Exercícios de Geometria

1 Primeiros Axiomas, Definições Básicas

Ex 1-1 Use os axiomas de incidência A1-A3 para demonstrar as seguintes proposições:

(a) Duas rectas intersectam-se em não mais do que um ponto.

(b) Dada uma recta há pelo menos um ponto que não lhe pertence.

(c) Dado um ponto há pelo menos uma recta que não passa por ele.

(d) Por cada ponto passam pelo menos duas rectas.

(e) Há pelo menos três rectas não concorrentes.

Ex 1-2 Mostre que quatro pontos não-colineares determinam pelo menos quatro rectas distintas.

Ex 1-3 Mostre que, dados cinco pontos não-colineares, há pelo menos uma recta que incide com dois desses pontos e não incide com os restantes três.

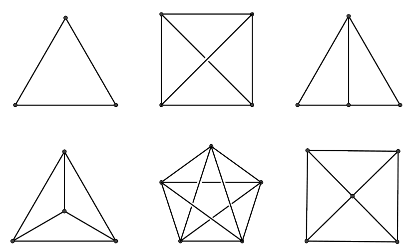
Ex 1-4 Sejam $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ "planos" finitos dotados de geometrias que satisfazem A1-A3. Sejam $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, respectivamente, os conjuntos de todas as "rectas" nestes planos. $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ dizem-se *isomorfos* se existir uma bijecção $\Phi : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ tal que, para quaisquer três pontos $P, Q, R \in \mathcal{E}_1$, os pontos $\Phi(P), \Phi(Q), \Phi(R)$ são colineares se e só se P, Q, R forem colineares. Uma aplicação $\Phi : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ nestas condições diz-se um *isomorfismo*. Mostre que

(1) Se $\Phi : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ é um isomorfismo, então a aplicação $\Phi : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$, definida por $\Phi(r) = \{\, \Phi(P) \;:\; P \in r \,\}$, é uma bijecção.

(2) Se $\Phi : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ é um isomorfismo então $\Phi^{-1} : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_1$ também é.

(3) $\ell_1, \ldots, \ell_k \in \mathcal{R}_1$ são k rectas concorrentes em $\mathcal{E}_1$ se e só se $\Phi(\ell_1), \ldots, \Phi(\ell_k) \in \mathcal{R}_2$ forem k rectas concorrentes em $\mathcal{E}_2$.

Ex 1-5 Considere as interpretações seguintes: O plano Euclideano $\mathcal{E}$ é o conjunto de todos os subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$ com dimensão 1 . Os seus elementos serão chamados "pontos". Para cada subespaço vectorial $V \subset \mathbb{R}^3$ de dimensão 2, o conjunto constituído por todos os elementos de $\mathcal{E}$ que estão contidos em V, será dito uma "recta", e não há mais "rectas" além destas. Verifique se, fazendo nos axiomas de incidência estas interpretações, obtemos proposições verdadeiras.

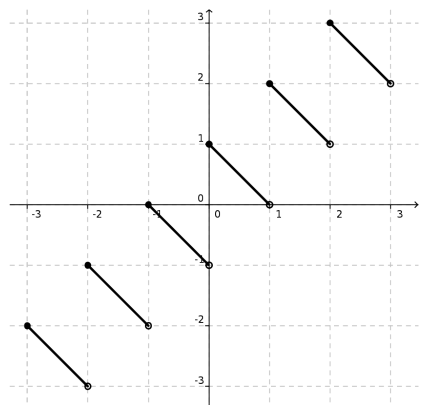


Ex 1-6 Averigue se, dos planos finitos acima representados, existem ou não dois que sejam isomorfos. (Os vértices que aparecem alinhados representam pontos colineares; nestes diagramas há, assim, rectas constituídas por dois ou três pontos.)

Ex 1-7 Considere a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta a seguir.

(a) Explicite $h(x)$, para $n \leq x \leq n+1$ e $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Suponha que as distâncias em $\mathbb{R}^2$ são medidas como habitualmente (se $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, então $|PQ| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$), excepto se P e Q estiverem ambos sobre o eixo dos xx, caso em que se define $|PQ| = |h(x_2) - h(x_1)|$. Verifique que nesta nova geometria (entendendo-se por rectas as rectas usuais de $\mathbb{R}^2$), os axiomas A1-A5 ainda são válidos. E quanto a A6? (*Sugestão*: se $P = (\frac{1}{2}, 0)$ e $Q = (\frac{3}{2}, 0)$, o que é o segmento $\overline{PQ}$?)



2 Convexidade e Separação

Ex 2-1 Como definir interior de um triângulo? e exterior?

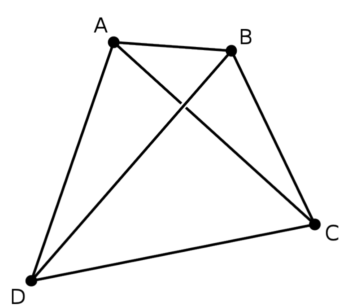
Ex 2-2 Justifique se um triângulo e seu interior são conjuntos convexos.

Ex 2-3 Mostre que se uma recta intersecta o interior dum triângulo então ela intersecta algum dos seus lados.

Dados quatro pontos $A, B, C, D \in \mathcal{E}$, quaisquer três dos quais não-colineares, o conjunto $\mathcal{Q}$ definido por

$$\mathcal{Q} = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA} \ ,$$

chama-se *quadrilátero* (de vértices consecutivos A, B, C, D). Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ dizem-se os *lados* de $\mathcal{Q}$ e os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ as *diagonais* de $\mathcal{Q}$.



Diremos que o quadrilátero $\mathcal{Q}$ tem *forma convexa* [1] quando forem verdadeiras as quatro afirmações:

(1) um dos semiplanos limitados por AB contem C e D,

(2) um dos semiplanos limitados por BC contem A e D,

(3) um dos semiplanos limitados por CD contem A e B,

(4) um dos semiplanos limitados por DA contem C e B.

Ex 2-4 Como definir interior de um quadrilátero com forma convexa? e exterior?

Ex 2-5 Justifique se um quadrilátero com forma convexa e o seu interior são conjuntos convexos.

Ex 2-6 Dados quatro pontos $A, B, C, D \in \mathcal{E}$, quaisquer três dos quais não colineares, considere o quadrilátero $\mathcal{Q}$, definido por $\mathcal{Q} = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$. Mostre que são equivalentes as afirmações seguintes:

(1) $\mathcal{Q}$ tem forma convexa;

(2) $\overline{AC} \cap \overline{BD} \neq \emptyset$.

Ex 2-7 Sejam $A, B, C, D \in \mathcal{E}$ quatro pontos tais que

$$AB \parallel CD \quad \text{e} \quad AD \parallel BC$$

Sendo $\mathcal{Q} = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$, mostre que:

a) $\mathcal{Q}$ é um quadrilátero (que se chama *paralelogramo*);

b) $\mathcal{Q}$ tem forma convexa.

Ex 2-8 Dado um triângulo ΔABC, caracterize o conjunto dos pontos D tais que o quadrilátero de vértices consecutivos A, B, C, D tenha forma convexa. (*Sugestão:* considere a diagonal fixa $\overline{AC}$ e a diagonal variável $\overline{BD}$.)

[1] Note que um quadrilátero ter forma convexa não é o mesmo ser um conjunto convexo. c.f. exercício 2-5.

Ex 2-9 Dados quatro pontos $A, B, C, D \in \mathcal{E}$, quaisquer três dos quais não colineares, determine um quadrilátero $\mathcal{Q}$ com vértices A, B, C, D e tal que $\mathcal{Q}$ tenha forma convexa se, e só se, $\overline{AB} \cap \overline{DC} \neq \emptyset$.

Ex 2-10 Dados três pontos não colineares, $A, B, C \in \mathcal{E}$, determine o conjunto dos pontos $D \in \mathcal{E}$ tais que $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ seja um quadrilátero que não se autointersecte, ou seja tal que: $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \emptyset$ e $\overline{BC} \cap \overline{DA} = \emptyset$.

Ex 2-11 Sejam $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ segmentos de recta que se cruzam num ponto O interior aos três. Mostre que $\dot{O}C - \{C\} \subset \mathrm{int}(\angle AOB)$ se e só se $\dot{O}C' - \{C'\} \subset \mathrm{int}(\angle A'OB')$.

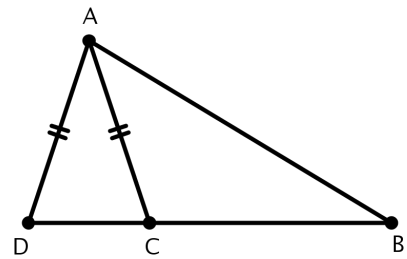
Ex 2-12 Sejam r uma recta e $P \in \mathcal{E}$ um ponto não incidente com r. Suponha que existem duas rectas a e b paralelas a r e incidentes com P.

a) Mostre que existem $A \in a - \{P\}$ e $B \in b - \{P\}$ tais que $r \subset \mathrm{int}(\angle APB)$.

b) Sendo C um ponto na semi-recta oposta a $\dot{P}A$, e sendo X tal que $B - X - C$, mostre que a recta PX é paralela a r e incidente com P.

c) Quantas rectas paralelas a r e incidentes com P poderá garantir que existem?

3 Congruência de Triângulos



Ex 3-1 A figura acima explica porque não existe nenhum critério LLA. Os triângulos ΔABC e ΔABD não são congruentes, i.e., $\Delta ABC \not\simeq \Delta ABD$, e no entanto tem-se $\overline{AC} \simeq \overline{AD}$, $\overline{AB} \simeq \overline{AB}$ e $\angle ABC \simeq \angle ABD$. Supondo que $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$ e $\angle CBA \simeq \angle FED$, mostre que:

(a) Se $\Delta ABC \not\simeq \Delta DEF$, então $|CB| < |EF|$ ou $|CB| > |EF|$;

(b) Se $|CB| < |EF|$ então $\angle BCA > 90$;

(c) Se dois triângulos rectângulos tiverem as hipotenusas e um dos catetos congruentes então eles são congruentes.

Ex 3-2 Considere um quadrilátero de forma convexa $\mathcal{Q} = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ cujos lados opostos são congruentes: $\overline{AB} \simeq \overline{DC}$ e $\overline{BC} \simeq \overline{AD}$. Mostre que:

(a) Os ângulos opostos de $\mathcal{Q}$ são congruentes;

(b) As diagonais intersectam-se no ponto médio de ambas;

(c) os lados opostos de $\mathcal{Q}$ são paralelos: $AB \parallel DC$ e $BC \parallel AD$, i.e., $\mathcal{Q}$ é um paralelogramo;

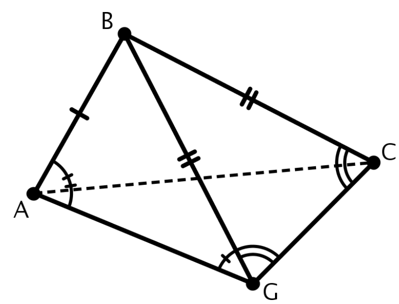
(d) $\mathcal{Q}$ é um *losango*, i.e., equilátero, se e só se as suas diagonais se intersectarem perpendicularmente.

Ex 3-3 Seja H um ponto interior ao triângulo ΔABC. Mostre que:

(a) $|HB| + |HC| < |AB| + |AC|$;

(b) $\angle BHC > \angle BAC$.

Ex 3-4 Mostre que se M for o ponto médio do lado $\overline{BC}$ do triângulo ΔABC, então $|AM| < \frac{1}{2}\,(|AB| + |AC|)$.



Ex 3-5 Sejam ΔABC um triângulo tal que $|BC| > |AB|$ e $0 < \alpha < m(\angle ABC)$. Ver figura acima. Mostre que:

(a) Existe um único ponto $G \in \operatorname{int}(\angle ABC)$ tal que $m(\angle ABG) = \alpha$ e $\overline{BC} \simeq \overline{BG}$.

(b) $\angle AGB$ e $\angle BGC$ são ângulos agudos.

