RESOLUÇÃO DO EXAME FINAL 1ª DATA
2013/14

1. a) Sejam 1 e 2 os indices que identificam as regiões em que o potencial vale 0 e V_0, respectivamente. As soluções da ESIT nas duas regiões são

```
k = Sqrt[2 m En] / ℏ; k =.; ψ1 = A Exp[ⅈ k x] + B Exp[- ⅈ k x]
```

$B\, e^{-i k x} + A\, e^{i k x}$

```
κ = Sqrt[2 m (V0 - En)] / ℏ; κ =.; ψ2 = C Exp[-κ x]
```

$C\, e^{-x \kappa}$

e as condições de matching são

```
{ψ1 /. x → 0} == 0
```

$\{A + B\} == 0$

```
ψ1 = FullSimplify[ψ1 /. B → -A]
```

$2\, i\, A\, \mathrm{Sin}[k\, x]$

e

```
{ψ1 /. x → a} == {ψ2 /. x → a}
```

$\{2\, i\, A\, \mathrm{Sin}[a\, k]\} == \{C\, e^{-a \kappa}\}$

```
{D[ψ1, x] /. x → a} == {D[ψ2, x] /. x → a}
```

$\{2\, i\, A\, k\, \mathrm{Cos}[a\, k]\} == \{-C\, e^{-a \kappa}\, \kappa\}$

Eliminando a constante arbitrária A, vem

```
Solve[k Cot[a k] == - κ, κ]
```

$\{\{\kappa \to -k\, \mathrm{Cot}[a\, k]\}\}$

b) Vejamos como se simplifica esta equação no caso dado.

```
Simplify[κ^2 == 2 m (V0) / ℏ^2 - k^2 /. V0 → (3 / a)^2 ℏ^2 / (2 m) ]
```

$k^2 + \kappa^2 == \frac{9}{a^2}$

```
Simplify[Cos[k a]^2 / Sin[k a]^2 - κ^2 / k^2 /. {κ^2 -> 9/a^2 - k^2}]
```

$1 - \frac{9}{a^2\, k^2} + \mathrm{Cot}[a\, k]^2$

```
Simplify[1 - 9/(a^2 k^2) + Cot[a k]^2 /. { Cot[k a]^2 → (1 - sinka^2) / sinka^2}]
```

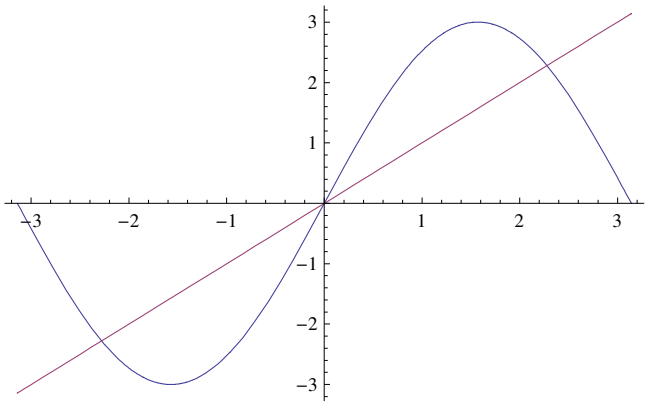
$$-\frac{9}{a^2\,k^2}+\frac{1}{\text{sinka}^2}$$

ou seja, a equação geral reduz-se à equação

```
9 Sin[x]^2 == x^2 ;
```

onde x = k a. É fácil ver que esta equação transcendente tem uma única solução positiva, X, no segundo quadrante,

```
Plot[{3 Sin[x], x}, {x, -Pi, Pi}]
```



de modo que a energia do único estado ligado vem dada em função de X por

```
Solve[X^2 / a^2 == 2 m En / ℏ, En]
```

$$\left\{\left\{\text{En}\to\frac{X^2\,\hbar}{2\,a^2\,m}\right\}\right\}$$

2. a) Convem obter de (2) também as expressões dos estados próprios de B em função dos de A.

```
Solve[{ϕ1 == (2 / Sqrt[13]) χ1 + (3 / Sqrt[13]) χ2 ,
  ϕ2 == (3 / Sqrt[13]) χ1 - (2 / Sqrt[13]) χ2 }, {χ1 , χ2 }]
```

$$\left\{\left\{\chi1\to\frac{2\,\phi1}{\sqrt{13}}+\frac{3\,\phi2}{\sqrt{13}},\ \chi2\to\frac{3\,\phi1}{\sqrt{13}}-\frac{2\,\phi2}{\sqrt{13}}\right\}\right\}$$

