Teoria da Medida (1ª e 2ª aulas)

Pedro Duarte

Outubro 2020

Axiomática de Kolmogorov da Teoria das Probabilidades

Chama-se **espaço de probabilidade** a um triplo $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ onde

- Ω é um conjunto, dito o **espaço de resultados**,
- $\mathcal{E}$ é uma classe de subconjuntos de Ω, chamados **eventos**, ou **acontecimentos**,
- $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to [0, 1]$ é a função que a cada evento $E \in \mathcal{E}$ associa a sua **probabilidade** $\mathbb{P}(E) \in [0, 1]$.

Os **Axiomas de Kolmogorov** são:

1. **Probabilidade do evento impossível**: $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
2. **Probabilidade do evento certo**: $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
3. **Monotonia**: Se $A, B \in \mathcal{E}$ com $A \subseteq B$ então $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$,
4. **Aditividade**: Se $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{E}$, com $A_i \cap A_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$, então $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \cdots$.

Espaço de Resultados: Exemplo 1

Considere a **experiência aleatória** que consiste em três lançamentos consecutivos duma moeda ao ar.

Convencionamos que $0 = \text{Cara} \quad \text{e} \quad 1 = \text{Coroa}$.

O resultado de cada triplo lançamento é um elemento do **espaço de resultados**

$$\begin{aligned}\Omega = \{0,1\}^3 = \{&(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),\\ &(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\,\}\end{aligned}$$

Espaço de Eventos: Exemplo 1

Um **acontecimento** ou **evento** como

1. 'três coroas' $\{(1,1,1)\}$
2. 'duas caras' $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
3. 'faces alternadas' $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$

é qualquer subconjunto $E \subset \Omega$ do espaço de acontecimentos Ω.

Podemos tomar $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ como **espaço de eventos**.

Medida de Probabilidade: Exemplo 1

Supondo que a moeda não é viciada e que os lançamentos são **independentes**. Todos os acontecimentos singulares (formados por um único resultado) são **equiprováveis**.

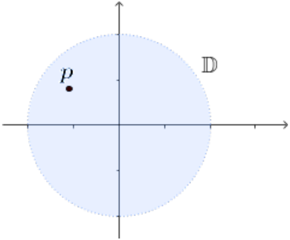
Neste caso a medida de probabilidade é a função $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\# E}{8} \ .$$

$\left(\{0,1\}^3, \mathcal{P}(\{0,1\}^3), \mathbb{P}\right)$ é um **espaço de probabilidade**.

Espaço de Eventos: Exemplo 2

Considere a **experiência aleatória** que consiste em escolher um ponto p no disco unitário $\mathbb{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$.



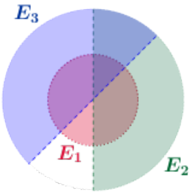
O espaço de resultados é o disco $\Omega = \mathbb{D}$.

Espaço de Resultados: Exemplo 2

Um **acontecimento** ou **evento** como

1. E_1 'a distância à origem $< \frac{1}{2}$'
2. E_2 'a abcissa é positiva'
3. E_3 'a abcissa é menor que a ordenada'

é um subconjunto mensurável do disco $E \subset \mathbb{D}$.



O **espaço de eventos** $\mathcal{E}$ é a classe de todos os subconjuntos mensuráveis $E \subset \mathbb{D}$.

Medida de Probabilidade: Exemplo 2

Supondo que todos os pontos em $\Omega = \mathbb{D}$ são **equiprováveis** a medida de probabilidade é a função $\mathbb{P} : \mathcal{E} \to [0,1]$

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{Área}(E)}{\pi}.$$

$(\mathbb{D}, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ é um **espaço de probabilidade**.

A Teoria da Medida

As propriedades de **monotonia** e **aditividade** das medidas de **probabilidade** são partilhadas por diversas medidas usadas na Matemática e na Física como o **comprimento**, a **área**, o **volume** ou a **massa**.

A **Teoria da Medida** estuda as funções de conjunto com estas propriedades, genericamente chamadas de **medidas**.

As bases da Teoria da Medida foram establecidas no fim do século XIX, início do século XX, entre outros pelos matemáticos franceses Émil Borel e Henri Lebesgue.

σ-Álgebras

Seja X um conjunto.

Chama-se **σ-álgebra de X** a uma classe $\mathcal{F}$ de partes de X tal que

1. $\emptyset, X \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; X \setminus A \in \mathcal{F}$,
3. $A_n \in \mathcal{F}$ para $n = 1, 2, \ldots \;\Rightarrow\; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Proposição *Seja $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra de partes de X.*
$A_n \in \mathcal{F}$ *para* $n = 1, 2, \ldots \;\Rightarrow\; \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Prova.

$$X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} X \setminus A_n$$ □

Exemplos de σ-Álgebras

São σ-álgebras:

1. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$,
2. $\mathcal{F} = \{\emptyset, X\}$,
3. $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, X \setminus A, X\}$ onde $A \subseteq X$.

Intersecções de σ-Álgebras

Proposição *Sejam* $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ *σ-álgebras de partes de* X. *Então* $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ *é uma σ-álgebra de partes de* X.

Seja $\mathcal{C} = \{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \ldots\}$ uma colecção de σ-álgebras de partes de X. Define-se a **interseção** desta família como

$$\cap_{\mathcal{F}\in\mathcal{C}}\mathcal{F} = \{\, A \subseteq X \;:\; A \in \mathcal{F}, \quad \text{para todo } \; \mathcal{F} \in \mathcal{C} \,\} \,.$$

Proposição *Dada uma colecção* $\mathcal{C} = \{\mathcal{F}, \mathcal{G}, \ldots\}$ *de σ-álgebras de partes de* X, $\cap_{\mathcal{F}\in\mathcal{C}}\mathcal{F}$ *é uma σ-álgebra de partes de* X.

σ-Álgebras Geradas

Seja $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ uma classe de partes de X.

A **σ-álgebra gerada por** $\mathcal{A}$ é

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{F} \supseteq \mathcal{A}} \{\, \mathcal{F} \,:\, \mathcal{F} \text{ é uma } \sigma\text{-álgebra} \;\}$$

Proposição $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{A})$ *se e sómente se*

1. $\mathcal{G}$ *é uma σ-álgebra tal que* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}$,
2. $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ *para toda a σ-álgebra* $\mathcal{F}$ *tal que* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$.

Exemplos de σ-Álgebras Geradas

1. Dado $\emptyset \neq A \subset X$, se $\mathcal{A} = \{A\}$ então
$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\emptyset, A, X \setminus A, X\},$$

2. Dados $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$
$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

Partições

Chama-se **partição** de X a uma família $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de subconjuntos de X tal que

1. $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$,
2. $X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

Exemplos de partições de $\{1, 2, 3, 4\}$:

1. $\{\{1\}, \{4\}, \{2, 3\}\}$,
2. $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$.

σ-Álgebra Gerada por uma Partição Finita

Proposição *Dada uma partição finita $\mathcal{P} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ de X, a σ-álgebra gerada por $\mathcal{P}$ é formada pelas 2^n uniões*

$$\cup_{i \in I} A_i \quad com \quad I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \ .$$

$\mathcal{P} = \{A_1, A_2, A_3\}$ com $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b\}$ e $A_3 = \{c, d\}$ é uma partição de $X = \{a, b, c, d\}$.