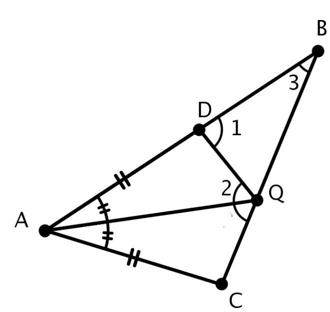
(c) B e G estão em semiplanos opostos de aresta AC. (*Sugestão:* Supondo que não, considere o ponto H de intersecção de $\dot{B}G$ com $\overline{AC}$, e aplique o Teorema do Ângulo Externo aos triângulos ΔAHG e ΔCHG para concluir que $m(\angle AGB) + m(\angle BGC) > 180°$.)

(d) $C \in \operatorname{int}(\angle BAG)$.

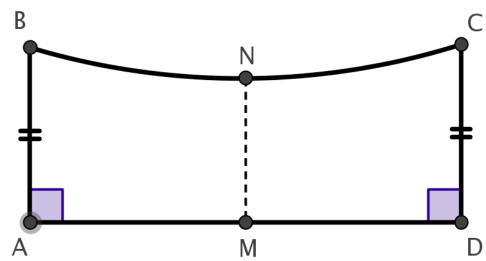
(e) $\angle AGC > \angle ACG$.

(f) $|AC| > |AG|$.

Ex 3-6 Sejam ΔABC e ΔDEF dois triângulos tais que $\overline{AB} \simeq \overline{DE}$, $\overline{BC} \simeq \overline{EF}$ e $\angle ABC > \angle DEF$. Mostre que $|AC| > |DF|$. (Proposição 24, Livro I dos Elementos de Euclides.) (*Sugestão:* Aplique o exercício anterior com $\alpha = m(\angle DEF)$.)



Ex 3-7 Suponha que, em ΔABC, a bissectriz de $\angle A$ intersecta $\overline{BC}$ no ponto Q. Então $|AB| > |AC| \Leftrightarrow |QB| > |QC|$. (*Sugestão:* Para mostrar que $|AB| > |AC|$ implica $|QB| > |QC|$ tome $D \in \overline{AB}$ tal que $|AD| = |AC|$ e aplique o Teorema do Ângulo Externo a triângulos da figura acima para mostrar que $\angle 1 > \angle 3$.)



Ex 3-8 Um quadrilátero $\mathcal{Q} = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ de forma convexa diz-se de *Saccheri* se e só se os ângulos adjacentes à base $\overline{AD}$ forem rectos, e as alturas $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ forem congruentes (figura em cima). Mostre que:

(a) As suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são congruentes;

(b) $\Delta DCB \simeq \Delta ABC$;

(c) $\angle B \simeq \angle C$, e ambos estes ângulos são ≤ 90;

(d) $|BC| \geq |AD|$ (*Sugestão*: Prove que $\angle ABD \leq \angle BDC$ e use o exercício 3-6).

Ex 3-9 Seja $\mathcal{Q} = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ um quadrilátero de Saccheri de base $\overline{AD}$, e sejam M e N os pontos médios de $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Mostre que:

(a) MN é perpendicular as ambas as rectas AD e BC;

(b) $|MN| \leq |AB|$ (*Sugestão*: o que aconteceria se os catetos do triângulo rectângulo ΔMNB fossem maiores do que os catetos de ΔBAM?)

(c) $\mathcal{Q}$ é um paralelogramo, i.e., os lados opostos são paralelos.

(d) Se P e Q forem pontos das rectas AD e BC então $|PQ| \geq |MN|$. (*Sugestão*: Sendo Q_0 o pé da perpendicular de Q sobre AD, mostre que $|PQ| \geq |QQ_0| \geq |MN|$. Para a segunda desigualdade construa um quadrilátero de Saccheri que contenha o lado $\overline{QQ_0}$.)

Ex 3-10 Mostre que dado um triângulo ΔABC existe um ponto D tal que $\mathcal{Q} = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ seja um paralelogramo com $|AB| = |CD|$ e $|BC| = |AD|$.

Ex 3-11 Um quadrilátero de forma convexa e lados congruentes chama-se *losango.*

(a) Descreva e justifique um método para a construção de losangos.

(b) Mostre que qualquer losango é um paralelogramo.

Ex 3-12 Um losango de ângulos internos congruentes chama-se quadrado. Descreva e justifique um método para a construção de quadrados.

Ex 3-13

(a) Que relação existe entre as bissectrizes de ângulos verticalmente opostos?

(b) Que relação existe entre as bissectrizes de ângulos suplementares adjacentes?

Ex 3-14 Dado um ângulo $\angle BAC$, e sendo B_0 o pé da perpendicular de B sobre a recta suporte de $\dot{A}C$, mostre que:

(a) se $B_0 \in \dot{A}C - \{A\}$, então $\angle BAC$ é agudo;

(b) se $B_0 = A$, então $\angle BAC$ é recto;

(c) se $B_0 \notin \dot{A}C$, então $\angle BAC$ é obtuso;

(d) são válidas as implicações recíprocas das mencionadas nas alíneas anteriores.

Ex 3-15 Sejam ΔABC e $\Delta A'B'C'$ triângulos rectângulos em A e emA', respectivamente, com hipotenusas congruentes: $\overline{BC} \simeq \overline{B'C'}$. Mostre que:

(a) se $\angle B > \angle B'$, então

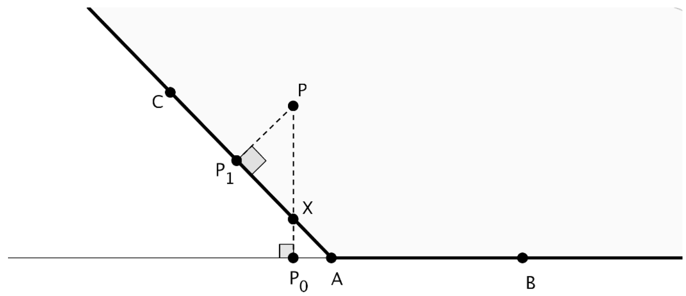
  (i) existe um ponto $C_0 \in \mathrm{int}(\angle B)$ tal que $\angle CBC_0 \simeq \angle B'$ e $\angle BC_0C$ é recto;

  (ii) $\Delta C_0BC \simeq \Delta A'B'C'$;

  (iii) $|AC| > |A'C'|$;

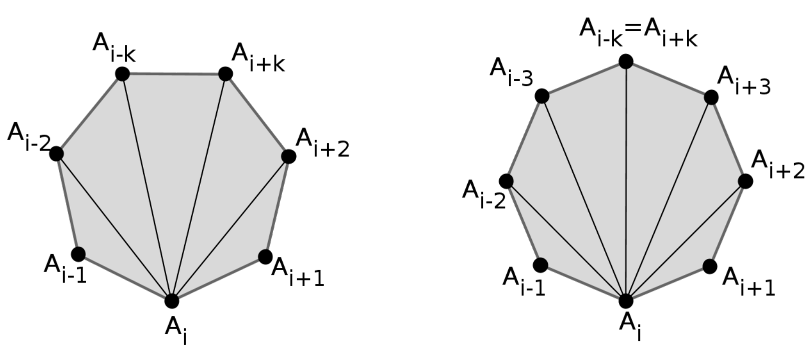
(b) se $|AC| > |A'C'|$, então $\angle B > \angle B'$.

Ex 3-16 Dado ΔABC, sejam A_0 o pé da perpendicular de A sobre BC e B_0 o pé da perpendicular de B sobre AC. Mostre que $|AC| = |BC|$ se, e só se, $|AA_0| = |BB_0|$. (*Sugestão:* considere os três casos seguintes: $\angle C$ é agudo, $\angle C$ é recto, $\angle C$ é obtuso.)



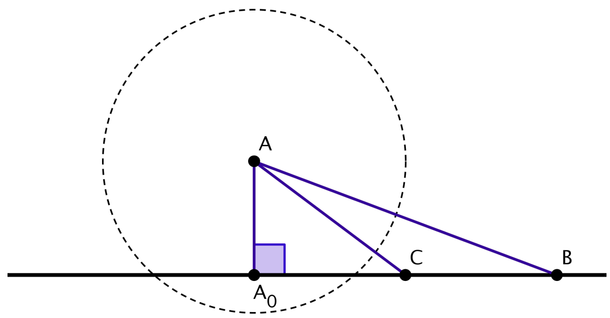
Ex 3-17 Dado um ângulo $\angle BAC$, e dado $P \in \mathrm{int}(\angle BAC)$, seja P_0 o pé da perpendicular de P sobre a recta suporte de $\dot{A}B$, e seja P_1 o pé da perpendicular de P sobre o a recta suporte de $\dot{A}C$. Mostre que, se $P_0 \notin \dot{A}B$, então $|PP_0| > |PP_1|$. (*Sugestão:* Ver figura acima.)

Ex 3-18 Seja ΔABC um triângulo tal que as mediatrizes de dois dos lados não são paralelas. Mostre que existe um único ponto D tal que os segmentos $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ e $\overline{DC}$ são congruentes.



$n = 2k - 1$ $\qquad$ $n = 2k$

Ex 3-19 Todo o triângulo equilátero pode ser inscrito numa circunferência, (isto é, existe um ponto que é equidistante dos três vértices). Mais geralmente, todo o polígono com forma convexa regular (lados e ângulos internos todos congruentes) pode ser inscrito numa circunferência. (*Sugestão:* Mostre que, num triângulo equilátero a mediatriz de cada lado passa pelo vértice oposto. Considere então o ponto de intersecção de duas dessas mediatrizes. Para polígonos de n lados separe os casos $n = 2k$ par e $n = 2k-1$ ímpar. Mostre, por indução em $j = 1, \dots, k-1$, usando o critério LAL, que $\Delta A_i A_{i+j} A_{i+j+1} \simeq \Delta A_i A_{i-j} A_{i-j-1}$. Veja a figura acima. Conclúa que as bissectrizes de ângulos internos consecutivos se intersectam num ponto equidistante dos correspondentes vértices.)



Ex 3-20 Sejam $\ell \subset \mathcal{E}$ uma recta e $A \in \mathcal{E} - \ell$. Seja $A_0 \in \ell$ a projecção ortogonal (pé da perpendicular) de A sobre ℓ. Mostre que:

(a) dados $B, C \in \ell$, $|A_0B| > |A_0C|$ implica $|AB| > |AC|$;

(b) Seja $f : \ell \to \mathbb{R}$ um sistema de coordenadas tal que $f(A_0) = 0$. A função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = |Af^{-1}(x)|$ satisfaz:

  (i) h é contínua;

  (ii) h é estritamente monótona nos intervalos $[0, +\infty[$ e $]-\infty, 0]$;

  (iii) h é uma função par;

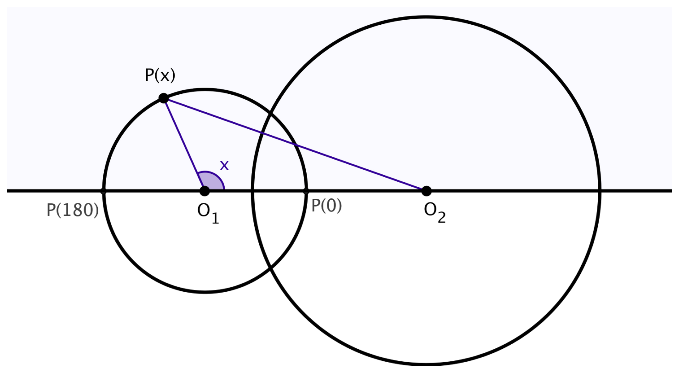
  (iv) $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = +\infty$;

(c) se uma recta passar por um ponto interior de uma circunferência, então essa recta intersecta a circunferência exactamente em dois pontos A, B.

(d) Nas condições da alínea anterior, $\mathrm{int}(\mathcal{C}) \cap \ell = \mathrm{int}(\overline{AB})$.

Ex 3-21 Considere um ângulo $\angle P_1OP_0$ com $\alpha = m(\angle P_1OP_0)$ e $r = |P_0P_1|$. Para cada $x \in [0, \alpha]$ seja $Q(x) \in \overline{P_0P_1}$ o único ponto tal que $m(\angle Q(x)OP_0) = x$. Mostre que a função $f : [0, \alpha] \to [0, r]$, $f(x) = |Q(x)P_0|$, é contínua. (*Sugestão*: Veja que f é estritamente crescente e sobrejectiva.)