Após a medida cujo resultado é a1, o sistema está no estado $\phi1$. Com probabilidade 4/13 (resp. 9/13) a segunda medida dá b1 (resp. b2). Se dá b1, então com probabilidade 4/13 a terceira medida dá a1, e se dá b2, então com probabilidade 9/13 a terceira medida dá a1. Portanto, a probabilidade de que a terceira medida dê a1 é (4/13)^2 + (9/13) ^2.

b) A propriedade enunciada é equivalente a mostrar que a matriz de mudança de base dos ϕi para os χi, M, dada por (2) é unitária. Ora

```
M = (1 / Sqrt[13]) {{2, 3}, {3, -2}}; MatrixForm[M]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

é real e simétrica, portanto é unitária sse M² = Id:

```
M .M
```

```
{{1, 0}, {0, 1}}
```

c) Em geral, operadores hermíticos têm vaps reais.
$<\phi\_i \mid A \mid \phi\_i>^* = a\_i^* = <\phi\_i \mid A^* \mid \phi\_i> = <\phi\_i \mid A \mid \phi\_i> = a\_i$

d) Construimos a representação de A e de B na base dos ϕi e calculamos o comutador:

```
A = {{a1, 0}, {0, a2}}; Bϕ1 = (1 / Sqrt[13]) (2 χ1 + 3 χ2) /. {χ1 → b1 χ1, χ2 → b2 χ2 }
```

$$\frac{2\,b1\,\chi1 + 3\,b2\,\chi2}{\sqrt{13}}$$

$$B\phi1 = \text{Collect}\left[\frac{2\,b1\,\chi1 + 3\,b2\,\chi2}{\sqrt{13}} \;/.\; \left\{\chi1 \to \frac{2\,\phi1}{\sqrt{13}} + \frac{3\,\phi2}{\sqrt{13}},\ \chi2 \to \frac{3\,\phi1}{\sqrt{13}} - \frac{2\,\phi2}{\sqrt{13}}\right\},\ \{\phi1, \phi2\},\ \text{Simplify}\right]$$

$$\frac{1}{13}(4\,b1 + 9\,b2)\,\phi1 + \frac{6}{13}(b1 - b2)\,\phi2$$

$$B\phi2 = (1 / \text{Sqrt}[13])\,(3\,\chi1 - 2\,\chi2) \;/.\; \{\chi1 \to b1\,\chi1,\ \chi2 \to b2\,\chi2\}$$

$$\frac{3\,b1\,\chi1 - 2\,b2\,\chi2}{\sqrt{13}}$$

$$B\phi2 = \text{Collect}\left[\frac{3\,b1\,\chi1 - 2\,b2\,\chi2}{\sqrt{13}} \;/.\; \left\{\chi1 \to \frac{2\,\phi1}{\sqrt{13}} + \frac{3\,\phi2}{\sqrt{13}},\ \chi2 \to \frac{3\,\phi1}{\sqrt{13}} - \frac{2\,\phi2}{\sqrt{13}}\right\},\ \{\phi1, \phi2\},\ \text{Simplify}\right]$$

$$\frac{6}{13}(b1 - b2)\,\phi1 + \frac{1}{13}(9\,b1 + 4\,b2)\,\phi2$$

$$B = \left\{\left\{\frac{1}{13}(4\,b1 + 9\,b2),\ \frac{6}{13}(b1 - b2)\right\},\ \left\{\frac{6}{13}(b1 - b2),\ \frac{1}{13}(9\,b1 + 4\,b2)\right\}\right\}$$

$$\left\{\left\{\frac{1}{13}(4\,b1 + 9\,b2),\ \frac{6\,(b1 - b2)}{13}\right\},\ \left\{\frac{6\,(b1 - b2)}{13},\ \frac{1}{13}(9\,b1 + 4\,b2)\right\}\right\}$$

```
A.B - B.A
```

$$\left\{\left\{0,\ \frac{6}{13}\,a1\,(b1 - b2) - \frac{6}{13}\,a2\,(b1 - b2)\right\},\ \left\{-\frac{6}{13}\,a1\,(b1 - b2) + \frac{6}{13}\,a2\,(b1 - b2),\ 0\right\}\right\}$$

Portanto A e B comutam se a1=a2 ou b1=b2.

3. a) São respectivamente $\hbar^2$ l (l+1) e $\hbar$ m.
b) Ortonormalização:

```
Y10[θ, φ] := Sqrt[3 / (4 π)] Cos[θ]; Y11[θ, φ] := -Sqrt[3 / (8 π)] Sin[θ] Exp[ⅈ φ];
Y1m1[θ, φ] := Sqrt[3 / (8 π)] Sin[θ] Exp[-ⅈ φ];
Integrate[Y10[θ, φ]^2 Sin[θ], {θ, 0, π}, {φ, 0, 2 π}]
```