I	$\cup_{i\in I} A_i$		I	$\cup_{i\in I} A_i$
$\emptyset$	$\emptyset$		$\{1\}$	$\{a\}$
$\{2\}$	$\{b\}$		$\{3\}$	$\{c, d\}$
$\{1, 2\}$	$\{a, b\}$		$\{1, 3\}$	$\{a, c, d\}$
$\{2, 3\}$	$\{b, c, d\}$		$\{1, 2, 3\}$	$\{a, b, c, d\}$

σ-Álgebra Gerada por uma Partição Finita

Chama-se **átomo** duma σ-álgebra $\mathcal{F}$ a um elemento $A \in \mathcal{F}$ tal que para todo $B \in \mathcal{F}$, se $B \subseteq A$ então $B = \emptyset$ ou $B = A$.

Proposição *Seja $\mathcal{F}$ uma σ-álgebra finita num conjunto X. Então o conjunto $\mathcal{P}$ dos átomos de $\mathcal{F}$ é uma partição de X tal que $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{P})$. Além disso, $\#(\mathcal{F}) = 2^n$ onde $n = \#(\mathcal{P})$.*

σ-Álgebra Gerada por uma Partição Infinita

Proposição *Dada uma partição $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ de X, a σ-álgebra gerada por $\mathcal{P}$ é formada pelas uniões*

$$\cup_{i \in I} A_i \quad \textit{com} \quad I \subseteq \mathbb{N} \, .$$

$\mathcal{P} = \{\, \{0\}, \,]\frac{1}{2}, 1], \,]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}], \,]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}], \,]\frac{1}{5}, \frac{1}{4}], \, \ldots \,\}$ é uma partição de $[0, 1]$

Exemplos de elementos de $\sigma(\mathcal{P})$:

$\{3, 4, 5\} \mapsto]\frac{1}{5}, \frac{1}{2}]$, $\qquad \{1, 2, 6, 7, 8, \ldots\} \mapsto [0, \frac{1}{5}] \cup]\frac{1}{2}, 1]$

$\{3, 5, 7, \ldots\} \mapsto]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}] \cup]\frac{1}{5}, \frac{1}{4}] \cup]\frac{1}{7}, \frac{1}{6}] \cup \ldots$

σ-Álgebra dos Borelianos

Chama-se σ-**álgebra dos borelianos** de $\mathbb{R}^n$ à σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ gerada pelos conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$.

1. Abertos (uniões numeráveis de bolas abertas)
2. Fechados (complementares dos abertos)
3. G-deltas (intersecções numeráveis de abertos)
4. F-sigmas (uniões numeráveis de fechados)

$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$

Definição de Medida

Seja $(X, \mathcal{F})$ um espaço mensurável.

Uma função $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ diz-se uma **medida** $\Leftrightarrow$

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, quaisquer que sejam $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$ com $A_i \cap A_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$.

O triplo ordenado $(X, \mathcal{F}, \mu)$ diz-se então um **espaço de medida**.

Medidas Finitas e σ-Finitas

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida.

μ diz-se uma **medida de probabilidade** $\Leftrightarrow$ $\mu(X) = 1$.

Se μ for uma medida de probabilidade,
$(X, \mathcal{F}, \mu)$ diz-se um **espaço de probabilidade**.

μ diz-se **finita** $\Leftrightarrow$ $\mu(X) < +\infty$.

μ diz-se σ-**finita** $\Leftrightarrow$ existir uma sucessão de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F}$ tal que

1. $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$,
2. $\mu(A_n) < +\infty$, para cada $n = 1, 2, \ldots$.

Exemplos de Medidas

(1) Seja X um conjunto $p \in X$. Define-se $\mu_p : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}$,

$$\mu_p(A) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad p \in A \\ 0 & \text{se} \quad p \notin A \end{cases}$$

μ_p é uma medida, chamada a **medida de Dirac** no ponto p.

Exemplos de Medidas

(2) Seja $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ um conjunto numerável, $\{p_x\}_{x \in X}$ uma família de números reais $p_x \geq 0$.

Define-se $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$, $\mu(A) = \sum_{x \in A} p_x$.
μ é uma **medida σ-finita** no espaço mensurável $(X, \mathcal{P}(X))$.

Exemplos de Medidas

(3) Se $\sum_{x \in X} p_x = 1$ então μ é uma **medida de probabilidade**.

(4) Se $p_x = 1$ para todo $x \in X$ então

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A & \text{se} \quad A \ \text{finito} \\ +\infty & \text{se} \quad A \ \text{infinito} \end{cases}$$

diz-se a **medida de contagem** em X.

A Medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^d$

Existe uma única medida $m : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ tal que dados $a_j < b_j$, $j = 1, \ldots, d$,

$$m([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d]) = \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j) \, .$$

Esta medida em $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right)$ diz-se a **medida de Lebesgue**.

A medida de Lebesgue é σ-**finita** pois

1. $\mathbb{R}^d = \cup_{n=1}^{\infty} [-n, n]^d$,
2. $m([-n, n]^d) = (2n)^d < +\infty$, para cada $n = 1, 2, \ldots$.

Monotonia e Subaditividade

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida.

Monotonia *Dados $A, B \in \mathcal{F}$,*

$$A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leq \mu(B) \quad e$$

$$\mu(B) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

Subaditividade *Dados $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F}$,*

$$\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Continuidade

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida,
$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{F}$.

Continuidade Superior *Se* $A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \cdots$
então $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Continuidade Inferior *Se* $A_1 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \cdots$
e $\mu(A_1) < +\infty$ *então* $\mu(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Critério para a Igualdade de duas Medidas

Seja $(X, \mathcal{F})$ um espaço mensurável,
μ_1 e μ_2 medidas finitas em $(X, \mathcal{F})$.

Teorema *Seja $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ uma classe de conjuntos tal que*

- $X \in \mathcal{A}$,
- *$\mathcal{A}$ é fechada para as intersecções numeráveis,*
- $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$.

Se $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$ então $\mu_1 = \mu_2$.

Independência Estocástica

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de probabilidade.

Uma família $\{A_i\}_{i \in I}$ de eventos $A_i \in \mathcal{F}$ diz-se **independente** se para quaisquer índices $i_1, \ldots, i_n \in I$ distintos dois a dois,

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_n}).$$

Exercício Mostre que se dois eventos $(A, B) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ são independentes então são também independentes os pares de eventos $(A, X \setminus B)$, $(X \setminus A, B)$ e $(X \setminus A, X \setminus B)$.

Generalize este resultado a n eventos independentes.

Teoria da Medida (3ª e 4ª aulas)

Pedro Duarte

Outubro 2020

Problema dos Pontos

Como dividir as apostas num jogo inacabado de forma justa ?

Pont. A	Jogador A	Jogador B	Pont. B
1	⚅	⚃	0
0	⚁	⚄	1
1	⚄	⚂	0

Problema dos Pontos

A solução proposta por Blaise Pascal no século XVII usa o conceito moderno de **esperança** ou **valor esperado** duma **variável aleatória**.

$$X_A = \text{ dividendos do jogador A no fim do jogo}$$
$$X_B = \text{ dividendos do jogador B no fim do jogo}$$

$$\mathbb{E}(X_A) = 20 \cdot \mathbb{P}(\text{A ganha}) + 10 \cdot \mathbb{P}(\text{Empate}) + 0 \cdot \mathbb{P}(\text{A perde})$$
$$\mathbb{E}(X_B) = 0 \cdot \mathbb{P}(\text{A ganha}) + 10 \cdot \mathbb{P}(\text{Empate}) + 20 \cdot \mathbb{P}(\text{A perde})$$

Variáveis Aleatórias

Seja $(X, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade.