Ex 3-22 Seja α_0 a amplitude do ângulo agudo num triângulo rectângulo isósceles com catetos de medida r. Dada uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio r e centro O, e um ponto $P_0 \in \mathcal{C}$, mostre que a recta tangente a $\mathcal{C}$ em P_0, i.e., a recta ortogonal a OP_0 em P_0, corta todas as semirectas $\dot{O}P$ tais que $m(\angle POP_0) \leq \alpha_0$.



Ex 3-23 Considere duas circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ de centros O_1 e O_2 e raios r_1 e r_2, respectivamente, tais que $\mathcal{C}_1$ intersecta o interior e o exterior de $\mathcal{C}_2$. Seja $\ell = O_1O_2$ e $f : \ell \to \mathbb{R}$ um sistema de coordenadas tal que $f(O_1) = 0$ e $f(O_2) > 0$. Fixe um dos semiplanos H limitados por ℓ. Para cada $x \in [0, 180]$ seja $P(x)$ o único ponto de $\mathcal{C}_1$ tal que $m(\angle P(x)O_1O_2) = x$. Defina então $h : [0, 180] \to \mathbb{R}$ por $h(x) = |P(x)O_2|$. Mostre que:

(a) h é contínua; (*Sugestão*: Para ver a continuidade em x_0, considere a recta t tangente a $\mathcal{C}_1$ em $P(x_0)$. Veja, pelo exercício 22, que para x próximo de x_0 a semirecta $\dot{O}_1P(x)$ intersecta t num ponto $Q(x)$. Mostre que $|h(x) - h(x_0)| \leq |P(x)P(x_0)| \leq |Q(x)P(x_0)|$ e use o exercício 21.)

(b) h é estritamente crescente; (*Sugestão*: use o exercício 3-6).

(c) $h(0) < r_2$ e $h(180) > r_2$;

(d) existe um único ponto em $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \cap H$. (*Sugestão*: veja que existe um único ângulo $x \in]0, 180[$ tal que $h(x) = r_2$).

(e) $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ intersectam-se exactamente em dois pontos.

Ex 3-24 Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência. Mostre que $\text{int}(\mathcal{C})$ é um conjunto convexo.

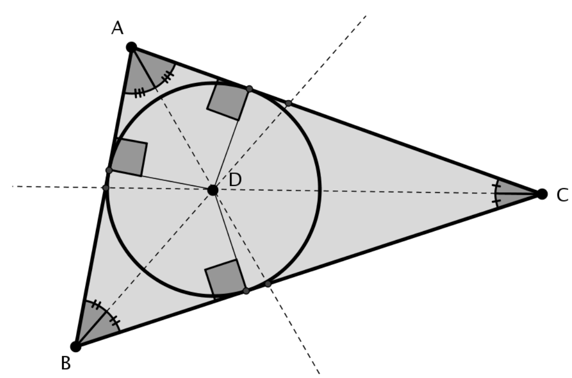
Ex 3-25 Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ duas circunferências de centros O_1, O_2, e raios r_1, r_2, respectivamente. Suponha que $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ se intersectam em pelo menos dois pontos. Mostre que:

(a) $|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2$; (*Sugestão*: Aplique a desigualdade triângular ao triângulo ΔAO_1O_2 onde A é um dos pontos de intersecção de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$. Deve justificar que $A \notin O_1O_2$.)

(b) $\mathcal{C}_1$ intersecta o interior e o exterior de $\mathcal{C}_2$. (*Sugestão*: Use a alínea (a).)

4 Circunferências. Construções de Régua e Compasso.

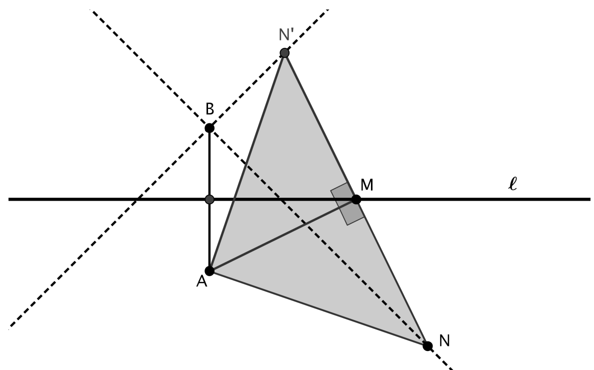
Chama-se *circunferência inscrita* a um triângulo ΔABC a uma circunferência que seja tangente a cada um dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ (ou seja, que é tangente a cada uma das rectas que prologam esses segmentos, e os pontos de contacto estão nesses mesmos segmentos). O centro dessa circunferência diz-se o *incentro* do triângulo ΔABC.



Ex 4-1 Mostre que o incentro dum triângulo ΔABC é o ponto de intersecção das bissectrizes dos três ângulos internos de ΔABC. Descreva detalhadamente uma construção de régua e compasso da circunferência inscrita a um triângulo.

Ex 4-2 Construa um triângulo rectângulo, conhecidos a hipotenusa c e a altura h baixada sobre o vértice oposto.

Ex 4-3 Sejam A e B dois pontos fixados e M um ponto móvel, todos sobre na mesma circunferência $\mathcal{C}$. Prolongue $\dot{A}M$ até um ponto N tal que $|MN| = |MB|$. Qual o lugar geométrico dos pontos N assim obtidos à medida que M percorre $\mathcal{C}$?
(*Sugestão*: Relacione $m(\angle ANB)$ com um dos arcos de $\mathcal{C}$ limitados por A e B. Note que N pertence ao semiplano limitado pele recta tangente a $\mathcal{C}$ no ponto A que contém B.)

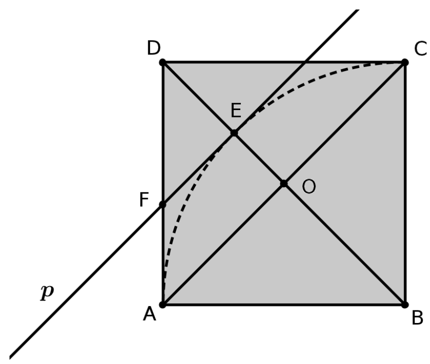


Ex 4-4 Sejam ℓ uma recta e A um ponto exterior a ℓ. Considere o lugar geométrico dos pontos N tais que $\overline{AN}$ é a hipotenusa dum triângulo rectângulo isósceles ΔAMN cujo terceiro vértice M está em ℓ. Mostre que este lugar geométrico é a união de duas rectas perpendiculares que se cruzam num ponto B, tais que ℓ é a mediatriz de $\overline{AB}$, e que fazem ângulos de 45° com a recta ℓ. (Ver a figura acima).

Ex 4-5 Sejam $\mathcal{C}$ uma circunferência de centro O, e $P \in \mathcal{E} \setminus (\mathcal{C} \cup \{O\})$. Mostre que

(a) Se $P \in \text{int}(\mathcal{C})$ então o lugar geométrico dos pontos médios das cordas de $\mathcal{C}$ que passam por P é a circunferência de diâmetro $\overline{OP}$.

(b) Se $P \in \text{ext}(\mathcal{C})$ então o lugar geométrico dos pontos médios das cordas de $\mathcal{C}$ cuja recta suporte passa por P é a intersecção da circunferência de diâmetro $\overline{OP}$ com $\text{int}(\mathcal{C})$.

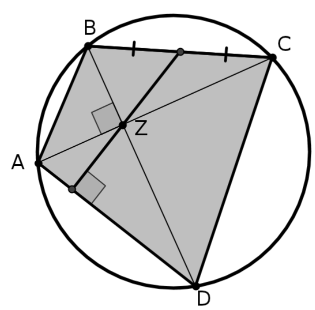


Ex 4-6 Considere um quadrado de vértices consecutivos A, B, C e D e seja O tal que $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{O\}$. Seja $E \in \dot{B}D$ tal que $|AB| = |BE|$.

(a) Que relação de ordem há entre os pontos D, O e E ?

(b) Sendo p a perpendicular à recta BD no ponto E, mostre que existe um único ponto F tal que $p \cap \text{int}(\overline{AD}) = \{F\}$.

(c) Mostre que $|AF| = |DE|$.



Ex 4-7 Seja $\mathcal{Q}$ um quadrilátero *cíclico*, isto é, um quadrilátero cujos vértices pertencem a uma circunferência. Supondo que $\mathcal{Q}$ tem forma convexa e que as diagonais de $\mathcal{Q}$ se intersectam perpendicularmente num ponto Z , mostre que a perpendicular de Z sobre o suporte de qualquer dos lados bissecta o lado oposto. (*Sugestão:* usar o teorema do triângulo isósceles.)

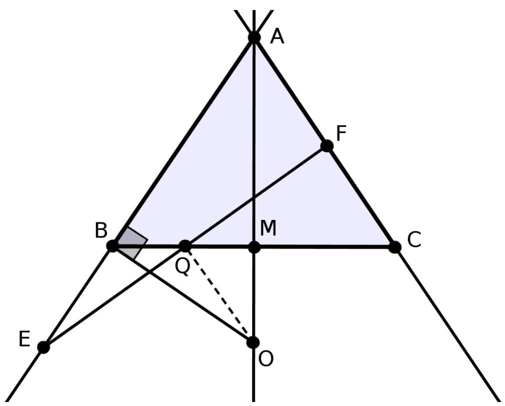
Ex 4-8 Dado um triângulo ΔABC rectângulo em A e sendo O o bissector de $\overline{BC}$, mostre que $|OA| = |OB|$.

Ex 4-9 Num triângulo rectângulo o comprimento do lado menor é metade do comprimento do lado maior sse as medidas dos ângulos agudos são 30 e 60 graus.

Ex 4-10 Sejam $\mathcal{C}$ uma circunferência e $A, B, C, D \in \mathcal{C}$ quatro pontos. Se o ponto $V \in \mathcal{E}$ é tal que $V - A - C$ e $V - B - D$, e se a medida do arco subentendido pelo ângulo $\angle CBD$ é o dobro da medida do arco subentendido pelo ângulo $\angle ACB$, mostre que o triângulo ΔVBC é isósceles.

5 Semelhança de Triângulos.

Ex 5-1 Mostre que em qualquer quadrilátero os bissectores dos lados são os vértices de um paralelogramo, desde que quaisquer três deles sejam não colineares. (*Sugestão:* Veja que num triângulo a recta que une os bissectores de dois lados é paralela ao terceiro lado.)



Ex 5-2 Seja ΔABC um triângulo isósceles com $|AB| = |AC|$. Suponha que:

(i) M é o bissector de $\overline{BC}$, e $O \in AM$ é tal que $OB \perp AB$;

(ii) $Q \in \text{int}(\overline{BC})$;

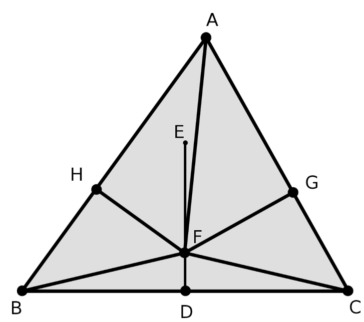
(iii) $E \in AB$, $F \in AC$ tais que E, Q, F são distintos mas colineares.

Mostre que $OQ \perp EF \quad \Leftrightarrow |QE| = |QF|$. (*Sugestão:* Suponha que $OQ \perp EF$. Mostre que existe uma circunferência $\mathcal{C}$ que contem E, O, B e Q, e que existe uma circunferência $\mathcal{C}'$ que contem F, C, O e Q. Aplique então o teorema do Arco Capaz e o Teorema do Triângulo Isósceles, para concluir que $|QE| = |QF|$.

Para a implicação recíproca suponha que $E - B - A$, como na figura acima. Supondo que $\angle OQE$ não é recto, considere a recta E_0F_0, com $E_0 \in \dot{A}B$ e $F_0 \in \dot{A}C$, que corta OQ perpendicularmente no ponto Q. Justifique, pela implicação anterior, que $|QE_0| = |QF_0|$. Veja então que $B - E_0 - E$ se $\angle OQE$ é agudo, e que $B - E - E_0$ se $\angle OQE$ é obtuso. Comparando os triângulos ΔQE_0E e ΔQF_0F conclúa que $|QE| \neq |QF|$.