```
1
```

```
Integrate[Y10[θ, φ] Y11[θ, φ] Sin[θ], {θ, 0, π}, {φ, 0, 2 π}]
```

```
0
```

```
Integrate[Y10[θ, φ] Y1m1[θ, φ] Sin[θ], {θ, 0, π}, {φ, 0, 2 π}]
```

```
0
```

```
Integrate[Y11[θ, φ] Conjugate[Y11[θ, φ]] Sin[θ], {θ, 0, π}, {φ, 0, 2 π}]
```

```
1
```

```
Integrate[Y1m1[θ, φ] Conjugate[Y1m1[θ, φ]] Sin[θ], {θ, 0, π}, {φ, 0, 2 π}]
```

```
1
```

```
Integrate[Y11[θ, φ] Conjugate[Y1m1[θ, φ]] Sin[θ], {θ, 0, π}, {φ, 0, 2 π}]
```

```
0
```

Lz Y_lm = m ℏ Y_lm:

```
Simplify[- ⅈ ℏ D[Y11[θ, φ], φ] / Y11[θ, φ]]
```

```
ℏ
```

```
Simplify[- ⅈ ℏ D[Y1m1[θ, φ], φ] / Y1m1[θ, φ]]
```

```
-ℏ
```

```
D[Y10[θ, φ], φ]
```

```
0
```

c) Temos L_x = (L_+ + L_-)/2, L_x^2 =(L_+^2 + L_-^2+ L_+ L_- + L_- L_+)/4 . Da definição decorre imediatamente que <lm|L_+|lm>=<lm|L_-|lm>=0, e portanto <lm|L_x|lm>=0. Quanto a <lm|L_x^2|lm>= <lm|L_+ L_- + L_- L_+|lm>/4, tem-se
< l m| L_+ L_- | l m> = c_-(m) <l m|L_+ |l m-1> = c_-(m) c_+(m-1) <l m | l m> = c_-(m) c_+(m-1),
onde c_+(m) e c_-(m) são os factores dados na equação (3) do enunciado, assim como
< l m| L_- L_+ | l m> = c_+(m) <l m|L_+ |l m+1> = c_+(m) c_-(m+1) <l m | l m> = c_+(m) c_-(m+1). Portanto
<lm|L_x^2|lm>= (c_-(m) c_+(m-1) +c_+(m) c_-(m+1))/4 = (ℏ^2/4) (Sqrt[l(l+1) - m (m-1)]Sqrt[l(l+1) - m (m-1)] + Sqrt[l-(l+1) - m (m+1))]Sqrt[l(l+1) - m (m+1))]) = (ℏ^2/4) (l(l+1) - m (m-1)+ l(l+1) - m (m+1))= 2 ℏ^2 (l(l+1) - m^2).

d) L_x | 1 -1> = ((L_+ + L_-) | 1 -1>)/2 = (L_+ | 1 -1>)/2 = (ℏ Sqrt(1.2 + 1.0) /2)| 1 0> = (ℏ/$\sqrt{2}$) | 1 0>;
L_x | 1 0> = ((L_+ + L_-) | 1 0>)/2 = (L_+ | 1 0>)/2 + (L_+ | 1 0>)/2= (ℏ/$\sqrt{2}$) (| 1 1> +| 1 -1>);
L_x | 1 1> = ((L_+ + L_-) | 1 1>)/2 = (L_- | 1 1>)/2 = (ℏ Sqrt(1.2 + 1.0) /2)| 1 0> = (ℏ/$\sqrt{2}$) | 1 0>.

Portanto, a representação de L_x nesta base é a matriz

In[1]:=
```
Lx = ℏ {{0, 1 / Sqrt[2], 0}, {1 / Sqrt[2], 0, 1 / Sqrt[2]}, {0, 1 / Sqrt[2], 0}}; MatrixForm[Lx]
```

Out[1]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\hbar}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

In[2]:=
```
Sqrt[2]
```

Out[2]= $\sqrt{2}$

Os valores próprios de L_x são -1,0 e 1 (independentes da base). Os estados próprios de Lx nesta base são os vectores próprios normalizados desta matriz associados as estes três valores próprios,

|1 -1>_x = (| 1 -1 > - $\sqrt{2}$ | 1 0 > + | 1 1 >)/2

|1 0>_x = (| 1 -1 > + |1 1 > +)/$\sqrt{2}$

|1 1>_x = (| 1 -1 > + $\sqrt{2}$ | 1 0 > + | 1 1 >)/2

e) Um dos feixes exteriores corresponde ou a |1 -1>_x ou a |1 1>_x. Pela alínea anterior, uma medida de L_z separa este feixe em três feixes, de intensidades relativas 1, 1/2, 1. Uma medida de L_z sobre o feixe central separa-o em dosi feixes de igual intensidade.

4. Intervieram directamente nos cálculos os postulados da decomposição espectral e do colapso da função de onda.