Uma **variável aleatória** no espaço $(X, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é uma função $f : X \to Y$ com valores num espaço mensurável $(Y, \mathcal{G})$ tal que para todo $A \in \mathcal{G}$,

$$[f \in A] := \{x \in X \colon f(x) \in A\} \in \mathcal{F}$$

de forma que faça sentido falar na probabilidade $\mathbb{P}[f \in A]$.

Pré-Imagens

Dada uma aplicação $f : X \to Y$ e um conjunto $B \subseteq Y$ define-se

$$f^{-1}(B) = \{\, x \in X \,:\, f(x) \in B \,\} \,.$$

Dados $A, A_1, A_2, \ldots \subseteq Y$,

(a) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(Y) = X$,

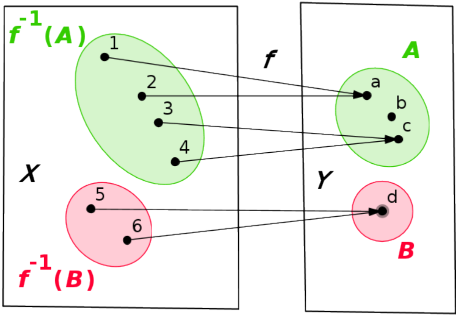
(b) $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$,

(c) $f^{-1}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots) = f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2) \cap \ldots$,

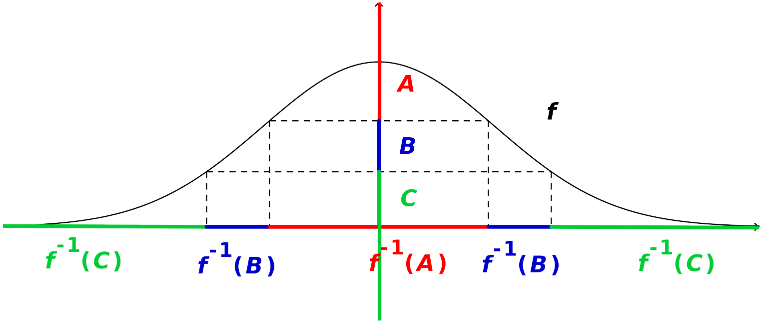
(d) $f^{-1}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) \cup \ldots$.

Pré-Imagem duma Partição

Proposição *Dada uma aplicação* $f : X \to Y$,
se $\mathcal{P} = \{B_1, B_2, \dots\}$ *for uma partição de* Y *então*
$\mathcal{P}' = \{f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2), \dots\}$ *é uma partição de* X.



Pré-Imagem duma Partição - Exemplo



Função Indicatriz dum Conjunto

Seja X um conjunto e $A \subseteq X$ um seu subconjunto.

Chama-se **função indicatriz de** A à função $\mathbb{I}_A : X \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in A \\ 0 & \text{se} \quad x \notin A \end{cases}$$

Propriedades *Dados subconjuntos* $A, B \in \mathcal{P}(X)$,

1. $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{I}_A \leq \mathbb{I}_B$,
2. $\mathbb{I}_{A\cap B} = \mathbb{I}_A \, \mathbb{I}_B$,
3. $\mathbb{I}_{A\cup B} = \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - \mathbb{I}_A \, \mathbb{I}_B$,
4. $A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \mathbb{I}_{A\cup B} = \mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B$.

σ-álgebra gerada por uma função

Dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$ define-se

$$\sigma(f) = \{\, A \subseteq X \;:\; A = f^{-1}(B) \;\text{ com }\; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \,\}$$

Proposição *Dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$,*
$\sigma(f)$ é uma σ-álgebra de partes de X.

$\sigma(f)$ diz-se a **σ-álgebra gerada** pela função f.

Exemplos de σ-álgebras geradas por funções

(1) Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função constante, $f(x) = c$ para $x \in X$,

$$\sigma(f) = \{\emptyset, X\} \ .$$

(2) Dado $A \subseteq X$,

$$\sigma(\mathbb{I}_A) = \{\emptyset, A, X \setminus A, X\} \ .$$

(3) Dada uma partição $\mathcal{P} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ de X, e $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $\ f(x) = a_i \ $ se $x \in A_i$, para cada $i = 1, \ldots, n$,

$$f = a_1 \, \mathbb{I}_{A_1} + \cdots + a_n \, \mathbb{I}_{A_n} \quad \text{e} \quad \sigma(f) = \sigma(\mathcal{P}) \ .$$

Funções Mensuráveis

Sejam $(X, \mathcal{F})$ e $(Y, \mathcal{G})$ espaços mensuráveis.
Uma função $f : X \to Y$ diz-se $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$-**mensurável** $\Leftrightarrow$

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \text{ para todo } B \in \mathcal{G}.$$

1. Subentendendo $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, diremos simplesmente que
   $f : X \to Y$ é **mensurável**.
2. $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se $\mathcal{F}$-**mensurável** $\Leftrightarrow$
   f é $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mensurável.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se **Borel-mensurável** $\Leftrightarrow$
   f é $(\mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mensurável.

σ-álgebra gerada por uma função mensurável

Proposição *$f : X \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{F}$-mensurável $\Leftrightarrow$ $\sigma(f) \subseteq \mathcal{F}$.*
$\sigma(f)$ é a menor σ-álgebra $\mathcal{F}$ relativamente à qual $f : X \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{F}$-mensurável.

σ-álgebra gerada por uma família de funções mensuráveis

Seja $\{(Y_i, \mathcal{G}_i)\}_{i\in I}$ uma família de espaços mensuráveis indexada num conjunto de índices I.

Seja $\{f_i : X \to Y_i\}_{i\in I}$ uma família de funções definidas em X.

Define-se a **σ-álgebra gerada pela família de funções** $\{f_i\}_{i\in I}$ como $\sigma(f_i : i \in I) = \sigma\left(\cup_{i\in I}\sigma(f_i)\right)$.

Proposição *A σ-álgebra $\sigma(f_i : i \in I)$ é a menor σ-álgebra de partes de X relativamente às quais todas as funções $f_i : X \to Y_i$ são $\mathcal{F}$-mensuráveis.*

Critérios de Mensurabilidade

Sejam $(X, \mathcal{F})$ e $(Y, \mathcal{G})$ espaços mensuráveis,
$\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$ tal que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{G}$.

Proposição *Dada $f : X \to Y$,*
f é $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$-mensurável $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(C) \in \mathcal{F}$, para todo $C \in \mathcal{C}$.

Corolário *Dada $f : X \to \mathbb{R}$,*

$$f \text{ é } \mathcal{F}\text{-mensurável} \Leftrightarrow f^{-1}(]-\infty, c[) \in \mathcal{F}, \text{ para todo } c \in \mathbb{R},$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(]-\infty, c]) \in \mathcal{F}, \text{ para todo } c \in \mathbb{R}.$$

Mensurabilidade relativa a uma Partição

Seja $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ uma partição de X.

Proposição *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é $\sigma(\mathcal{P})$-mensurável $\Leftrightarrow$ f é constante em cada um dos conjuntos $A_n \in \mathcal{P}$.*

Se f é $\sigma(\mathcal{P})$-mensurável podemos escrever $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, \mathbb{I}_{A_n}$.

Operações sobre funções Mensuráveis

Proposição *Toda a função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Borel-mensurável.*

Sejam $(X, \mathcal{F})$, $(Y, \mathcal{G})$ e $(Z, \mathcal{H})$ espaços mensuráveis.