Ex 5-3 Diga o que está errado na demonstração do seguinte "Teorema". Todos os triângulos são isósceles.
Prova Seja ΔABC um triângulo qualquer. Chame D ao bissctor de $\overline{BC}$, e seja DE a mediatriz desse segmento. Considere a bissectriz de $\angle BAC$:

(1) Se a bissectriz não intersectar DE, então elas são paralelas, e portanto a bissectriz é perpendicular a $\overline{BC}$. Logo $|AB| = |AC|$, isto é, ΔABC é isósceles;



(2) Se a bissectriz e DE se intersectarem, considere-se F comum às duas. Sejam H e G os pés das perpendiculares de F sobre $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Então os triângulos ΔAFG e ΔAFH são congruentes, já que têm ângulos agudos congruentes ($\angle FAG \simeq \angle FAH$) e a mesma hipotenusa $\overline{AF}$. Logo $|AH| = |AG|$ e $|FH| = |FG|$.

Também os triângulos ΔBDF e ΔCDF são congruentes, já que $|BD| = |DC|$, o lado $\overline{FD}$ é comum aos dois, e $\angle BDF \simeq \angle CDF$. Logo $|FB| = |FC|$.

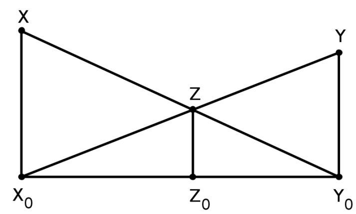
Os dois triângulos rectângulos ΔFBH e ΔFCG têm assim a hipotenusa e um dos catetos congruentes, isto é, $|FB| = |FC|$ e $|FH| = |FG|$. Pelo teorema de Pitágoras, também $|BH| = |CG|$. Mas então, e como já vimos que $|AH| = |AG|$, resulta que:

$$|AB| = |AH| + |HB| = |AG| + |GC| = |AC| \ ,$$

isto é, ΔABC é isósceles.

Portanto, em qualquer dos casos (1) e (2), ΔABC é isósceles. $\square$

Ex 5-4 Se ΔABC é um triângulo tal que $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$, então ΔABC é rectângulo.



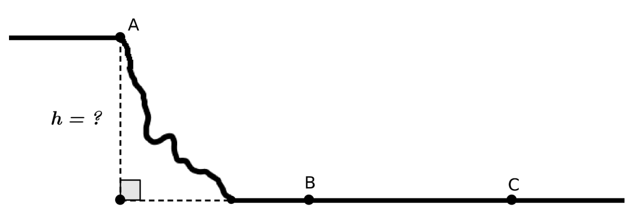
Ex 5-5 Sejam r uma recta e $X, Y \in \mathcal{E} - r$ pontos no mesmo semiplano de aresta r tais que $X_0 \neq Y_0$, onde X_0 designa o pé da perpendicular de X sobre r e Y_0 o pé da perpendicular de Y sobre r. Mostre que:

(a) existe um único ponto Z tal que $\overline{XY_0} \cap \overline{YX_0} = \{Z\}$;

(b) $\frac{1}{|ZZ_0|} = \frac{1}{|XX_0|} + \frac{1}{|YY_0|}$, em que Z_0 designa o pé da perpendicular de Z sobre r.

6 Trignometria

Ex 6-1 Suponha que, em ΔABC, a bissectriz de $\angle A$ intersecta $\overline{BC}$ no ponto X. Mostre que $\frac{|XB|}{|XC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$.



Ex 6-2 Diga como deve proceder um observador colocado na planície BC para calcular a altura (relativamente a BC) do ponto A situado no topo de uma escarpa (figura em cima). O ponto A é visível mas inacessível, e o pé da perpendicular baixada de A sobre BC está ocultado.

Ex 6-3 Um triângulo rectângulo tem catetos a e b. Calcule, em função de a e b, o comprimento do segmento da bissectriz do ângulo recto entre o vértice e a hipotenusa.

Ex 6-4 Dado um triângulo ΔABC, seja D um ponto pertencente à recta BC e distinto de B e de C. Mostre que a razão entre os raios das circunferências circunscritas aos triângulos ΔABD e ΔACD não depende de D. Para que ponto D atingem esses raios o menor valor?
(*Sugestão:* Sejam E o centro da circunferência que circunscreve ΔABD, e F o centro da circunferência que circunscreve ΔACD. Usando o Teorema do Arco Capaz, mostre que $\Delta ABD \sim \Delta DEF$.)

Ex 6-5 Determine os lados dum triângulo conhecendo o seu perímetro e os seus ângulos internos.

Ex 6-6 Num trapézio $\mathcal{Q} = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ [2] tem-se $|AB| = 8$, $|AC| = |BC| = 5$ e $|AD| = |DC|$. Calcule $\angle BAD$ e $|BD|$. (*Sugestão:* Mostre que $\angle CAD$ é agudo e que $\angle ACB$ é obtuso. Conclúa que AD não pode ser paralela a BC, pelo que DC é paralela a AB.)

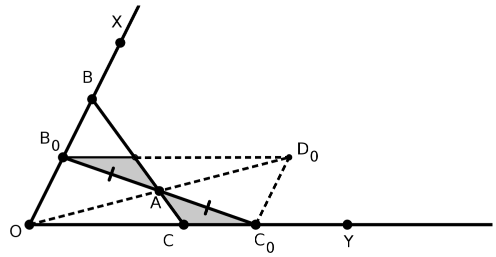
Ex 6-7 Mostre que o ângulo formado pela altura e pela bissectriz relativas ao vértice A dum triângulo ΔABC é $\frac{1}{2}\,|m(\angle C) - m(\angle B)|$.
(*Sugestão:* Bastam considerações sobre medidas de ângulos.)

Ex 6-8 Seja ΔABC um triângulo rectângulo em A. Mostre que o ângulo formado pela altura e pela mediana [3] relativa ao ângulo recto é $|m(\angle C) - m(\angle B)|$.

[2] Chama-se trapézio a um quadrilátero de forma convexa com dois lados paralelos.

[3] Num triângulo, uma mediana é um segmento de recta que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto.

7 Áreas



Ex 7-1 Seja A um ponto fixado no interior de um ângulo $\angle XOY$, e passe por A uma recta ℓ intersectando OX e OY nos pontos B e C. Mostre que, de todos os triângulos ΔOBC assim obtidos, tem área mínima aquele em que A é o ponto médio de $\overline{BC}$. (*Sugestão:* Seja D_0 tal que $O - A - D_0$ e $|OA| = |AD_0|$, e construa $B_0 \in OX$ e $C_0 \in OY$ tais que $OB_0D_0C_0$ seja um paralelogramo. Supondo que $B \neq B_0$, justifque que $|AB| \neq |AC|$. Considere então dois casos: Se $|AB| > |AC|$, veja que existe C' entre A e B tal que $|AC| = |AC'|$, e deduza que $A(\Delta AC_0C) = A(\Delta AC'B_0) < A(\Delta ABB_0)$. Conclua que $A(\Delta OB_0C_0) < A(\Delta OBC)$. Se $|AB| < |AC|$, argumentando de modo análogo, infira que $A(\Delta OB_0C_0) < A(\Delta OBC)$.)

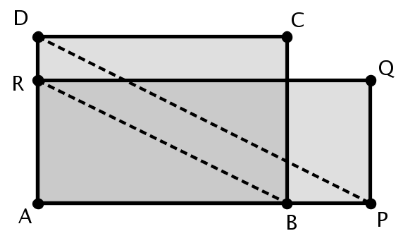
Ex 7-2 Seja A a área de um triângulo de lados a, b, c, e ângulos internos opostos α, β, γ, respectivamente. Mostre que

$$a^2 = \frac{2\,A\,\sin\alpha}{\sin\beta\,\sin(\alpha+\beta)},\ b^2 = \frac{2\,A\,\sin\beta}{\sin\alpha\,\sin(\alpha+\beta)},\ c^2 = \frac{2\,A\,\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\,\sin\beta}\,.$$

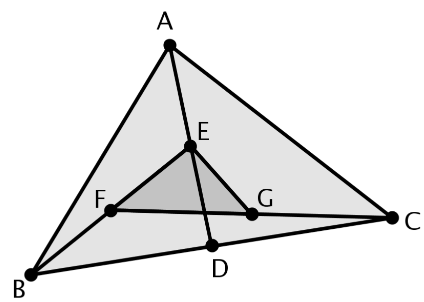
(*Sugestão:* A área do triângulo é $A = \frac{a\,b}{2}\sin\gamma$. Pela lei dos senos $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.)

Ex 7-3 Um trapézio isósceles[4] tem área igual à diferença dos quadrados dos lados paralelos. Calcule os ângulos internos do trapézio.

[4]Um trapézio diz-se *isósceles* se forem iguais os ângulos adjacentes a cada um dos dois lados paralelos.



Ex 7-4 Sabendo que os rectângulos $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ e $\overline{AP} \cup \overline{PQ} \cup \overline{QR} \cup \overline{RA}$ da figura acima têm a mesma área, mostre que as rectas PD e RB são paralelas.



Ex 7-5 Dado ΔABC, sejam D o ponto médio de $\overline{BC}$, E o ponto médio de $\overline{AD}$, F o ponto médio de $\overline{BE}$, e G o ponto médio de $\overline{CF}$. Exprima a área de ΔEFG em função da de ΔABC (ver figura acima).

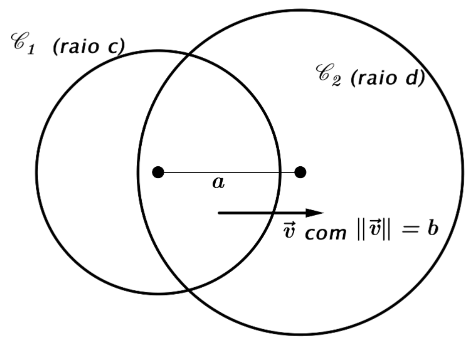
Ex 7-6 Chama-se *inraio* de um triângulo ao raio da sua circunferência inscrita. Mostre que se um triângulo tem semiperímetro p, área A, e inraio r, então $A = p\,r$.

Ex 7-7 Se ΔABC for um triângulo rectângulo de hipotenusa $\overline{BC}$ então o seu inraio é $r = \frac{b+c-a}{2}$.

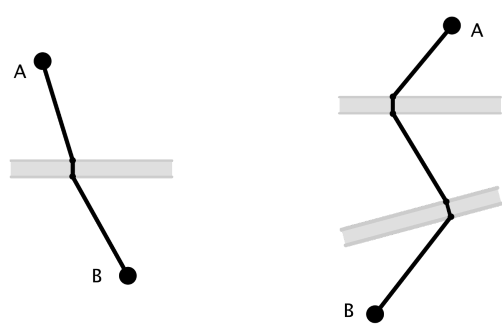
Ex 7-8 Construa um triângulo, conhecendo o comprimento de um dos lados, o valor da altura correspondente a esse lado, e o raio da circunferência inscrita. (Sugestão: Use a fórmula $A = p\,r$ do exercício 7-6).

8 Isometrias

Ex 8-1 Inscreva, numa dada circunferência, uma corda com um dado comprimento e paralela a uma recta dada. (*Sugestão:* Sejam $\mathcal{C}$ e ℓ a circunferência e recta dadas, respectivamente, e $\vec{v}$ um vector paralelo a ℓ com norma igual ao comprimento fixado. Considere a translação T segundo o vector $\vec{v}$.)



Ex 8-2 Dum trapézio conhecem-se os comprimentos a e b dos seus lados paralelos, e c e d das suas diagonais. Construa esse trapézio. (*Sugestão:* Desenhe um segmento de comprimento a, um vector $\vec{v}$ paralelo a esse segmento de comprimento b, e duas circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_1$ de centros nas extremidades do segmento a e raios c e d, respectivamente. Considere a translação T segundo o vector $\vec{v}$.)



Ex 8-3

(a) Duas cidades A e B estão separadas por um rio cujas margens são rectas paralelas. Em que ponto do rio devemos construir uma ponte de modo a minimizar o percurso entre as duas cidades? (Supomos que a ponte é perpendicular às margens, e que vai ficar ligada às cidades por estradas em linha recta; veja a figura em cima.)

