Campo Gravítico da Terra

4. Campo Gravítico Normal

- A melhor aproximação da Terra é o Elipsóide de revolução;
- Apesar de a Terra não ser um elipsóide exacto, o *campo gravítico de um elipsóide* é *de grande aproximação* e é de *fácil representação matemática*;
- Os *desvios* do seu campo em relação ao campo gravítico terrestre são tão pequenos que *podem ser considerados lineares*;
- O campo gravítico "***normal***", assim designado, é então usado como *uma boa aproximação do campo gravítico da Terra*;
- Desta forma resolve-se o grande problema da não-linearidade na determinação do campo gravítico terrestre.

Campo Gravítico da Terra

4. Campo Gravítico Normal

- O campo gravítico terrestre pode ser dividido em duas componentes: o *campo gravítico normal* do elipsóide de referência e um *campo gravítico perturbador* ou anómalo;

$$W(x,y,z) = U(x,y,z) + T(x,y,z)$$

- Isto simplifica a determinação do campo gravítico terrestre, que caso contrário, seria muito difícil de resolver;
- Esta aproximação constitui a *chamada linearização do problema de fronteira da geodesia física*;

Campo Gravítico da Terra

4.1 Potencial Normal

- Sendo o potencial normal definido por

$$U = U(x, y, z)$$

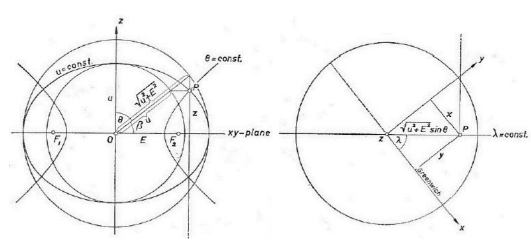
o elipsóide de referência é uma superfície de nível $U=U_0$, e corresponde a uma aproximação ao geóide, $W(x,y,z)=W_0$;

- Como o elipsóide de nível é uma superfície equipotencial do campo gravítico normal, ao atribuir-se a massa M_T ao elipsóide, o seu *potencial normal U fica perfeitamente determinável*;
- A distribuição das respectivas massas é irrelevante e não necessita de ser conhecida (Teorema de Stokes);
- Essa distribuição, para efeitos de compreensão, pode ser considerada homogénea;

Campo Gravítico da Terra

4.1 Potencial Normal

- Coordenadas elipsoidais (u,θ,λ):



com θ=90º- β, sendo β a latitude reduzida e E a excentricidade linear

$$\begin{cases} x = \sqrt{u^2 + E^2}\,\sin\theta\cos\lambda \\ y = \sqrt{u^2 + E^2}\,\sin\theta\sin\lambda \\ z = u\cos\theta \end{cases}$$

$$E^2 = a^2 - b^2$$

Campo Gravítico da Terra

4.1 Potencial Normal

- A componente gravitacional V do potencial normal U é harmónico no exterior do elipsóide S_0;
- O potencial V tem simetria rotacional, logo não depende da longitude λ; isto significa que os termos harmónicos não zonais, os que dependem de λ serão todos nulos;
- Assim temos,

$$V(u,\beta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q_n\left(i\frac{u}{e}\right)}{Q_n\left(i\frac{b}{e}\right)}A_nP_n(\sin\beta)$$

onde Q_n são as funções de Legendre de 2º tipo, e A_n são coeficientes harmónicos

Campo Gravítico da Terra

4.1 Potencial Normal

- O potencial centrífugo respectivo, Φ, é dado por:

$$\Phi=\frac{1}{2}\omega^2\left(x^2+y^2\right)=\frac{1}{2}\omega^2\left(u^2+E^2\right)\cos^2\beta$$

- E o potencial normal resulta, finalmente, da adição do potencial gravitacional normal com o potencial centrífugo

$$U(u,\beta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Q_n\left(i\frac{u}{E}\right)}{Q_n\left(i\frac{b}{E}\right)}A_nP_n(\sin\beta)+\frac{1}{2}\omega^2\left(u^2+E^2\right)\cos^2\beta$$

Campo Gravítico da Terra

4.1 Potencial Normal

• Após algum cálculo de simplificação obtém-se o potencial normal no exterior do elipsóide de referência:

$$U(u,\beta)=\frac{GM}{E}tg^{-1}\left(\frac{E}{u}\right)+\frac{1}{2}\omega^2a^2\frac{q}{q_0}\left(sin^2\beta-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\omega^2\left(u^2+E^2\right)cos^2\beta$$

com $$q=\frac{1}{2}\left[\left(1+3\frac{u^2}{E^2}\right)tg^{-1}\frac{E}{u}-3\frac{u}{E}\right];\quad q_0=q(u=b)$$

