MECÂNICA QUÂNTICA

Exame Final, 1ª Data 2013/14

1. Considere uma partícula de massa m, sujeita a um potencial unidimensional $V(x)$, dado por

$$V = \infty, \quad x < 0\,; \qquad V = 0, \quad 0 \leq x \leq a\,; \qquad V = V_0, \quad x > a\,. \tag{1}$$

a) Demonstre que os estados ligados ($E < V_0$) deste sistema existem apenas se $k \cot ka = -\kappa$, em que $k^2 = 2mE/\hbar^2$ e $\kappa^2 = 2m(V_0 - E)/\hbar^2$.
b) Particularize esta equação transcendente para o caso em que $V_0 = 9\hbar^2/2ma^2$. Mostre que neste caso existe apenas um estado ligado do sistema, e determine a energia deste estado em função da única solução positiva daquela equação transcendente.

2. Considere dois operadores, A e B, correspondentes a duas grandezas físicas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. O operador A (resp. B) tem dois estados próprios normalizados, $|\phi_i\rangle, i = 1, 2$ (resp. $|\chi_i\rangle, i = 1, 2$) associados aos valores próprios $a_i, i = 1, 2$ (resp. $b_i, i = 1, 2$). Tem-se além disso

$$|\phi_1\rangle = \frac{2|\chi_1\rangle + 3|\chi_2\rangle}{\sqrt{13}} \qquad |\phi_2\rangle = \frac{3|\chi_1\rangle - 2|\chi_2\rangle}{\sqrt{13}} \tag{2}$$

a) Um sistema é sujeito a uma medida de $\mathcal{A}$ que dá o resultado a_1. A seguir mede-se $\mathcal{B}$, e depois novamente $\mathcal{A}$. Mostre que a probabilidade de obter novamente a_1 nesta última medida é 97/169.
b) Mostre que com (2) o conjunto $|\phi_i\rangle, i = 1, 2$ está ortonormalizado se e só se o conjunto $|\chi_i\rangle, i = 1, 2$ está ortonormalizado.
c) Mostre que como A e B são hermíticos, a_i e b_i, $i = 1, 2$ são reais.
d) Dê condições para que A e B comutem.

3. Considere o momento angular orbital e o operador correspondente, $\mathbf{L}$.
a)Os harmónicos esféricos $Y_{lm}(\theta, \phi)$ são funções próprias ortonormalizadas dos operadores $\mathbf{L}^2$ e L_z. Indique os valores próprios correspondentes.
b) Verifique explicitamente as propriedades da alínea anterior para o caso de L_z e para as três funções $Y_{lm}(\theta, \phi)$, $l = 1$, $m = -1, 0, 1$.

c) Os operadores de escada $L_+ = L_x + iL_y$, $L_- = L_x - iL_y$ verificam

$$\begin{aligned} L_+|l\ m\rangle &= \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}|l\ m+1\rangle \\ L_-|l\ m\rangle &= \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}|l\ m-1\rangle \end{aligned} \tag{3}$$

Use esta propriedade para calcular o valor médio de L_x e de L_x^2 num estado $|l\ m\rangle$.
d) Para $l = 1$, calcule a representação de L_x na base $|l\ m\rangle$. Calcule também os valores próprios de L_x e os seus estados próprios na base $|l\ m\rangle$.
e) Considere um feixe de partículas sem spin e com momento angular orbital correspondente a $l = 1$. O feixe está dirigido segundo a direcção y, e atravessa um dispositivo de Stern-Gerlach com campo magnético médio dirigido segundo o eixo x, que o divide em três feixes aproximadamente coplanares. Um dos feixes exteriores atravessa por sua vez um outro dispositivo de Stern-Gerlach, agora com campo magnético médio dirigido segundo o eixo z. Quantos feixes emergem do segundo dispositivo, e qual é a sua intensidade relativa? Responda às mesmas perguntas supondo agora que é o feixe central que atravessa o segundo dispositivo.

4. Enuncie os postulados que intervêm directamente na resolução das questões 2.a) e 3.e). Na situação descrita em 2.a), e supondo que a medida de $\mathcal{B}$ dá b_1, é correcto dizer que após esta medida o sistema tem $\mathcal{A} = a_1$ e $\mathcal{B} = b_1$? Porquê? Na situação descrita em 3.e), o que pode dizer acerca do valor de L_x e de L_z das partículas que formam um dos feixes que emerge do segundo dispositivo?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\ dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \quad Y_{1\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\ e^{\pm i\varphi}$$

$$\mathcal{J}_{esf} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J}_{esf}^{-1} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r^{-1}\cos\theta\cos\varphi & r^{-1}\cos\theta\sin\varphi & r^{-1}\sin\theta \\ -r^{-1}\sin\varphi/\sin\theta & r^{-1}\cos\varphi/\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$h = 6.626\ 10^{-34} Js, \quad k = 1.381\ 10^{-23} J\ {}^\circ K^{-1}, \quad m_e = 9.109\ 10^{-31} kg$$