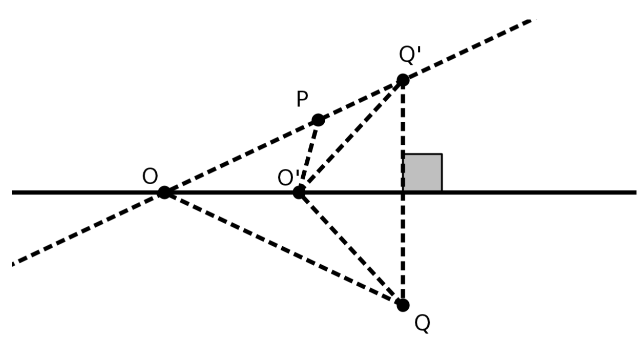
(b) O mesmo que (a), mas com dois rios a separar A e B.

(*Sugestão:* Considere as translações segundo os vectores perpendiculares aos rios, com comprimentos iguais às respectivas larguras dos rios, e que apontam no sentido de B para A.)

Ex 8-4 Construa um paralelogramo dados os comprimentos dos seus lados a e b, e o ângulo α entre as suas diagonais. (*Sugestão:* Desenhe um triângulo isósceles de base a e ângulo oposto α, trace a circunferência $\mathcal{C}$ que circunscreve este triângulo, e , com centro numa das extremidades da base do triângulo isósceles, uma circunferência $\mathcal{C}'$ de raio $b/2$. Considere então uma translação T apropriada.)

Ex 8-5 De um quadrilátero de forma convexa conhecem-se os lados consecutivos a, b, c, d e sabe-se que o ângulo entre a e b é bissectado pela diagonal. Construa esse quadrilátero. (*Sugestão:* Suponha que $a > b$. Tome um segmento $\overline{AB}$ com $|AB| = a$ e um ponto $D' \in \overline{AB}$ tal que $|AD'| = b$. Considere as circunferências $\mathcal{C}_1$ de centro B e raio d, e $\mathcal{C}_2$ de centro D' e raio c, e obtenha C e D desta construção.)

Ex 8-6 Mostre que o triângulo de menor perímetro, entre aqueles com uma dada base e uma dada altura, é o isósceles. (*Sugestão:* Seja $\overline{AB}$ um segmento com $|AB| = b$, e ℓ uma recta paralela a AB a uma distância h desta, de modo que para cada $C \in \ell$, ΔABC seja um triângulo com base b e altura h. Considere B' imagem de B pela reflexão em torno de ℓ, e $O \in \overline{AB'} \cap \ell$, e use a desigualdade triângular.)



Ex 8-7 Dados P e Q em lados opostos da recta ℓ, encontre $O \in \ell$ de modo que $||OP| - |OQ||$ seja máximo. (*Sugestão:* Reflectindo Q em torno de ℓ, P e Q' estão do mesmo lado de ℓ. Use a desigualdade triângular para mostrar que o valor de $||OP| - |OQ|| = ||OP| - |OQ'||$ é máximo quando P, Q, O são pontos colineares, com $O - P - Q'$ ou $O - Q' - P$. Ver a figura acima.)

Ex 8-8 Sejam ΔABC um triângulo *acutângulo*, e seja X um ponto do lado $\overline{BC}$.

(a) De todos os triângulos inscritos em ΔABC que têm X como um dos vértices, encontre aquele de menor perímetro. (Sugestão: Reflicta X em cada um das rectas AB e AC.)

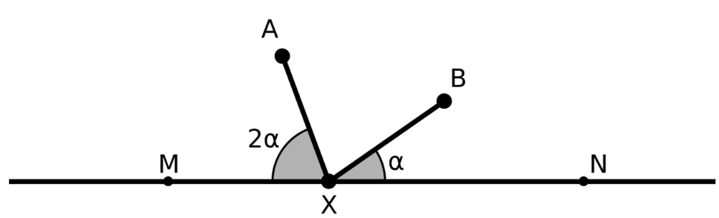
(b) Qual o triângulo de menor perímetro inscrito em ΔABC? (*Sugestão:* Suponha que $\Delta A_1B_1C_1$, com $A_1 \in \overline{BC}$, $B_1 \in \overline{AC}$ e $C_1 \in \overline{AB}$, é o triângulo inscrito de perímetro mínimo. Use a alínea anterior para concluír que A_1 é o pé da perpendicular de A sobre BC, que B_1 é o pé da perpendicular de B sobre AC e que C_1 é o pé da perpendicular de C sobre AB.)

Ex 8-9 (Difícil)

(a) Dadas três rectas concorrentes ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 e um ponto A numa delas, construa um triângulo ΔABC para o qual essas rectas são as bissectrizes dos ângulos.

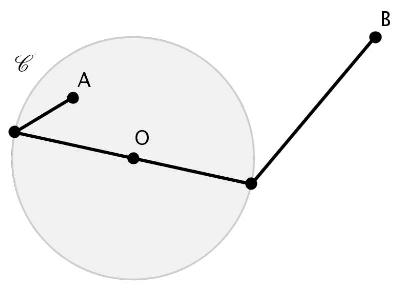
(b) Dadas uma circunferência $\mathcal{C}$ e três rectas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 passando pelo seu centro, construa ΔABC de que ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 sejam as bissectrizes dos ângulos e $\mathcal{C}$ a circunferência inscrita.

(*Sugestão:* Em ambas as alíneas, use reflexões em torno das rectas dadas.)

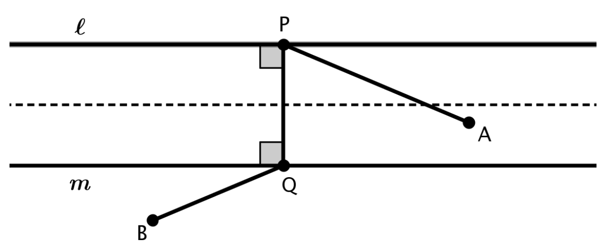


Ex 8-10 Sejam A e B dois pontos do mesmo lado da recta MN. Suponha que os pés das perpendiculares de A e B sobre MN se encontram ambos no interior de $\overline{MN}$, estando ordenados do seguinte modo: $M < A_0 < B_0 < N$. Encontre X em MN de modo que $\angle AXM = 2\angle BXN$. (*Sugestão:* Seja B' a imagem de B pela reflexão em torno de MN, e trace a circunferência $\mathcal{C}$ de centro B' que passa por A, que intersecta MN em dois pontos C e C'. Escolha C de modo a estar na semirecta $\dot{A}_0M$.)

Ex 8-11 Dadas duas circunferências que se intersectam transversalmente no ponto A, construa por A uma recta que determine nessas circunferências duas cordas de igual comprimento. (*Sugestão:* Reflicta uma das circunferências pela simetria central em torno do ponto A.)



Ex 8-12 São dados uma circunferência $\mathcal{C}$ e dois pontos, um deles, A, no interior de $\mathcal{C}$ e o outro, B, no exterior. Construa dois pontos diametralmente opostos $P, Q \in \mathcal{C}$ de tal forma que a soma $|AP| + |PQ| + |QB|$ tome o menor valor possível (figura em cima). (*Sugestão:* Considere a imagem B' do ponto B pela simetria central em torno do centro da circunferência $\mathcal{C}$.)



Ex 8-13 São dadas no plano duas rectas paralelas ℓ e m, um ponto A no interior da faixa limitada por ℓ e m, e um ponto B no lado de m oposto ao que contém A. Determine, de entre todos os pares de pontos $P \in \ell$, $Q \in m$ tais que $PQ \perp \ell$, aquele para o qual a soma $|AP| + |PQ| + |QB|$ torna o valor mínimo (figura em cima). (*Sugestão:* Considere a recta paralela a ℓ e m, e equidistante das duas, e a imagem B' do ponto B pela reflexão em torno desta recta.)

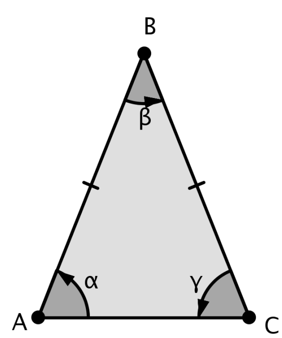
Ex 8-14 São dados ℓ, m, A e B como no exercício anterior. Determine, de entre todos os pares de pontos $P \in \ell$, $Q \in m$ tais que $PQ \perp \ell$, aquele para o qual a expressão $||AP| - |BQ||$ toma o valor máximo. (*Sugestão:* Considere o vector perpendicular a ℓ e m, dirigido de ℓ para m, com comprimento igual à distância entre estas duas rectas. Seja A' a imagem do ponto A pela translação associada a este vector. Veja que o problema posto é equivalente a encontrar $Q \in m$ tal que a distância $||A'Q| - |BQ||$ seja máxima. Aplique então o exercício 8-7.)

Ex 8-15 São dados um ângulo α, duas rectas ℓ_1 e ℓ_2, e um ponto A. Construa uma circunferência $\mathcal{C}$ com centro A tal que as rectas ℓ_1 e ℓ_2 cortem em $\mathcal{C}$ um arco de amplitude α. (*Sugestão:* Considere a imagem ℓ_1' de ℓ_1 por uma rotação de centro A e ângulo α.)

Ex 8-16 Construa um triângulo equilátero cujos vértices estejam sobre três rectas paralelas dadas ou sobre três circunferências concêntricas dadas. (*Sugestão:* Fixe um ponto A numa das rectas (circunferência), e considere a imagem de outra das três rectas (circunferências) por uma rotação de 60 graus em torno de A.)

Ex 8-17 Dadas duas rectas r, s e um ponto P exterior a ambas, construa $R \in r$ e $S \in s$ tais que ΔPRS seja um triângulo rectângulo isósceles de hipotenusa $\overline{RS}$. (*Sugestão:* Considere uma rotação de 90 graus em torno de P.)

Ex 8-18 Dado ΔABC, indique por f_1, f_2 e f_3 as simetrias com centro nos pontos médios dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Diga que transformações são as compostas $f_2 \circ f_1$ e $f_3 \circ f_2 \circ f_1$.



Ex 8-19 Seja ΔABC um triângulo isósceles de base $\overline{AC}$ e ângulos internos $\alpha, \beta, \gamma \in]0, 180[$. Sejam $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ as rotações de centros A, B, C e amplitudes α, β, γ indicadas na figura em cima. Diga que tranformação é a composta $\mathcal{R}_3 \circ \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$.

Ex 8-20 Mostre que a composta (por alguma ordem) das três reflexões nas mediatrizes dos lados de um triângulo é uma reflexão na recta que une algum dos vértices ao circuncentro do triângulo.

Ex 8-21 Seja ΔABC um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$ e seja α o ângulo interno em A. Indique por f a reflexão na bissectriz de $\angle A$, e por g a rotação de centro A e amplitude α. Diga como é a composta $g \circ f$.

Ex 8-22 Mostre que:

(a) Se $\Delta ABC \simeq \Delta A'B'C'$, então são necessárias no máximo três reflexões para fazer coincidir os dois triângulos.

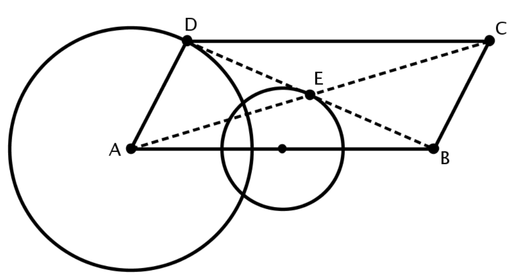
(b) Cada isometria do plano euclidiano pode-se escrever como a composta de não mais que três reflexões.

(c) Dados $\Delta ABC \simeq \Delta A'B'C'$, existe uma e uma só isometria $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tal que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ e $f(C) = C'$.

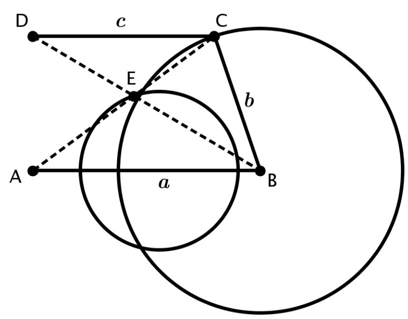
9 Transformações de Semelhança

Ex 9-1 São dados um ponto A e duas rectas ℓ_1 e ℓ_2. Faça passar por A uma recta ℓ de modo que o segmento $\overline{BC}$ que nela cortam ℓ_1 e ℓ_2 seja tal que : (i) $AB = -2\,AC$; (ii) $AB = 2\,AC$. (*Sugestão:* Considere homotetias de centro A.)

