ângulo  $\theta$  então  $B$  é uma rotação pelo mesmo ângulo em torno do eixo gerado por  $p$ . Se  $D(g_1)_p$  for uma reflexão em torno dum eixo gerado por  $v \in T_p S^2$ , então  $B$  é também uma reflexão em torno do plano gerado pelas direcções  $w$  e  $p$ .

**Resolução** O teorema de Gauss-Bonnet diz-nos que para uma superfície regular, compacta, conexa e orientável

$$\iint_S K = 2\pi \chi(S) = 2\pi(2 - 2g) ,$$

onde  $\chi(S)$  designa a característica de Euler-Poincaré da superfície  $S$ , e  $g$  designa o *genus* da superfície, que intuitivamente mede o número de “buracos” dessa superfície. Para superfícies não homeomórficas à esfera,  $g \geq 1$ , donde  $\iint_S K \leq 0$ . Pelo exercício 16 da secção 3-3,  $S$  admite pelo menos um ponto elíptico (onde  $K > 0$ ). Se tivéssemos  $K \geq 0$  em  $S$  viria  $\iint_S K > 0$ , em contradição com a conclusão anterior. Logo,  $S$  admite pontos hiperbólicos (onde  $K < 0$ ). Como  $S$  é conexa tem de haver também pontos onde  $K = 0$ .

**Exercício 3** (Secção 4-5) Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular homeomorfa a uma esfera, tal que o mapa de Gauss  $N : S \rightarrow S^2$  seja um difeomorfismo. Seja  $\Gamma \subset S$  uma curva simples fechada, geodésica, em  $S$ , e sejam  $A$  e  $B$  as regiões de  $S$  que têm  $\Gamma$  como a fronteira comum. Mostre que  $\text{Área}(N(A)) = \text{Área}(N(B))$ .

**Resolução** Como o mapa de Gauss é um difeomorfismo temos  $K(p) = \det(DN_p) \neq 0$  para todo  $p \in S$ . Por Gauss-Bonnet  $\iint_S K = 4\pi$ . Logo temos que ter  $K(p) > 0$  para todo  $p \in S$ . Assim

$$\text{Área}(N(A)) = \iint_A \det(-DN) = \iint_A K .$$

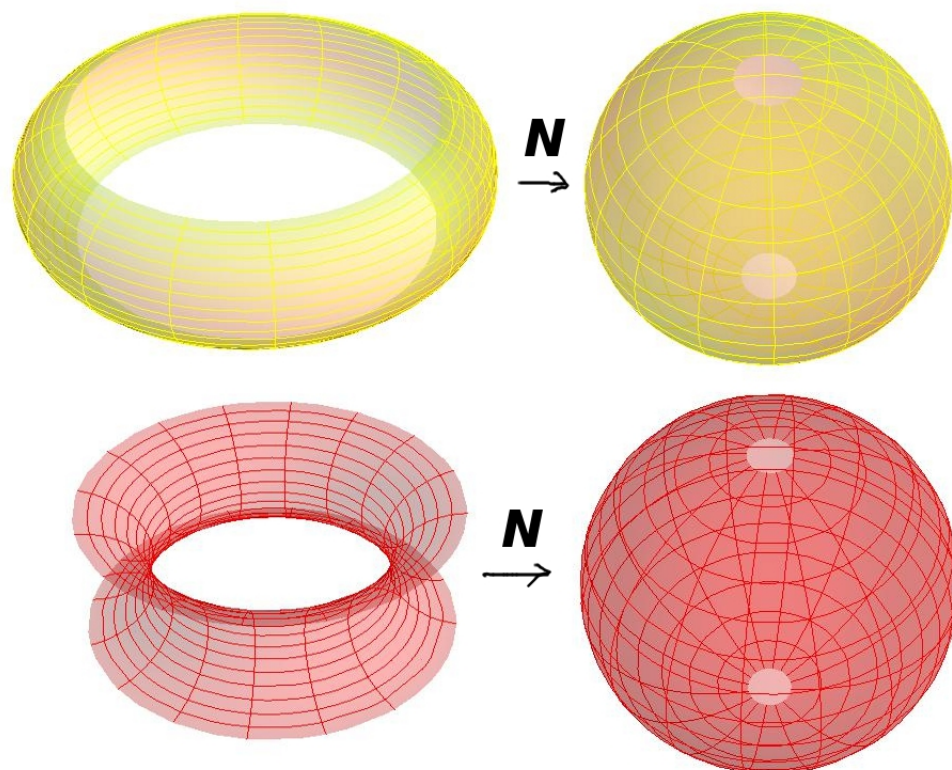
Analogamente  $\text{Área}(N(B)) = \iint_B K$ . Por Gauss-Bonnet obtemos, orientando  $\Gamma$  num sentido apropriado,

$$\iint_A K = \iint_A K + \int_{\Gamma} \underbrace{\kappa_g}_{=0} = 2\pi = \iint_B K + \int_{-\Gamma} \underbrace{\kappa_g}_{=0} = \iint_B K ,$$

onde  $-\Gamma$  representa a mesma curva  $\Gamma$  mas orientada no sentido oposto.

**Exercício 2** (Secção 4-5) Seja  $T$  o toro de revolução. Descreva a imagem do mapa de Gauss  $N : T \rightarrow S^2$  e mostre, sem usar o Teorema de Gauss-Bonnet, que

$$\iint_S K = 0 .$$



**Resolução** Sejam  $A$  e  $B \subset T$  as regiões ‘exterior’ e ‘interior’ do toro, respectivamente. Estas regiões estão limitadas entre os paralelos superior e inferior do toro (ver exerc. 5 da secção 4-4). A restrição  $N|_A : A \rightarrow S^2 \setminus \{\pm(0, 0, 1)\}$  é um difeomorfismo que preserva a orientação. Analogamente, a restrição  $N|_B : B \rightarrow S^2 \setminus \{\pm(0, 0, 1)\}$  é um difeomorfismo que inverte a orientação. Logo

$$\iint_A K = \iint_A \det(-DN) = \text{Área}(N(A)) = \text{Área}(S^2) = 4\pi ,$$

e

$$\iint_B K = \iint_B \det(-DN) = -\text{Área}(N(B)) = -\text{Área}(S^2) = -4\pi ,$$

pelo que

$$\iint_T K = 4\pi - 4\pi = 0 .$$


---

## References

- [1] Manfredo P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces.*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.,, 1976, Translated from the Portuguese. MR 394451