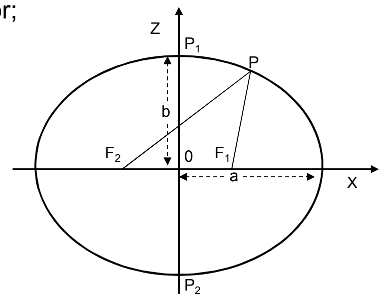
PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

1. Elipse geradora

- Na Geodesia é o elipsóide de revolução (2ª aproximação) que serve como referência no posicionamento geodésico;
- Na maior parte dos cálculos da Geodesia Geométrica é usada a geometria do Elipsóide de Revolução;
- O Elipsóide é formado pela revolução de um arco de elipse em torno do seu semi-eixo menor;

$$F_1P + F_2P = 2a$$

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1$$



PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

1. Elipse geradora

- Parâmetros fundamentais da elipse:
  - Achatamento polar (f)

$$f = \frac{a-b}{a}$$

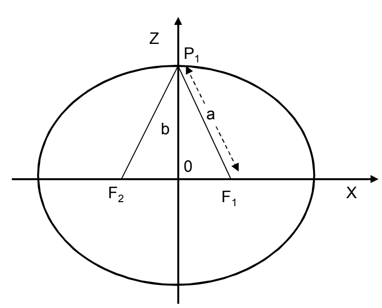
  - 1ª excentricidade (e)

$$e = \frac{\overline{OF}}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

  - 2ª excentricidade (e')

$$e' = \frac{\overline{OF}}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

$$a^2 = b^2 + \overline{OF}^2$$



PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

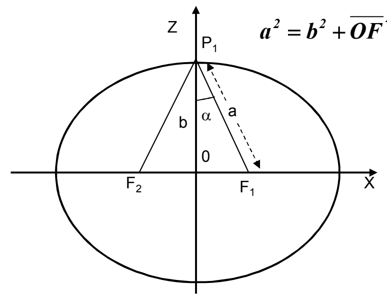
1. Elipse geradora

- Outros parâmetros da elipse:
  - Excentricidade angular (α)

$$\cos\alpha = \frac{b}{a} = 1 - f$$

$$\sin\alpha = \frac{\overline{OF}}{a} = e$$

$$tg\alpha = \frac{\overline{OF}}{b} = e'$$



$$a^2 = b^2 + \overline{OF}^2$$

  - Excentricidade linear (E)

$$E = ae = \overline{OF}$$

PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

2. Elipsóide GRS80

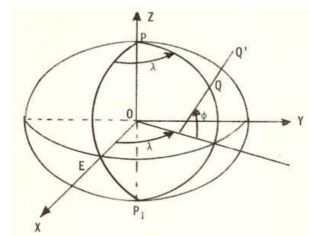
- O Elipsóide actualmente recomendado pela IAG é o Geodetic Reference System 1980 (Moritz, 1980) :

Semi-eixo maior:	a = 6378137 m
Semi-eixo menor:	b = 6356752.3141 m
Excentricidade linear:	E = 521854.0097 m
1ª excentricidade:	e^2 = 0.00669438002290
2ª excentricidade:	e'^2 = 0.00673949677548
Achatamento:	f = 0.00335281068118
Inverso do achatam.:	$1/f$ = 298.257222101

PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

2.1 Coordenadas Geodésicas

- φ - *Latitude Geodésica* de um ponto Q situado à superfície do elipsóide é definida pelo ângulo entre a normal ao elipsóide no ponto Q e o plano do equador;
- λ - *Longitude Geodésica* de um ponto à superfície do elipsóide é definida pelo rectilíneo do diedro formado pelos planos do meridianos geodésicos do ponto e o de referência, convencionada positiva para Este;
- h – Altitude geodésica é a distância (QQ') medida ao longo da normal, entre a superfície do elipsóide e a superfície topográfica;

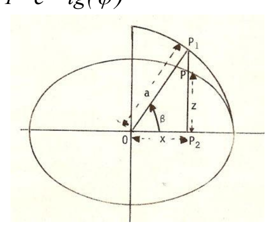


PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

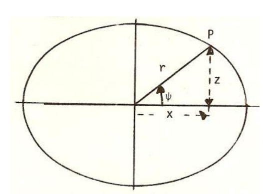
2.2 Outras Latitudes

$$tg(\beta) = \sqrt{1-e^2} \cdot tg(\varphi)$$

- β - *Latitude Reduzida* (ou paramétrica) de um ponto P situado à superfície do elipsóide é definida pelo ângulo ao centro de uma esfera tangente ao elipsóide no equador (circunscrita), de raio r = a;



- ψ - *Latitude Geocêntrica* de um ponto à superfície do elipsóide P é o ângulo ao centro do elipsóide, medido entre o plano do equador e a direcção radial do ponto;



$$tg(\Psi) = \left(1-e^2\right) \cdot tg(\varphi)$$

PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

2.3 Raios de curvatura

- O raio de curvatura de uma secção normal ao elipsóide dependerá do azimute dessa secção normal;
- Em cada ponto existem duas secções normais mutuamente perpendiculares entre si, cujas curvaturas tomam o valor máximo e mínimo;
- As secções normais que verificam o valor máximo e mínimo de curvatura dizem-se secções normais principais;
- Sobre o elipsóide de revolução as secções normais principais são:
  - **A secção do meridiano** (de raio ρ ou M), gerada pelo plano normal de um ponto que passa pelos dois pólos;
  - **A secção do primeiro vertical** (de raio N), gerada pelo plano normal de um ponto, perpendicular ao plano do meridiano, cujo raio é designado por grande normal.