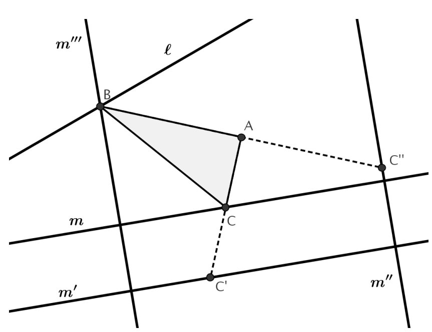
Ex 9-2 Mostre que a recta que une os pontos médios dos dois lados paralelos de um trapézio passa pelo ponto de intersecção das rectas que contêm os outros dois lados, e também pelo ponto de intersecção das diagonais. (*Sugestão:* Considere uma homotetia de razão conveniente e centro no ponto de intersecção dos lados não paralelos do trapézio.)



Ex 9-3 Considere um paralelogramo "articulado" $ABCD$: o comprimento dos lados é fixo, e são fixos os pontos A e B, mas os pontos C e D são móveis. Mostre que, à medida que C e D se movem, o ponto de intersecção das diagonais descreve uma circunferência. (*Sugestão:* Considere a homotetia H de centro B e razão $1/2$, e mostre que o ponto E de intersecção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ descreve a circunferência $\mathcal{C}' = H(\mathcal{C})$.)

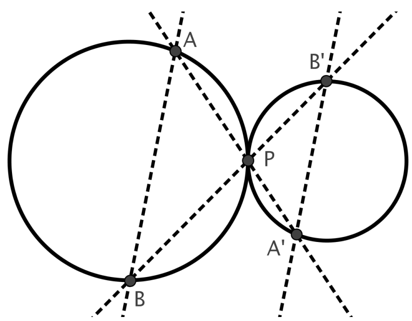


Ex 9-4 Considere um sistema de barras rígidas coplanares $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, articuladas nos pontos B e C. Suponha que $\overline{AB}$ está fixa e que $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ se movem, permanecendo sempre no mesmo plano, de forma a que $\overline{CD}$ se mantenha paralela a $\overline{AB}$ e o sentido de C para D seja oposto àquele de A para B. Mostre que o lugar geométrico do ponto E de intersecção das diagonais do trapézio $ABCD$ é uma circunferência. (*Sugestão:* Seja $\mathcal{C}$ a circunferência de centro B e raio $|BC|$, lugar geométrico onde se move o ponto B. Mostre que $\Delta EAB \sim \Delta ECD$, e deduza daqui que $\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AB|+|CD|}$. Conclúa que o ponto E descreve uma circunferência que é a imagem de $\mathcal{C}$ pela homotetia de centro A e razão $\frac{|AB|}{|AB|+|CD|}$.)

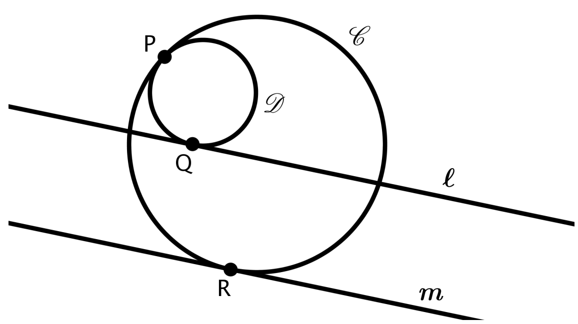


Ex 9-5 São dadas duas rectas ℓ, m e um ponto A exterior a ambas. Construa $B \in \ell$ e $C \in m$ de modo que $|AC| = 2\,|AB|$ e o triângulo ΔABC seja rectângulo de hipotenusa $\overline{BC}$. (*Sugestão:* Considere a homotetia H de centro A e razão 2, e $m' = H(m)$; uma rotação R de 90 graus com centro em A e $m'' = R(m')$.)

Ex 9-6 Na sua folha de desenho tem um ponto A e dois segmentos de recta cujos prolongamentos ℓ_1 e ℓ_2 se intersectam num ponto M fora dos limites do papel. Dê um processo para construir a recta AM. (*Sugestão:* Dependendo do ângulo entre as rectas, escolha uma razão r suficientemente pequena, e desenhe as imagens de ℓ_1 e ℓ_2 pela homotetia de centro A e razão r.)

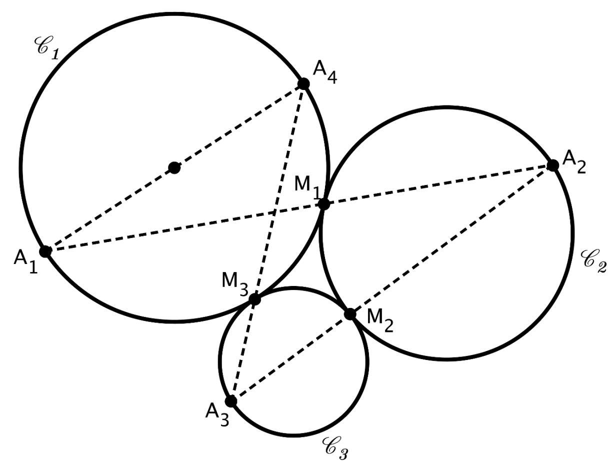


Ex 9-7 Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ duas circunferências tangentes exteriormente em P. Considere duas cordas $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ de $\mathcal{C}$, e sejam A' e B' os pontos de intesecção, distintos de P, de PA e PB com $\mathcal{C}'$. Mostre que as rectas AB e $A'B'$ são paralelas. (*Sugestão:* Considere uma homotetia H de centro P tal que $H(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.)



Ex 9-8 Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas circunferências distintas, tangentes interiormente uma à outra no ponto P. Sejam ℓ e m duas rectas paralelas, tangentes a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ nos pontos

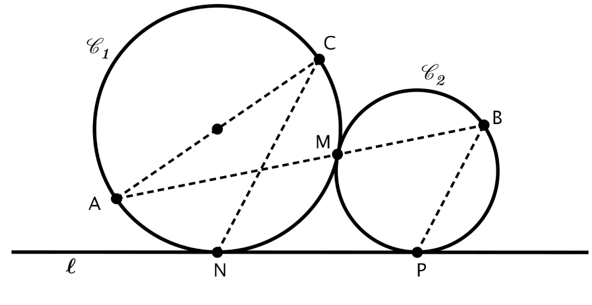
Q e R. Suponha que P não está na faixa limitada por ℓ e m. Mostre que P, Q, R são colineares (figura acima). (*Sugestão:* Considere uma homotetia H de centro P tal que $H(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.)



Ex 9-9 Suponha que as circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são tangentes externamente em M_1; que $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ são tangentes externamente em M_2; e que $\mathcal{C}_3$ e $\mathcal{C}_1$ são tangentes externamente em M_3. Sejam A_1 um ponto arbitrário de $\mathcal{C}_1$, A_2 a segunda intersecção da recta A_1M_1 com $\mathcal{C}_2$, A_3 a segunda intersecção de A_2M_2 com $\mathcal{C}_3$, e A_4 a segunda intersecção de A_3M_3 com $\mathcal{C}_1$. (Nota: quando, por exemplo, A_2 e M_2 coincidem, substitui-se A_2M_2 pela tangente a $\mathcal{C}_2$ em M_2, de modo que também $A_3 = M_2$.)

(a) Mostre que A_1 e A_4 são pontos diametralmente opostos de $\mathcal{C}_1$. (*Sugestão:* Considere homotetias H_1 tal que $H_1(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$, H_2 tal que $H_2(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_3$ e H_3 tal que $H_3(\mathcal{C}_3) = \mathcal{C}_1$.)

(b) Generalize (a) para um número ímpar arbitrário de circunferências. E o que acontece se o número de circunferências for par?



Ex 9-10 Suponha que as circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são tangentes externamente em M, e seja ℓ uma tangente comum a $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, tocando-as em dois pontos distintos N e P. Seja A um ponto arbitrário de $\mathcal{C}_1$, e seja B a segunda intersecção da recta AM com $\mathcal{C}_2$. Faça passar por N uma paralela a PB, e seja C a segunda intersecção desta recta com $\mathcal{C}_1$. Mostre que A e C são pontos diametralmente opostos de $\mathcal{C}_1$. (*Sugestão:* Considere as homotetias H_1 de centro M que transforma $\mathcal{C}_1$ em $\mathcal{C}_2$, e H_2 de centro na intersecção $O_1O_2 \cap \ell$ que transforma $\mathcal{C}_2$ em $\mathcal{C}_1$, e veja que $H_2 \circ H_1(A) = C$.)

Ex 9-11 Seja O um ponto de $\mathcal{E}$. Mostre que qualquer transformação de semelhança $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ é a composta $h \circ g$ de uma isometria g com uma homotetia h centro O.

Ex 9-12 Sejam $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma homotetia de centro O e razão λ ($\lambda \neq 0$) e $g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma isometria.

a) Mostre que $g^{-1} \circ f \circ g$ é ainda uma homotetia de razão λ. Qual é o seu centro?

b) Conclua que se tem $f \circ g = g \circ f$ se e só se for $g(O) = O$.

10 Geometria Analítica

Ex 10-1 Suponha fixado um sistema de eixos cartesianos que fica assim identificado com $\mathbb{R}^2$. Mostre que todas as transformações de semelhança plano são representadas por matrizes com uma das formas seguintes:

$$\begin{bmatrix} a & -b & c \\ b & a & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & -a & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ex 10-2 Fixado um sistema de eixos cartesianos, considere os pontos A e B de coordenadas $(1, 1)$ e $(-1, 1)$, respectivamente. Encontre as matrizes que representam as seguintes transformações:

(a) rotação de 30 graus (no sentido positivo) em torno do ponto A;

(b) reflexão em torno do eixo que passa por A e faz um ângulo orientado de 15 graus (no sentido positivo) com o vector de coordenadas $(1, 0)$;

(c) composição da homotetia de centro em A, e razão 2, com a rotação em (a);

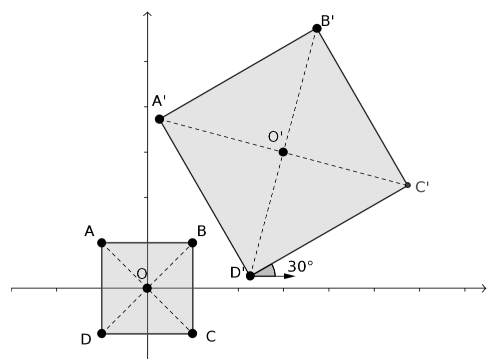
(d) composição da homotetia de centro em A, e razão 2, com a reflexão em (b);

(e) composição da reflexão em (b) com a rotação de 60 graus (no sentido positivo) em torno do ponto B;

(f) composição da rotação em (a) com a translação segundo o vector $\vec{v} = (1, 0)$;

(g) composição da translação segundo o vector $\vec{v} = (1, -1)$ com a reflexão em (b).

Para fixar ideias, $T_2 \circ T_1$ denota o que referimos como a composição de T_1 com T_2.



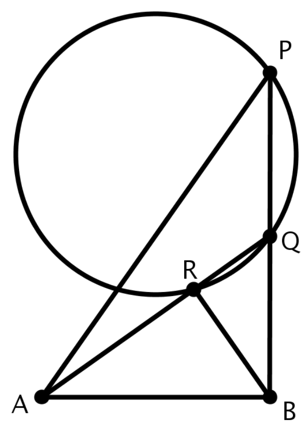
Ex 10-3 Considere os quadrados $ABCD$ e $A'B'C'D'$ da figura acima, o primeiro centrado na origem, com lados de comprimento 2 paralelos aos eixos, e o segundo centrado no ponto O' de coordenadas $(3, 3)$, e com lados de comprimento 4 fazendo ângulos de 30 graus com os eixos coordenados.

(a) Descreva uma transformação de semelhança T tal que $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, $C' = T(C)$ e $D' = T(D)$.