Proposição *Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são mensuráveis então $g \circ f : X \to Z$ é mensurável.*

Proposição *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Então*

(a) *a função $c\,f$ é mensurável, para cada $c \in \mathbb{R}$,*

(b) *as funções $f + g$ e $f\,g$ são mensuráveis,*

(c) *se $g(x) \neq 0$, para todo $x \in X$, então a função $\frac{f}{g}$ é mensurável.*

Limites de funções Mensuráveis

Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ uma sucessão de funções.

Dizemos que f_n **converge pontualmente para** $f \quad \Leftrightarrow$
$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, para todo $x \in X$.

Escrevemos $f_n \to f$, ou $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, para exprimir que f_n converge pontualmente para f.

Proposição *Se para cada $n \in \mathbb{N}$ f_n for mensurável e $f_n \to f$ então f é mensurável.*

Propriedades Válidas Quase Sempre

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida.

Seja $\mathrm{P}(x)$ uma propriedade nos pontos $x \in X$.

Dizemos que $\mathrm{P}(x)$ é **válida** μ-**quase sempre**, abrev. μ-**q.s.**, se

$$\mu\{x \in X : \ \mathrm{P}(x) \text{ não é válida}\} = 0.$$

Subentende-se que $\{x \in X : \ \mathrm{P}(x) \text{ não é válida}\} \in \mathcal{F}$.

Convergência de funções Quase Sempre

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida.
Sejam $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ funções, $n \geq 1$.

Dizemos que f_n converge a f μ-**quase sempre**, abrev. $f_n \to f$ μ-q.s., $\Leftrightarrow$ existe $A \in \mathcal{F}$ com $\mu(A) = 0$ tal que

$$\forall\, x \in X \setminus A, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Proposição *Seja* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *um espaço de medida,* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n *é* $\mathcal{F}$*-mensurável e* $f_n \to f$ μ*-q.s.*

$$\Rightarrow \quad f \text{ é } \mathcal{F}\text{-mensurável.}$$

Esperança duma Variável Aleatória

Seja $(X, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade,
$f : X \to \mathbb{R}$ uma variável aleatória com seis valores $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Para cada $i = 1, 2, \ldots, 6$, considere os eventos $A_i = f^{-1}(\{i\}) \in \mathcal{F}$.

O **valor esperado** da variável aleatória f é a média dos seus valores ponderada pelas probabilidades dos eventos $A_i = [f = i]$

$$\mathbb{E}(f) = \sum_{i=1}^{6} i\, \mathbb{P}(A_i)$$

Esta média corresponde ao conceito de **integral** $\int_X f \, d\mathbb{P}$ que vamos agora definir.

Funções Simples

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida, e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função.

$f : X \to \mathbb{R}$ diz-se **simples** $\Leftrightarrow$ f for $\mathcal{F}$-mensurável e
$f(X) = \{a_1, \ldots, a_m\}$ for um conjunto finito.

Proposição *Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função simples*
$f(X) = \{a_1, \ldots, a_m\}$ *e* $A_i = f^{-1}(\{a_i\})$ $\Rightarrow$ $f = \sum_{i=1}^{m} a_i \, \mathbb{I}_{A_i}$.

Integral de Funções Simples

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida.
$f : X \to \mathbb{R}$ uma função simples tal que
$$f(X) = \{a_1, \ldots, a_m\} \ \text{e} \ \ A_i = f^{-1}(\{a_i\}) \text{ para } i = 1, \ldots, m.$$

Chama-se **integral de** f à soma

$$\int f \, d\mu = \int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} a_i \, \mu(A_i) \in [-\infty, +\infty]$$

com a convenção $a \times (+\infty) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a = 0 \\ +\infty & \text{se} \quad a > 0 \\ -\infty & \text{se} \quad a < 0 \end{cases}$

Quando é que se Define o Integral

O integral duma função simples não se define sempre que uma ou mais parcelas na soma

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} a_i \, \mu(A_i)$$

sejam infinitas de sinais contrários.

Casos em que **o integral duma função simples está definido**:

(1) $(X, \mathcal{F}, \mu)$ é um espaço de medida finito, e.g., um espaço de probabilidade. Neste caso para toda função simples $\int f \, d\mu \in \mathbb{R}$.

(2) $f \geq 0$. Neste caso todos os infinitos que ocorram na soma acima têm sinal positivo, e $\int f \, d\mu \in [0, +\infty]$.

Linearidade do Integral de Funções Simples

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida.
Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções simples.

Proposição *Supondo μ é finita, ou que $f, g \geq 0$,*

(a) $\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \int_X a\, f\, d\mu = a \int_X f\, d\mu,$

(b) $\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu.$

Monotonia do Integral de Funções Simples

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida.
Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções simples.

Proposição *Supondo μ é finita, ou que $f, g \geq 0$,*

(a) $f \geq 0$ *μ-q.s.* $\Rightarrow \displaystyle\int_X f \, d\mu \geq 0$,

(b) $f \leq g$ *μ-q.s.* $\Rightarrow \displaystyle\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$,

(c) $f = g$ *μ-q.s.* $\Rightarrow \displaystyle\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$,

(d) $\displaystyle\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu$.

Aproximação por Funções Simples

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida.

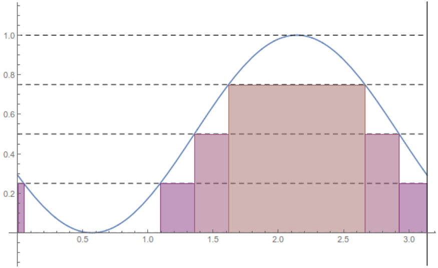
Proposição *Dada $f : X \to [0, +\infty]$ $\mathcal{F}$-mensurável , existe uma sucessão crescente de funções simples $\phi_n \geq 0$ crescente que converge pontualmente para f.*

A sucessão de funções simples

$$\phi_n = n\,\mathbb{I}_{\{f \geq n\}} + \sum_{j=0}^{n^2-1} \frac{j}{n}\,\mathbb{I}_{\{\frac{j}{n} \leq f < \frac{j+1}{n}\}}$$

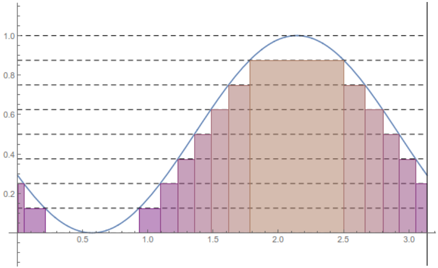
é monótona crescente e converge pontualmente para f quando $n \to +\infty$.