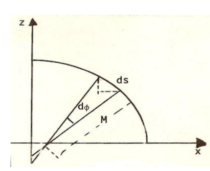
PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

2.3.1 Raio de curvatura do Meridiano

- Para uma qualquer curva sobre o plano, z = F(x), o raio de curvatura num dado ponto da curva é dado por:

$$\rho = \frac{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2z}{dx^2}}$$

- Da aplicação desta fórmula ao arco de meridiano chega-se à expressão do raio de curvatura do meridiano:



$$M = \frac{a(1-e^2)}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}} = \frac{a(1-e^2)}{W^3} = \frac{c}{V^3}$$

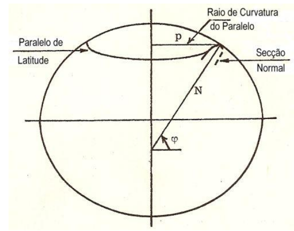
$$c = \frac{a^2}{b}; \quad V = \frac{a}{b}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}$$

PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

2.3.2 Raio de curvatura do 1º Vertical

- Da Figura extrai-se a relação entre o raio de curvatura do 1º Vertical e o raio do paralelo:

$$P = N\sin(90º - \varphi) = N\cos\varphi$$



- Substituindo na expressão do raio do paralelo, o valor de x

$$x = P = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}$$

vem

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}} = \frac{a}{W} = \frac{c}{V}$$ com $$c = \frac{a^2}{b};\ \ \mathrm{V} = \frac{a}{b}\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}$$

PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

2.3.3 Raio de curvatura de secção α

- A *Fórmula de Euler* dá-nos a curvatura de uma qualquer secção normal em função das curvaturas das secções principais:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\theta}{\rho_1} + \frac{\sin^2\theta}{\rho_2}$$

onde ρ é o raio de curvatura arbitrário, ρ1 e ρ2, os raios de curvatura principais, respectivamente, máximo e mínimo, e θ é o ângulo medido a partir da secção principal de maior raio de curvatura;

- Como N é maior que M, α=90º-θ, e $\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{N} + \frac{\cos^2\alpha}{M}$
- Resultado o raio de curvatura da secção normal de azimute α

$$R_\alpha = \frac{MN}{N\cos^2\alpha + M\sin^2\alpha}$$

PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

2.3.4 Outros raios de curvatura

• <u>*Raio médio Gaussiano*</u> é definido pelo valor médio integral de R ao longo da variação de azimute de 0º a 360º:

$$R = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_\alpha d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{MN}{N\cos^2\alpha + M\sin^2\alpha} d\alpha$$

$$R = \sqrt{MN} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2\varphi}$$

• Raio da esfera com a média dos 3 raios do elipsóide:

$$R = \frac{a+a+b}{3} = a\left[\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{3}\right]$$

PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

2.3.4 Outros raios de curvatura

• Raio da esfera com a mesma área do elipsóide:

$$4\pi R_A^2 = \Sigma$$

$$R_A = a\left(1 - \frac{e^2}{6} - \frac{17}{360}e^4 - \frac{67}{3024}e^6 - \cdots\right)$$

• Raio da esfera com o mesmo volume do elipsóide:

$$V_E = \frac{4}{3}\pi a^2 b \qquad V_S = \frac{4}{3}\pi R_V^3$$

$$R_V = \sqrt[3]{a^2 b} = a\left(1-e^2\right)^{1/6}$$

PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

2.3.4 Outros raios de curvatura

- Para os parâmetros do sistema geodésico GRS80, obtêm-se os seguintes valores dos diferentes raios:

$$R_m = 6371008.7714\,m$$

$$R_A = 6371007.1810\,m$$

$$R_V = 6371000.7900\,m$$

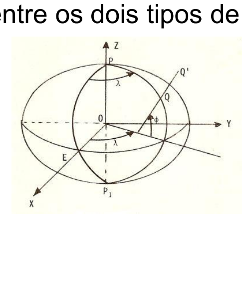
- Dada a pequena diferença entres os diferentes valores, usa-se simplesmente o valor:

$$R = 6371\,km$$

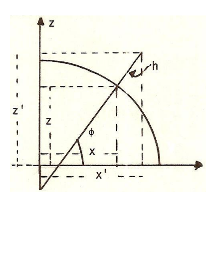
PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

3. Coordenadas Rectangulares espaciais

- Ao elipsóide está associado um sistema de eixos tri-ortogonais, em relação ao qual se estabelece o terno de coordenadas (X,Y,Z);
- Dada uma posição acima do elipsóide, definida em coordenadas geodésicas (ϕ,λ,h), é possível definir a relação entre os dois tipos de coordenadas;



$$\begin{cases} X = x' \cos\lambda \\ Y = x' \sin\lambda \\ Z = z' \end{cases}$$



$$\begin{cases} X = (N+h)\cos\phi\cos\lambda \\ Y = (N+h)\cos\phi\sin\lambda \\ Z = \left(N(1-e^2)+h\right)\sin\phi \end{cases}$$

PROPRIEDADES DO ELIPSÓIDE

3.1 Conversão de coordenadas geodésicas (sentido inverso)

$$\lambda_p = arctg\left(\frac{y_p}{x_p}\right)$$

$$\varphi_p = arctg\left(\frac{z_p + e^2 N \, sen\,\varphi}{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}}\right) \qquad tg(\varphi_0) = \frac{1}{(1-e^2)} \cdot \frac{z_p}{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}}$$

$$h_p = \frac{\sqrt{x_p^2 + y_p^2}}{cos\,\varphi} - N$$

- A determinação de φ é feita por um processo iterativo, pois $\varphi_p = \varphi(\varphi_p)$ é uma função recursiva