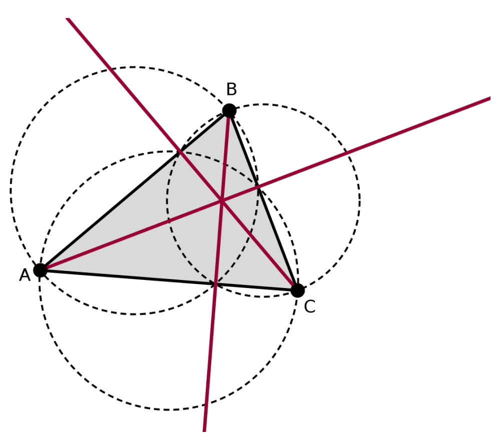
(b) Encontre uma expressão para as coordenadas do ponto imagem $P' = T(P)$ em função das coordenadas (x, y) de P.

11 Inversões

Ex 11-1 Sejam $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ circunferências não concêntricas, e sejam $A_1, B_1 \in \mathcal{C}_1$, $A_2, B_2 \in \mathcal{C}_2$ quatro pontos distintos tais que as duas rectas A_1A_2 e B_1B_2 são tangentes a ambas as circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$. Mostre que $[\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2]$ passa pelos pontos médios de $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$. (*Sugestão:* Considere as circunferências de diâmetros $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$.)



Ex 11-2 Sejam $\Delta PAB \sim \Delta AQB \sim \Delta ABR \sim \Delta P'BA \sim \Delta BQ'A \sim \Delta BAR'$ seis triângulos semelhantes, todos do mesmo lado da sua aresta comum $\overline{AB}$. (Três desses triângulos aparecem na figura acima; os restantes são a imagem destes pela reflexão na mediatriz de $\overline{AB}$.) Mostre que os seis vértices P, Q, R, P', Q', R' pertencem todos à mesma circunferência. (*Sugestão:* Compare as potências de A e de B relativamente à circunferência $\mathcal{C} = PQR$. Deduza que o centro de $\mathcal{C}$ está na mediatriz de $\overline{AB}$.)



Ex 11-3 Dado um triângulo ΔABC, mostre que as três 'alturas' do triângulo, i.e., as perpendiculares por cada um dos vértices ao lado oposto do triângulo, intersectam-se num ponto (que se diz o *ortocentro* do triângulo. (Sugestão: Considere as circunferências cujos diâmetros são os lados do triângulo, e mostre que elas se cruzam em pontos das alturas do triângulo. Justifique que as alturas são os eixos radicais dos pares possíveis dessas três circunferências.)

Ex 11-4

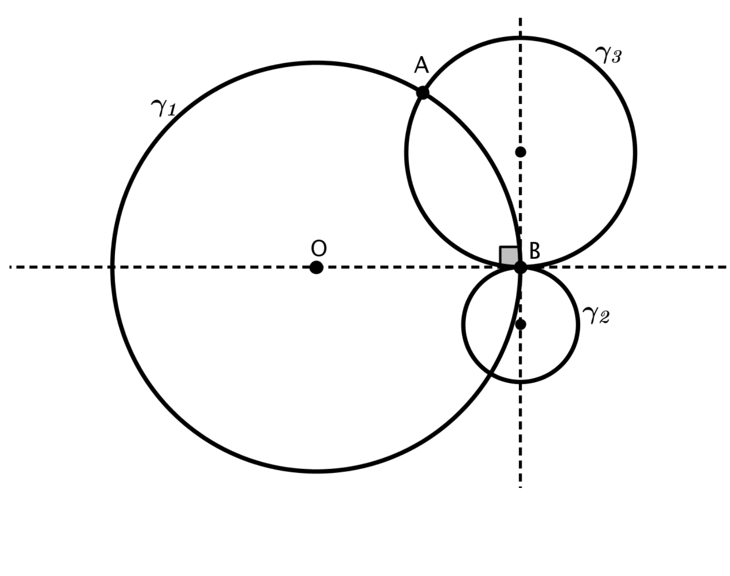
(a) Mostre que as seguintes afirmações acerca dum triângulo ΔABC são equivalentes:

(i) Existem circunferências $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ com centros em A, B e C, respectivamente, e que são ortogonais duas a duas.

(ii) ΔABC é acutângulo (i.e., os seus três ângulos são agudos).

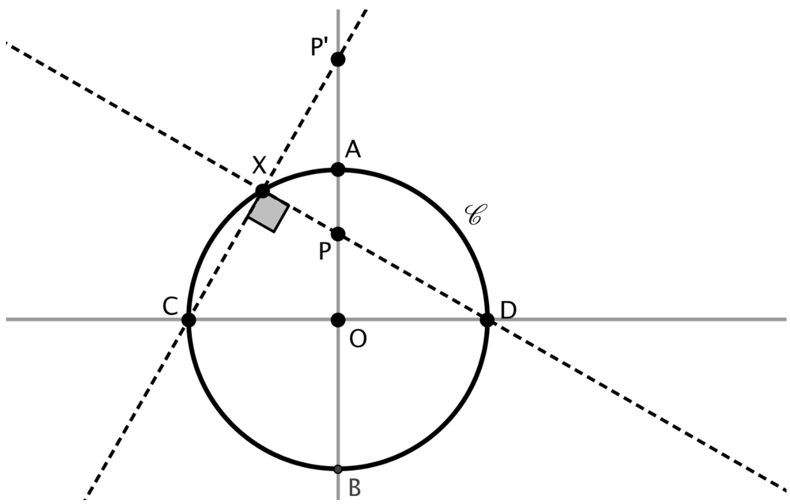
(Sugestão: Para (i) $\Rightarrow$ (ii), justifique que $A \in [\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3]$, $B \in [\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3]$ e $C \in [\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2]$, e que estes três eixos radicais intersectam perpendicularmente os lados do triângulo ΔABC. Para (ii) $\Rightarrow$ (i), construa as três alturas do triângulo, e as três circunferências cujos diâmetros são os lados de ΔABC.)

b) Supondo que ΔABC é acutângulo, diga como construir com régua e compasso as circunferências $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ mencionadas na alínea anterior.

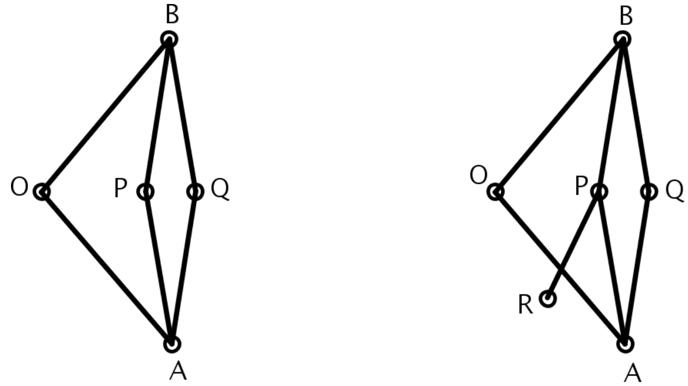


Ex 11-5 Esboce a transformada da figura formada pelas três circunferências representadas acima por uma inversão de pólo: (i) A; (ii) B; (iii) O.

Ex 11-6 Para que pólos de inversão os (prolongamentos dos) lados de um dado triângulo são transformados em três circunferências congruentes?



Ex 11-7 Sejam P e P' os pontos onde as rectas unindo um dado ponto X de uma circunferência às extremidades de um diâmetro intersectam o diâmetro perpendicular. Veja a figura acima. Mostre que P e P' são inversos um do outro. Deduza daí uma nova construção do inverso de um ponto dado. (*Sugestão:* Compare os triângulos $\Delta COP'$ e ΔPOD.)



Ex 11-8

(a) A primeira figura em cima representa um sistema de barras rígidas coplanares, articuladas nos pontos O, A, B, P, Q, e em que as barras $\overline{AP}$, $\overline{PB}$, $\overline{BQ}$ e $\overline{QA}$ têm igual comprimento, e também $\overline{OA} \simeq \overline{OB}$. Suponha que O é fixo e os outros pontos são móveis. Mostre que, se o ponto P percorrer uma dada figura γ, então Q percorre a inversa de γ relativamente a uma certa circunferência de centro O. (*Sugestão:* Sendo $r_1 = |OA| = |OB|$ e $r_2 = |AP| = |AQ| = |BP| = |BQ|$, relacione $OP \cdot OQ$ com a circunferência de centro B e raio r_2.)

b) Suponha agora que à primeira figura se acrescenta uma nova barra $\overline{PR}$, sendo $\overline{PR} \simeq \overline{RO}$, e que o novo "pivot" R é também fixo. (Nesta segunda figura há assim dois pivots fixos, O e R.) Mostre que Q descreve um segmento de uma recta perpendicular a OR. (*Sugestão:* Veja que Q descreve um arco de circunferência de centro R e raio $|RO|$.)

Nos dois próximos exercícios mostramos que qualquer construção que possa ser levada a cabo com régua e compasso pode também sê-lo só com compasso (apenas, é claro, não podemos traçar rectas, e por isso consideramos construída uma recta da qual conheçamos dois pontos).

Ex 11-9

a) Considere uma circunferência $\mathcal{C}$ de centro O e raio r, e um ponto P tal que $|OP| > r/2$. Justifique a seguinte construção, usando apenas compasso, do inverso P' de P relativamente a $\mathcal{C}$: sejam A e B os pontos de intersecção com $\mathcal{C}$ da circunferência de centro P que passa por O; então P' é o segundo ponto de intersecção (diferente de O) das circunferências de centros A e B e raio r.

b) Dados O e P, dê um processo só com compasso para construir o ponto Q da semirecta $\dot{O}P$ tal que $OQ = 2\,OP$. Deduza daí uma construção, ainda só com compasso, do inverso relativamente a $\mathcal{C}$ de qualquer ponto $P \neq O$.

Ex 11-10 Dados pontos A, B, C, D no plano, determine, usando apenas compasso:

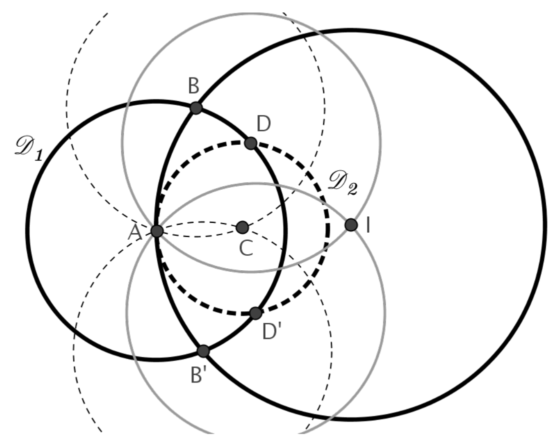
(a) O ponto médio de $\overline{AB}$;

(b) A projecção ortogonal de C na recta AB (*Sugestão:* comece por construir o simetrico de C relativamente a AB);

(c) A imagem da recta AB por inversão numa dada circunferência $\mathcal{C}$;

(d) O ponto de intersecção das rectas AB e CD;

(e) O ponto de intersecção de AB com uma dada circunferência $\mathcal{C}$.



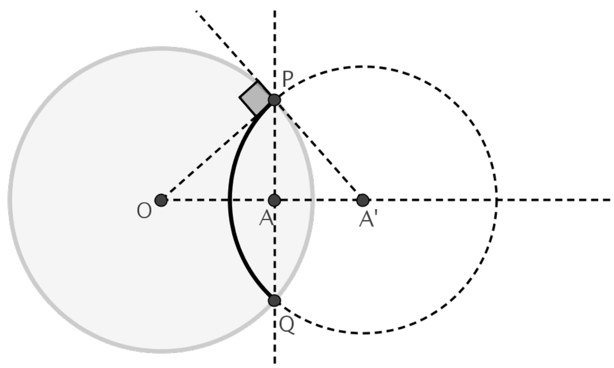
Ex 11-11 Este exercício descreve uma construção, só com compasso, do centro de uma circunferência dada $\mathcal{C}$. Marque uma circunferência $\mathcal{D}_1$ com centro num ponto A de $\mathcal{C}$ e intersectando $\mathcal{C}$ nos pontos B e B'. As circunferências de centros B e B' que passam por A intersectam-se num segundo ponto C. Com centro em C, marque a circunferência $\mathcal{D}_2$ que passa por A. As circunferências $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ intersectam-se em dois pontos D e D', e as circunferências com centros em D e D' que passam por A intersectam-se num segundo ponto I. Mostre que I é o centro de $\mathcal{C}$. (Sugestão. Use o exercício 11-9 para mostrar que C e I são inversos um do outro relativamente a $\mathcal{D}_1$.)