Aproximação por Funções Simples



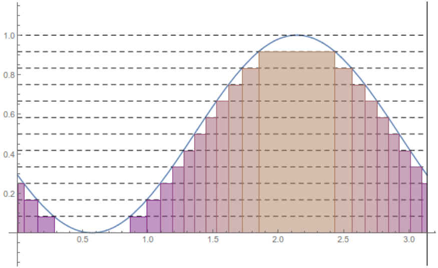
$$\phi_4 < f$$

Aproximação por Funções Simples



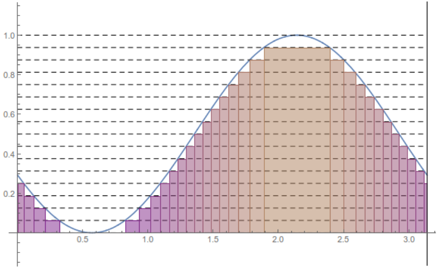
$$\phi_8 < f$$

Aproximação por Funções Simples



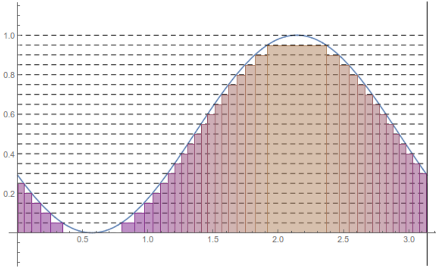
$$\phi_{12} < f$$

Aproximação por Funções Simples



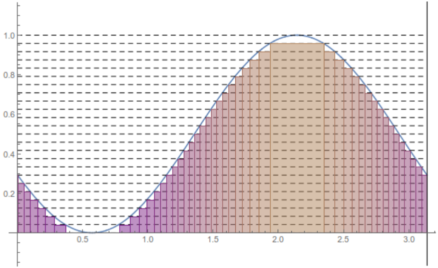
$$\phi_{16} < f$$

Aproximação por Funções Simples



$$\phi_{20} < f$$

Aproximação por Funções Simples



$$\phi_{24} < f$$

Integral de Funções Mensuráveis ≥ 0

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida.
Seja $f : X \to [0, +\infty]$ uma função $\mathcal{F}$-mensurável.

Chama-se **integral de** f ao supremo

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X \phi \, d\mu \; : \; 0 \leq \phi \leq f \;\; \text{com} \;\; \phi \;\; \text{simples} \; \right\}$$

Por definição, $\int f \, d\mu \in [0, +\infty]$

Monotonia do Integral de Funções Mensuráveis ≥ 0

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida.

Proposição *Sejam $f, g : X \to [0, +\infty]$ funções $\mathcal{F}$-mensuráveis.*

$$f \leq g \quad \Rightarrow \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$$

Teorema da Convergência Monótona

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida, e
$f_n : X \to [0, +\infty]$ uma sucessão de funções $\mathcal{F}$-mensuráveis.

Teorema *Se* $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *é* **monótona crescente** *então*

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

Propriedades do Integral de Funções Mensuráveis ≥ 0

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida.
Sejam $f, g : X \to [0, +\infty]$ funções $\mathcal{F}$-mensuráveis.

Proposição

(a) $\forall\, a \geq 0, \quad \int_X a\, f\, d\mu = a \int_X f\, d\mu,$

(b) $\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu.$

(c) $f = 0 \;\; \mu\text{-q.s.} \quad \Rightarrow \quad \int_X f\, d\mu = 0.$

(d) $\int_X f\, d\mu < +\infty \quad \Rightarrow \quad f < +\infty \;\; \mu\text{-q.s.}$

Aplicações do Teorema da Convergência Monótona

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida,
$f_n : X \to [0, +\infty]$ uma sucessão de funções $\mathcal{F}$-mensuráveis.

Proposição

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X f \, d\mu \right) .$$

Proposição *Se f_n é monótona crescente e $f_n \to f$ μ-q.s. então*

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu .$$

Integrabilidade

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida.

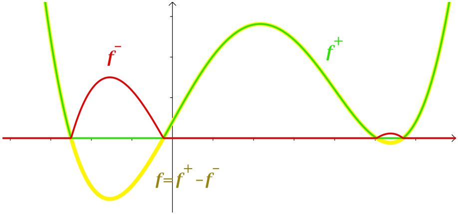
Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se **integrável** $\Leftrightarrow$

$$f \text{ é } \mathcal{F}\text{-mensurável} \quad \text{e} \quad \int_X |f| \, d\mu < +\infty.$$

Parte Positiva e Negativa duma Função

Dada $f : X \to \mathbb{R}$, definem-se as suas **partes positiva e negativa**, resp. $f^+ : X \to \mathbb{R}$ e $f^- : X \to \mathbb{R}$ por

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{e} \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$



Valem as relações

$$f = f^+ - f^- \;\; \text{e} \;\; |f| = f^+ + f^- \, .$$

Funções Integráveis

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida.

Proposição *Dadas funções integráveis* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *e* $A \in \mathcal{F}$,

(a) f^+, f^- *e* $|f|$ *são integráveis,*

(b) $a\, f$ *é integrável,*

(c) $f + g$ *é integrável,*

(d) $\mathbb{I}_A\, f$ *é integrável.*

Definição de Integral

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida,
$f : X \to \mathbb{R}$ uma função integrável.

Define-se o **integral de** f por

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \, .$$

Dado $A \in \mathcal{F}$, define-se o **integral de** f **sobre** A por

$$\int_A f \, d\mu = \int_X \mathbb{I}_A \, f \, d\mu \, .$$

Linearidade do Integral

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida.

Proposição *Dadas funções integráveis $f, g : X \to \mathbb{R}$,*

(a) $\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad \int_X a\, f\, d\mu = a \int_X f\, d\mu,$

(b) $\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu.$

Monotonia do Integral

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida.

Proposição *Dadas funções integráveis $f, g : X \to \mathbb{R}$,*

(a) $f \geq 0$ *μ-q.s.* $\Rightarrow \displaystyle\int_X f \, d\mu \geq 0$,

(b) $f \leq g$ *μ-q.s.* $\Rightarrow \displaystyle\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$,

(c) $f = g$ *μ-q.s.* $\Rightarrow \displaystyle\int_X f \, d\mu = \int_X g \, d\mu$,

(d) $\displaystyle\left|\int_X f \, d\mu\right| \leq \int_X |f| \, d\mu$.

O Teorema da Convergência Dominada

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida, e
$f_n : X \to [0, +\infty]$ uma sucessão de funções $\mathcal{F}$-mensuráveis.

Teorema *Supondo que*

(1) $f_n \to f$ *μ-q.s.,*

(2) Existe $g : X \to \mathbb{R}$ *integrável tal que* $|f_n| \leq g$ *μ-q.s.*

então

$$\int_X f \, d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \, .$$

Teoria da Medida (5ª e 6ª aulas)

Pedro Duarte

Outubro 2020

Teoria do Integral

Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida e
$f : X \to \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{F}$-mensurável

Funções simples

$f(X) = \{a_1, \ldots a_m\} \quad \Rightarrow \quad \int_X f \, d\mu := \sum_{i=1}^m a_i \, \mu\{f = a_i\}$

Funções não-negativas

$\exists$ sucessão funções simples $\phi_n \uparrow f \quad \Rightarrow \quad \int_X f \, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int \phi_n \, d\mu$

Funções integráveis

f diz-se μ-integrável $\quad \Leftrightarrow \quad f$ é $\mathcal{F}$-mensurável e $\int |f| \, d\mu < \infty$

$$\int_X f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$$

Propriedades do Integral

Monotonia Monotonia $f, g : X \to \mathbb{R}$

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$$

Linearidade $f, g : X \to \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_X (\alpha f + \beta g) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu$$

Convergência Monótona $0 \leq f_1 \leq \cdots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \cdots$

$$\int_X (\lim_{n\to\infty} f_n) \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int f_n \, d\mu \right)$$

Convergência Dominada $\exists g$ μ-integrável $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n| \leq g$

$$\int_X (\lim_{n\to\infty} f_n) \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int f_n \, d\mu \right)$$

Variáveis Aleatórias Discretas

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade.

Chama-se **variável aleatória discreta** a qualquer **função simples**

- $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$-mensurável
- $f(\Omega) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ finito.

O **valor esperado** da v.a. discreta f define-se por

$$\mathbb{E}(f) = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \mathbb{P}[\, f = a_j \,] = \sum_{j=1}^{n} a_j \, \mathbb{P}(f^{-1}\{a_j\}) = \int_{\Omega} f \, d\mathbb{P}.$$

Função Distribuição

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade.
Uma função mensurável $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diz-se uma **variável aleatória**.

Chama-se **função distribuição** duma v.a. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ à função $F = F_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \mathbb{P}[f \leq x] = \mathbb{P}(f^{-1}]-\infty, x]).$$

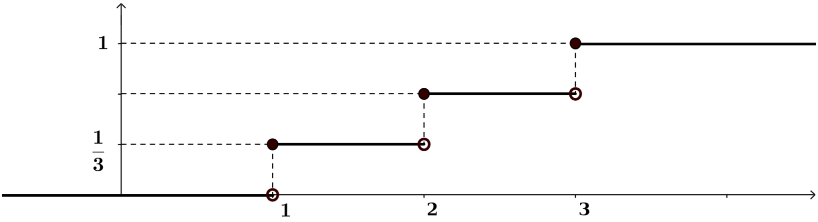
Propriedades da função distribuição:

- $x \leq y \;\Rightarrow\; F(x) \leq F(y), \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

Exemplo duma Função Distribuição

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade,
e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma variável aleatória tal que $f(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ e

$$\mathbb{P}[\,f = 1\,] = \mathbb{P}[\,f = 2\,] = \mathbb{P}[\,f = 3\,].$$



Variáveis Aleatórias Contínuas

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade.

Uma **variável aleatória** $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diz-se **continua** se for $\mathcal{F}$-mensurável e existir uma função Borel mensurável $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\forall\ a < b$,

$$\mathbb{P}[\, a \leq f \leq b\,] = \int_a^b h(x)\, dx.$$

A função h diz-se a **densidade de probabilidade** de f.
Ela deve satisfazer

$$h(x) \geq 0 \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, dx = 1.$$

Variáveis Aleatórias Contínuas

Sej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade.

Problema *S*eja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma variável aleatória contínua com função de **densidade de probabilidade** $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e função de **distribuição** $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Supondo F diferenciável, que relação existe entre F e h?

Resposta $F'(a) = h(a) \;\; \forall\, a \in \mathbb{R}$.

Distribuição Uniforme

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade.

Uma variável aleatória $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tem **distribuição uniforme** no intervalo $[0, 1]$, e escrevemos $f \sim U[0, 1]$ se $\forall\, 0 \leq a < b \leq 1$,

$$\mathbb{P}[\, a < f < b \,] = b - a = m([a, b]).$$

Função densidade de probabilidade $h = \mathbb{I}_{[0,1]}$.

Função distribuição $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$.

Distribuição Normal

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade.

Uma variável aleatória $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tem **distribuição normal padrão**, e escrevemos $f \sim N(0,1)$ se $\forall\, a < b$,

$$\mathbb{P}[\, a < f < b\,] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Função densidade de probabilidade $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Função distribuição $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$.

Distribuição Cauchy

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade.

Uma variável aleatória $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tem **distribuição Cauchy** se $\forall\, a < b$,

$$\mathbb{P}[\, a < f < b\,] = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Função densidade de probabilidade $h(x) = \frac{1}{\pi}\, \frac{1}{1+x^2}$.
Função distribuição $F(x) = \frac{1}{\pi} \left(\arctan x + \frac{\pi}{2} \right)$.

Processos Independentes e Identicamente Distribuídos

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade.

Uma sucessão de variáveis aleatórias $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ diz-se **independente e identicamente distribuída** (i.i.d.) se

- $\mathbb{P}[\, a < f_n < b \,]$ não depender de n, $\forall\, a < b$,
- $\forall\ n_1 < n_2 < \ldots < n_k \quad \forall\ E_1, \ldots, E_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
  $\mathbb{P}[\, f_{n_1} \in E_1 \wedge \ldots \wedge f_{n_k} \in E_k \,] = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}[\, f_{n_j} \in E_j \,]$.

Exemplo duma soma infinita de variáveis

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade.

Seja $f_n : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ uma sucessão i.i.d. de variáveis aleatórias tais que

$$\mathbb{P}[\, f_n = j\,] = \frac{1}{10}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, j \in \{0, \ldots, 9\}$$

e considere a variavel aleatória

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}\, f_n .$$

Problema Qual o valor esperado de f?

O Integral de Lebesgue em $\mathbb{R}$

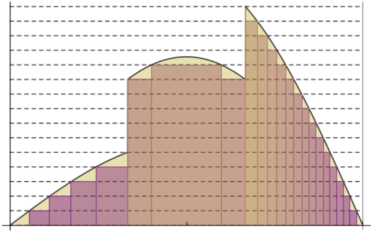
Sejam m a medida de Lebesgue na σ-álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$,

Definição do Integral de Lebesgue:

- Se $\phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, I_{A_i}$ é simples define-se
$$\int_{\mathbb{R}} \phi \, dm = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, m(A_i).$$
- Se f mensurável ≥ 0 define-se
$$\int_{\mathbb{R}} f \, dm = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} \phi \, dm \, : \, 0 \leq \phi \leq f, \ \phi \text{ simples } \right\}.$$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se **integrável à Lebesgue** $\Leftrightarrow$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mensurável e $\int_{\mathbb{R}} |f| \, dm < +\infty$.
Se f é integrável à Lebesgue define-se
$$\int_{\mathbb{R}} f \, dm = \int_{\mathbb{R}} f^{+} \, dm - \int_{\mathbb{R}} f^{-} \, dm.$$

O Integral de Lebesgue em $\mathbb{R}$

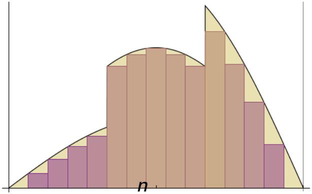
O integral duma função integrável à Lebesgue é aproximado por integrais de funções simples obtidas particionando o **contradomínio** da função.



$$\int_{\mathbb{R}} f \, dm = \lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n \, dm$$

O Integral de Riemann num intervalo $[a, b]$

O integral de Riemann duma função limitada integrável à Riemann no intervalo $[a, b]$ é aproximado por integrais de funções em escada obtidas particionando o **domínio** da função.



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi)\,(x_{i+1} - x_i)$$

O integral é o limite das somas de Riemann da função $f(x)$ em partições do intervalo $[a, b]$ cujo diâmetro tende a 0 quando $n \to +\infty$

Comparação dos Integrais de Riemann e Lebesgue

O Integral de Lebesgue é uma extensão do Integral de Riemann.

Proposição *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função limitada, nula fora do intervalo $[a, b]$. Se f for integrável à Riemann em $[a, b]$ então f é integrável à Lebesgue e*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dm(x) = \int_a^b f(x)\, dx \, .$$

Exemplo *A função $f = \mathbb{I}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ é integrável à Lebesgue mas não é integrável à Riemann.*

Notação para o Integral de Lebesgue

Para uma função integrável à Lebesgue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o seu integral será designado por qualquer das formas seguintes:

$$\int_{\mathbb{R}} f\, dm = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dm(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$$

Medida associada a uma função

Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida,
$h : X \to [0, +\infty[$ uma função $\mathcal{F}$- mensurável.

Define-se $\nu_h = \nu_{h,\mu} : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$, para cada $A \in \mathcal{F}$,

$$\nu_{h,\mu}(A) := \int_A h \, d\mu \; .$$

Proposição $(X, \mathcal{F}, \nu_{h,\mu})$ *é um espaço de medida.*
Além disso, a medida é finita, resp. de probabilidade, sse $\int_X h \, d\mu < +\infty$, *resp.* $\int_X h \, d\mu = 1$.