12 O Disco de Poincaré

Nos exercícios que seguem $\mathcal{H}$ designará o Disco de Poincaré, O e r respectivamente o seu centro e raio, e $\mathcal{D}$ a circunferência que o delimita. Nas construções pedidas pode usar: um *compasso*, uma *régua*, e a operação de *inversão* em torno duma circunferência dada.

Ex 12-1 Dados dois "pontos" $P, Q \in \mathcal{H}$, construa a "recta" PQ.

Ex 12-2 Dado um ponto $P \in \mathrm{Ext}(\mathcal{D})$, mostre que há uma única circunferência de centro P que é ortogonal a $\mathcal{D}$. Descreva uma construção desta circunferência. (Sugestão: Comece por traçar uma circunferência de diâmetro $\overline{OP}$.)

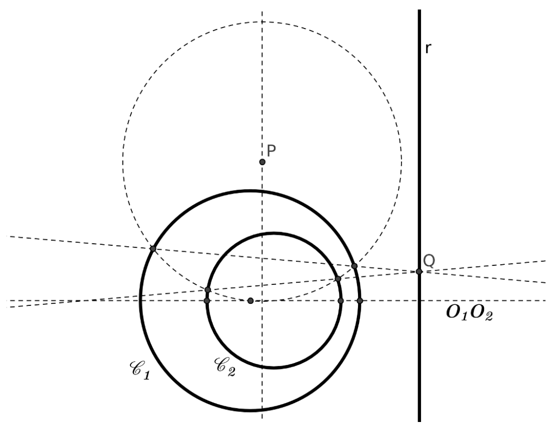


Ex 12-3 Dado um "ponto" $A \in \mathcal{H}$ seja A' o inverso de A relativamente a $\mathcal{D}$, e P um ponto de intersecção da circunferência $\mathcal{D}$ com a perpendicular à recta OA no ponto A. Mostre que:

(a) $\Delta OPA'$ é um triângulo rectângulo em P.
(Sugestão: veja que $\Delta POA' \sim \Delta AOP$.)

(b) O é a imagem de A pela inversão em torno da circunferência $\mathcal{C}$ de centro A' que passa por P. (Sugestão: basta mostrar que $A'A \cdot A'O = |PA'|^2$.)

(c) Descreva uma construção para determinar a "reflexão" que transforma um ponto A dado na origem O do Disco de Poincaré.



Ex 12-4 Dadas duas circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, de centros O_1 e O_2, respectivamente, não concêntricas, e que não se intersectam, considere a construção seguinte:

(1) escolha um ponto P fora da recta O_1O_2, exterior a $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, e equidistante de O_1 e O_2;

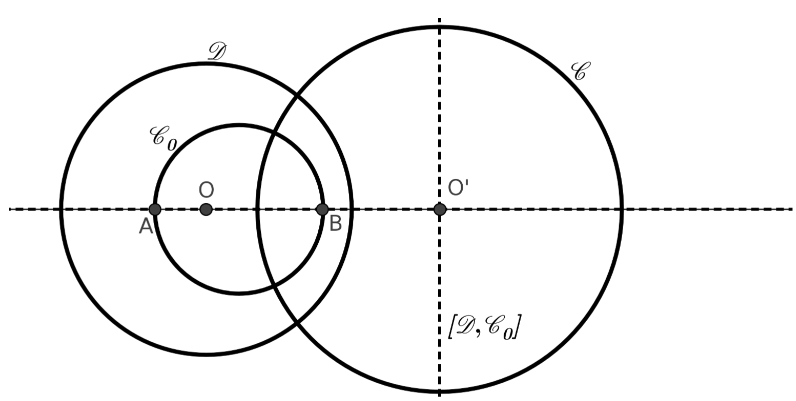
(2) Trace a circunferência $\mathcal{C}$ de centro P que passa pelos centros O_1 e O_2;

(3) Trace as rectas que unem os pares de pontos em que $\mathcal{C}$ corta $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$;

(4) Marque o ponto Q de intersecção das duas rectas anteriores;

(5) Trace a perpendicular r a O_1O_2 pelo ponto Q.

Mostre que a recta construída é o eixo radical de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, i.e., $r = [\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2]$.
(Sugestão: Foi demonstrado na teórica que $[\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2]$ é uma recta perpendicular a O_1O_2.)



Ex 12-5 Dados dois "pontos" $A, B \in \mathcal{H}$ sobre um diâmetro de $\mathcal{D}$, considere a seguinte construção da circunferência $\mathcal{C}$:

(1) Trace a circunferência $\mathcal{C}_0$ de diâmetro $\overline{AB}$;

(2) Trace o eixo radical $[\mathcal{D}, \mathcal{C}_0]$ (exercício 12-4), e marque o ponto de intersecção O' deste eixo com a recta AB;

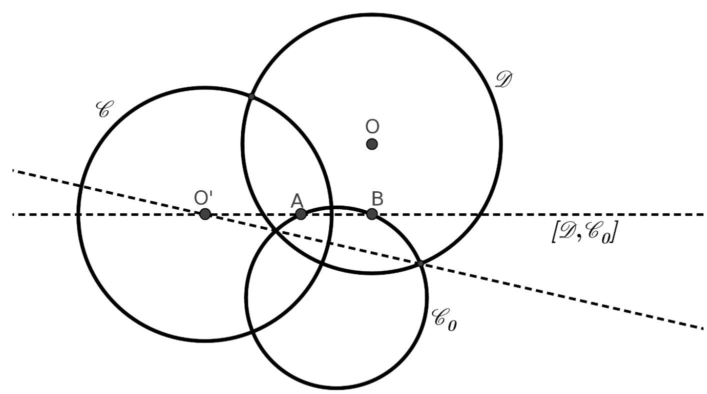
(3) Trace a circunferência $\mathcal{C}$ de centro O' perpendicular a $\mathcal{D}$ (exercício 12-2).

Mostre que:

(a) $\mathcal{C}$ é também ortogonal a $\mathcal{C}_0$. (Sugestão: O centro O' de $\mathcal{C}$ está em $[\mathcal{D}, \mathcal{C}_0]$.)

(b) A é a imagem de B pela inversão em torno de $\mathcal{C}$.

(c) Descreva uma construção da "recta" que define a "reflexão" que transforma A em B.



Ex 12-6 Dados dois "pontos" $A, B \in \mathcal{H}$ não colineares com O, e não equidistantes de O, considere a seguinte construção da circunferência $\mathcal{C}$:

(1) Trace a circunferência $\mathcal{C}_0$ que define a "recta" AB;

(2) Trace o eixo radical $[\mathcal{D}, \mathcal{C}_0]$, e marque o ponto de intersecção O' deste eixo com a recta AB;

(3) Trace a circunferência $\mathcal{C}$ de centro O' perpendicular a $\mathcal{D}$ (exercício 12-2).

Mostre que:

(a) $\mathcal{C}$ é também ortogonal a $\mathcal{C}_0$. (Sugestão: O centro O' de $\mathcal{C}$ está em $[\mathcal{D}, \mathcal{C}_0]$.)

(b) A é a imagem de B pela inversão em torno de $\mathcal{C}$.

(c) Descreva uma construção da "recta" que define a "reflexão" que transforma A em B.

Ex 12-7 Dados dois "pontos" $A, B \in \mathcal{H}$, construa a mediatriz e o ponto médio do "segmento" hiperbólico $\overline{AB}$. (Sugestão:

(a) Se A e B estão sobre um diâmetro de $\mathcal{D}$, aplique o exercício 12-5;

(b) Se A e B não são colineares com O, e não são equidistantes de O, aplique o exercício 12-6;

(c) Se A e B não são colineares com O, mas são equidistantes de O, veja que a mediatriz Euclideana de $\overline{AB}$ determina uma "reflexão" que transforma A em B.)

Ex 12-8 Dados um "ponto" $P \in \mathcal{H}$ e uma "recta" $\ell \subset \mathcal{H}$, não incidente com O, considere a seguinte construção da "recta" perpendicular a ℓ por P. Supõem-se $P \neq O$.

(1) Trace a circunferência $\mathcal{C}_0$ que define a "recta" ℓ;

(2) Marque o inverso P' de P relativamente a $\mathcal{D}$;

(3) Trace o eixo radical $[\mathcal{D}, \mathcal{C}_0]$;

(4) Marque o ponto de intersecção O' do eixo radical com a mediatriz de $\overline{PP'}$;

(5) Trace a circunferência $\mathcal{C}$ de centro O' que passa por P.

Mostre que:

(a) $\mathcal{C}$ é ortogonal a $\mathcal{D}$ e a $\mathcal{C}_0$.
(Sugestão: $P, P' \in \mathcal{C}$, e o centro O' de $\mathcal{C}$ está em $[\mathcal{D}, \mathcal{C}_0]$.)

(b) $\mathcal{C}$ determina uma "recta" que passa por P e é perpendicular a ℓ.

(c) Descreva uma construção da "recta" perpendicular no caso em que $P = O$.

Ex 12-9 Dados um "ponto" $P \in \mathcal{H}$ e uma "recta" $\ell \subset \mathcal{H}$ que seja um diâmetro de $\mathcal{D}$, considere a seguinte construção da "recta" perpendicular a ℓ por P. Supõem-se $P \neq O$.

(1) Marque o inverso P' de P relativamente a $\mathcal{D}$;

(2) Marque o ponto de intersecção O' da recta AB com a mediatriz de $\overline{PP'}$;

(3) Trace a circunferência $\mathcal{C}$ de centro O' que passa por P.

Mostre que:

(a) $\mathcal{C}$ é ortogonal a $\mathcal{D}$ e a AB.
(Sugestão: $P, P' \in \mathcal{C}$, e o centro O' de $\mathcal{C}$ está em AB.)

(b) $\mathcal{C}$ determina uma "recta" que passa por P e é perpendicular a ℓ.

(c) Descreva uma construção da "recta" perpendicular no caso em que $P = O$.

Ex 12-10

(a) Mostre que, em abstracto, as "reflexões" em $\mathcal{H}$ se podem definir como no plano euclideano: dados uma "recta" ℓ e um "ponto" $P \in \mathcal{H}$, seja Q a intersecção com ℓ da "recta" m ortogonal a ℓ que passa por P; então a imagem de P pela "reflexão" em ℓ é o ponto P' de m tal que $d(P', Q) = d(P, Q)$ e Q é intermédio a P e P'.

(b) Conclúa que, para dois quaisquer pontos distintos de $\mathcal{H}$, existe uma (única) "reflexão" que transforma um no outro.

Ex 12-11 Dado $P \in \mathcal{H}$, construa a "circunferência" de centro P e raio ρ, mostrando tratar-se duma "circunferência" Euclideana com centro e raio diferentes. (*Sugestão*: Obtenha a seguinte fórmula para a distância hiperbólica ao ponto O: $d(O, X) = \log\left(\frac{r+|OX|}{r-|OX|}\right)$. Mostre que a "circunferência" de centro O e raio ρ é uma circunferência Euclideana com o mesmo centro e raio a determinar. Construa a "circunferência" de centro P e raio ρ como a imagem desta "circunferência" centrada em O pela "reflexão" que transforma O em P.)

Ex 12-12 Dada uma circunferência Euclideana $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$, da qual se conhece o seu centro e raio Euclideanos, ache o seu "centro" e "raio" hiperbólicos.
(*Sugestão*: Suponha que $\mathcal{C}$ tem centro P_0 e raio r_0 (Euclideanos). Considere os pontos A e B de intersecção da recta OP_0 com a circunferência $\mathcal{C}$, e construa o ponto médio M do "segmento" $\overline{AB}$. Veja os exercícios 12-5 e 12-7. Mostre que $\mathcal{C}$ é uma "circunferência" hiperbólica de centro M. Obtenha a seguinte fórmula para o raio hiperbólico de $\mathcal{C}$:

$$\text{raio de } \mathcal{C} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{r + r_0 - |OP_0|}{r - r_0 + |OP_0|} \cdot \frac{r + r_0 + |OP_0|}{r - r_0 - |OP_0|} \right) . \quad)$$

Ex 12-13 Sejam ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 "rectas" paralelas duas a duas. É ou não verdade que, em qualquer caso, duas delas ficam em lados opostos da terceira?