ν_h diz-se a **medida associada a** h e μ.
h diz-se a **densidade** de ν_h relativamente a μ.

Caracterização da medida associada a uma função

Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida,
$h : X \to [0, +\infty[$ uma função $\mathcal{F}$- mensurável.
$\nu_{h,\mu}$ medida associada a h e μ

Proposição *Dada $f : X \to \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{F}$-mensurável, f é $\nu_{h,\mu}$-integrável $\Leftrightarrow$ $f\,h$ é μ-integrável, i.e., $\int_X |f\,h|\,d\mu < +\infty$, e neste caso vale a igualdade*

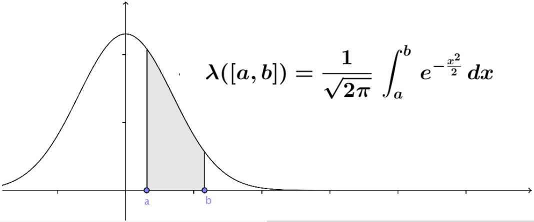
$$\int_X f\,d\nu_{h,\mu} = \int_X f\,h\,d\mu\ .$$

Medidas de Gauss

Chama-se **medida Gaussiana** à medida $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$\lambda(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx, \ \forall\, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \,.$$

Se $m : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ for a medida de Lebesgue e $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ então $\lambda = \nu_{h,m}$.



Caracterização da Medida de Gauss

Proposição Toda a função Borel mensurável e limitada $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é λ-integrável e

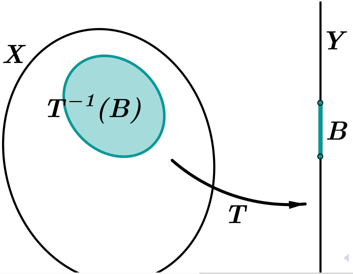
$$\int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx \, .$$

Medida Induzida por uma Aplicação

Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida,
$(Y, \mathcal{G})$ um espaço mensurável,
$T : X \to Y$ uma aplicação $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$-mensurável.

Define-se $T_*\mu : \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ por

$$(T_*\mu)(B) = \mu(T^{-1}(B)), \ \forall\, B \in \mathcal{G}.$$



Medida Induzida por uma Aplicação

Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida,
$(Y, \mathcal{G})$ um espaço mensurável,
$T : X \to Y$ uma aplicação $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$-mensurável.

Proposição *$(Y, \mathcal{G}, T_*\mu)$ é um espaço de medida.*
Além disso, $T_*\mu$ é uma medida finita, resp. de probabilidade, se μ o for.

$T_*\mu$ diz-se a **medida imagem** de μ por T ou
a **medida induzida por** T.

Mudança de Variável

Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida,
$(Y, \mathcal{G})$ um espaço mensurável,
$T : X \to Y$ uma aplicação $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$-mensurável.
$\nu = T_* \mu$ medida induzida por T

Proposição *Dada $f : Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{G}$-mensurável,
f é ν integrável $\Leftrightarrow$ $f \circ T$ for μ-integrável e*

$$\int_Y f \, d\nu = \int_X f \circ T \, d\mu \, .$$

Distribuição duma Variável Aleatória

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade,
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ uma **variável aleatória**, i.e., uma aplicação $\mathcal{F}$-mensurável.

Seja $X_*\mathbb{P} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ a medida induzida

$$X_*\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}\,[\,X \in B\,]\,,\ \forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ .$$

Então $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), X_*\mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade.

A medida $X_*\mathbb{P}$ diz-se a **lei de probabilidade**, da var. aleatória X.

Esperança duma Variável Aleatória

Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade,
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ uma variável aleatória.

Proposição *Se X for uma variável contínua, X tem função densidade de probabilidade h $\Leftrightarrow$ $X_*\mathbb{P} = \nu_{h,m}$.*
Além disso se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for Borel mensurável e limitada então a variável aleatória $\varphi \circ X$ é integrável e

$$\mathbb{E}(\varphi \circ X) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, h(x)\, dx \,.$$

Teoria da Medida (7ª e 8ª aulas)

Pedro Duarte

Novembro 2019

Somas como Integrais

Problema Como interpretar uma soma como um integral

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \int_X f \, d\mu \quad ?$$

Resposta

- $X = \{1, 2, \ldots, n\}$
- $f : X \to \mathbb{R}, \;\; f(i) := a_i$
- $\mathcal{F} := \mathcal{P}(X)$,
- $\mu\{i\} := 1$.

f é uma função simples tal que

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \mu\{i\} = \sum_{i=1}^{n} a_i .$$

Produtos finitos

Lançamento dum Dado

$\Omega_1 = \{1, 2, \ldots, 6\}, \quad P_1\{1\} = \cdots = P_1\{6\} = \frac{1}{6}$

Lançamento duma Moeda

$\Omega_2 = \{0, 1\}, \quad P_2\{0\} = P_2\{1\} = \frac{1}{2}$

Lançamento conjunto (independente) dum Dado e Moeda

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(1,0), (2,0), \ldots, (6,1)\}, \quad P\{(i,j)\} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2}$

Valor Esperado duma v. a. $\varphi \colon \Omega \to \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{12} \sum_{(i,j)\in\Omega} \varphi(i,j) = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{6} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{1} \varphi(i,j) \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{1} \left(\frac{1}{6} \sum_{j=1}^{6} \varphi(i,j) \right)$$

Produto de Espaços Mensuráveis

Sejam $(X, \mathcal{F})$ e $(Y, \mathcal{G})$ espaços mensuráveis.

Um produto cartesiano $A \times B$ com $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{G}$ diz-se um **rectângulo**.

A σ-álgebra gerada pelos rectângulos $A \times B$ com $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{G}$ diz-se a **σ-álgebra produto** e denota-se por $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$.

O espaço mensurável $(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$ diz-se o **produto** dos espaços mensuráveis $(X, \mathcal{F})$ e $(Y, \mathcal{G})$.

Produto de Medidas

Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos.

Teorema *Existe uma única medida θ definida na σ-álgebra $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$, que verifica $\theta(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B)$, $\forall\, A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$. A medida θ designa-se por* **medida produto** *e escreve-se $\theta = \mu \times \nu$.*

O espaço de medida $(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mu \times \nu)$ diz-se o **produto dos espaços de medida** $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$.

Mensurabilidade das Projecções

Sejam $(X, \mathcal{F})$ e $(Y, \mathcal{G})$ espaços mensuráveis.

Proposição

(1) A aplicação projecção $\pi_X : X \times Y \to X$ *definida por* $\pi_X(x, y) = x$ *é* $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mathcal{F})$*-mensurável.*

(2) A aplicação projecção $\pi_Y : X \times Y \to Y$ *definida por* $\pi_Y(x, y) = y$ *é* $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}, \mathcal{G})$*-mensurável.*

Mensurabilidade Conjunta e Separada

Sejam $(X, \mathcal{F})$ e $(Y, \mathcal{G})$ espaços mensuráveis.

Proposição *Se $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ for $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$-mensurável, então*
(1) $\forall\, x \in X, \quad y \mapsto f(x, y)$ *é $\mathcal{G}$-mensurável,*
(2) $\forall\, y \in Y, \quad x \mapsto f(x, y)$ *é $\mathcal{F}$-mensurável.*

Mensurabilidade dos Integrais marginais

Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$-mensurável.

Proposição *Se $f \geq 0$ ou se f for $(\mu \times \nu)$-integrável então*

(1) A função $y \mapsto \int_X f(x, y)\, d\mu(x)$ *é $\mathcal{G}$-mensurável.*

(2) A função $x \mapsto \int_Y f(x, y)\, d\nu(y)$ *é $\mathcal{F}$-mensurável.*

Teorema de Tonelli

Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos.

Teorema *Se* $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ *for* $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$*-mensurável,*

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f \, d\mu \times \nu &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) \, d\nu(y) \\ &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) \, d\mu(x) \, .\end{aligned}$$

Teorema de Fubini

Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos.

Teorema *Se* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *for* $(\mu \times \nu)$*-integrável,*

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f \, d\mu \times \nu &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) \, d\nu(y) \\ &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) \, d\mu(x) \, .\end{aligned}$$

Espaços Normados

Seja V um espaço vectorial real.

Chama-se **norma** a uma aplicação $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+$ satisfazendo:

(1) $\|x\| \geq 0$,

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$,

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

(4) $\|x\| = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$,

quaisquer que sejam $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Chama-se **espaço normado** a um par $(V, \|\cdot\|)$ onde V é um espaço vectorial real e $\|\cdot\|$ é uma norma em V.

Convergência num Espaço Normado

Num espaço normado $(V, \|\cdot\|)$ define-se uma noção de **distância** $d : V \times V \to \mathbb{R}_+$, $\quad d(x,y) = \|y - x\|$, que satisfaz:

(1) $d(x,y) \geq 0$,

(2) $d(x,y) = d(y,x)$,

(3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$,

(4) $d(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y$,

quaisquer que sejam $x, y, z \in V$.

Dada uma sucessão $\{x_n\}_n \subset V$ e um ponto $x \in V$, dizemos que $\{x_n\}_n$ **converge para** x, e escrevemos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, se $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

Espaços de Banach

Uma sucessão $\{x_n\}_n \subseteq V$ diz-se uma **sucessão de Cauchy** se dado $\varepsilon > 0$ existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq p \quad \Rightarrow \quad \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon.$$

Um espaço normado $(V, \|\cdot\|)$ diz-se **completo**, ou um **espaço de Banach**, se toda a sucessão de Cauchy em $(V, \|\cdot\|)$ for convergente.

Proposição *Seja $(V, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. Dada uma sucessão $\{x_n\}_n \subseteq V$, se $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ então o seguinte limite existe sempre*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \ .$$

Os Espaços $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ é um espaço vectorial real de dimensão finita n.

$\mathbb{R}^n$ é um espaço normado completo com qualquer uma das normas seguintes:

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$$

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = \sqrt{{x_1}^2 + \ldots + {x_n}^2}$$

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

Estas normas são equivalentes no sentido que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_2 \leq n\, \|x\|_\infty , \ \forall\, x \in V .$$

O Espaço $L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$

Define-se $L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ como o espaço das funções $\mathcal{F}$-mensuráveis $f : X \to \mathbb{R}$ tais que $\int_X |f| \, d\mu < +\infty$.

Define-se $\|\cdot\|_1 : L^1(X, \mathcal{F}, \mu) \to \mathbb{R}_+$,

$$\|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu \, .$$

Teorema *Identificando funções que sejam iguais μ-q.s., $(L^1(X, \mathcal{F}, \mu), \|\cdot\|_1)$ é um espaço normado completo, i.e., um espaço de Banach.*

Convergência em L^1

Dada uma sucessão $\{f_n\}_n \subseteq L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$ de funções μ-integráveis dizemos que $\{f_n\}_n$ **converge em L^1** para $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu)$

se $\|f_n - f\|_1 \to 0$ quando $n \to +\infty$, ou seja

se $\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$.

Quando $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade, a convergência em L^1 equivale a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\,|f_n - f| = 0$.

Diremos neste caso que $\{f_n\}_n$ **converge em média** para f.

Produtos Internos

Seja V um espaço vectorial real.

Chama-se **produto interno** a uma aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

(1) $\langle x, x \rangle \geq 0$,

(2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,

(3) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$,

(4) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,

(5) $\langle x, x \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$,

quaisquer que sejam $x, y, z \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Distâncias e Normas

Seja V um espaço vectorial real munido dum produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

V é um **espaço normado** com a norma definida por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}\ .$$

V é um **espaço métrico** com a distância definida por

$$d(x, y) = \|y - x\| = \sqrt{\langle y - x, y - x \rangle}\ .$$

Ângulos e Ortogonalidade

Seja V um espaço vectorial real munido dum produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Dois vectores $x, y \in V$ dizem-se **ortogonais** se $\langle x, y\rangle = 0$.

Proposição *Dados $x, y \in V$, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$.*

Define-se o **ângulo** entre os vectores $x, y \in V$ como sendo

$$\angle\{x, y\} = \operatorname{arccos}\left(\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \, \|y\|}\right) .$$

Espaços de Hilbert

Chama-se **espaço de Hilbert** a um espaço vectorial real V munido dum produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que com a norma associada, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, V seja um espaço normado completo.

Todo o espaço de Hilbert é um espaço de Banach e como tal tem uma noção de convergência associada.

O espaço vectorial $\mathbb{R}^n$ com o produto interno definido por

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1\, y_1 + \ldots + x_n\, y_n$$

é um espaço de Hilbert de dimensão finita n.

O Espaço $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$

Define-se $L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ como o espaço das funções $\mathcal{F}$-mensuráveis $f : X \to \mathbb{R}$ tais que $\int_X |f|^2 \, d\mu < +\infty$.

Define-se $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2(X, \mathcal{F}, \mu) \times L^2(X, \mathcal{F}, \mu) \to \mathbb{R}$,

$$\langle f, g \rangle = \int_X f \, g \, d\mu \, .$$

A norma associada a este produto interno é

$$\|f\|_2 = \left(\int_X f^2 \, d\mu \right)^{1/2} \, .$$

Teorema *Identificando funções que sejam iguais μ-q.s., $(L^2(X, \mathcal{F}, \mu), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é um espaço de Hilbert.*

Convergência em L^2

Dada uma sucessão $\{f_n\}_n \subseteq L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$ de funções de quadrado μ-integrável dizemos que $\{f_n\}_n$ **converge em L^2** para $f \in L^2(X, \mathcal{F}, \mu)$

se $\|f_n - f\|_2 \to 0$ quando $n \to +\infty$, ou seja
se $\lim_{n\to+\infty} \int_X (f_n - f)^2 \, d\mu = 0$.

Quando $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade, a convergência em L^2 equivale a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[(f_n - f)^2] = 0$.

Dizemos que $\{f_n\}_n$ **converge em média quadrática** para f.

Convergência em Medida

Sejam $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida,
$\{f_n : X \to \mathbb{R}\}_n$ uma sucessão de funções $\mathcal{F}$-mensuráveis.

Dizemos que a sucessão $\{f_n\}_n$ **converge em medida para** f, se para todo $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mu\{ x \in X \, : \, |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon \} = 0 \, .$$

Quando $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade, dizemos no mesmo sentido que $\{f_n\}_n$ **converge em probabilidade** para f.

Relações entre Convergências

Seja $(X, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida finita.

Valem as seguintes relações entre as diferentes convergências

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Convergência em } L^2 \\ & & \Downarrow \\ & & \text{Convergência em } L^1 \\ & & \Downarrow \\ \text{Convergência } \mu\text{-q.s.} & \Rightarrow & \text{Convergência em medida} \end{array}$$