• O respectivo valor do potencial sobre o elipsóide, U_0, assume uma expressão simples, que se relaciona com a massa M e ω:

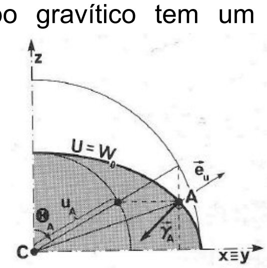
$$U_0=\frac{GM}{E}tg^{-1}\left(\frac{E}{b}\right)+\frac{1}{3}\omega^2a^2$$

Campo Gravítico da Terra

4.2 Gravidade Normal

• Qualquer modelo de campo gravítico tem um modelo de gravidade associado;

$$\gamma(u,\beta)=gradU(u,\beta)$$



• A chamada gravidade normal é dada pelo gradiente do potencial normal;

• Tem módulo igual à derivada normal do potencial e direcção perpendicular (normal) à superfície do elipsóide.

Campo Gravítico da Terra

4.2 Gravidade Normal

- Tomando o elemento linear em coordenadas elipsoidais:

$$ds^2 = w^2 du^2 + w^2 (u^2 + E^2) d\beta^2 + (u^2 + E^2)\cos^2 \beta d\lambda^2$$

$$w = \sqrt{\frac{u^2 + E^2 \sin^2 \beta}{u^2 + E^2}}$$

ao longo das 3 linhas de coordenadas, temos respectivamente,

$$ds_u = w du; \ \mathrm{ds}_\beta = w\sqrt{u^2 + E^2}\, d\beta; \ \mathrm{ds}_\lambda = \sqrt{u^2 + E^2} \cos\beta d\lambda$$

- Assim, resultam as componentes do vector gravidade normal

$$\gamma_u = \frac{\partial U}{\partial s_u} = \frac{1}{w}\frac{\partial U}{\partial u} \qquad \gamma_\beta = \frac{\partial U}{\partial s_\beta} = \frac{1}{w\sqrt{u^2 + E^2}}\frac{\partial U}{\partial \beta} \qquad \gamma_\lambda = \frac{\partial U}{\partial s_\lambda} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + E^2}\cos\beta}\frac{\partial U}{\partial \lambda}$$

Campo Gravítico da Terra

4.2 Gravidade Normal

- Porque o potencial U não depende da longitude, dada a simetria de rotação, a respectiva componente do gradiente é nula:

$$\gamma_\lambda = \frac{\partial U}{\partial s_\lambda} = 0$$

- Porque o elipsóide de nível tem um achatamento pequeno, a gravidade normal tem praticamente a mesma direcção de *u*, e a derivada em relação a β pode também ser considerada nula

$$\gamma_\beta = \frac{\partial U}{\partial s_\beta} \cong 0$$

- Resultando, finalmente

$$\gamma(u,\beta) = \sqrt{\frac{u^2 + E^2}{u^2 + E^2 \sin^2\beta}}\frac{\partial U}{\partial u}\vec{e}_u$$

Campo Gravítico da Terra

4.2 Gravidade Normal

- Quando se trabalha com a gravidade normal, é mais fácil calcular primeiro o seu valor sobre o elipsóide e depois corrigi-lo do valor de altitude;
- Calculando a derivada parcial do potencial U em relação à variável *u*, e fixando-se *u* com o valor de *b*, obtém-se a expressão da gravidade normal sobre o elipsóide:

$$\gamma_0 = \frac{GM}{a\sqrt{a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos\beta}}\left[1 + \frac{m}{kM}\frac{e'q'_0}{q_0}\sin^2\beta + \left(1 - m - \frac{m}{6}\frac{e'q'_0}{q_0}\right)\cos^2\beta\right]$$

com $m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}$ $\quad q' = 3\left(1 + \frac{3}{e'^2}\right)\left(1 - \frac{1}{e'}tg^{-1}e'\right) - 1$ $\quad e' = \frac{e}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$

Campo Gravítico da Terra

4.2 Gravidade Normal

- O valor da gravidade normal no equador (β=0º), é dado por

$$\gamma_a = \frac{GM}{ab}\left(1 - m - \frac{m}{6}\frac{e'q'_0}{q_0}\right)$$

- E nos nos pólos (β=90º), tem-se

$$\gamma_b = \frac{GM}{a^2}\left(1 + \frac{m}{3}\frac{e'q'_0}{q_0}\right)$$

- A partir da expressão geral, também se pode deduzir a chamada ***Fórmula de Somigliana*** (1929)

$$\gamma = \frac{a\gamma_a \cos^2\varphi + b\gamma_b \sin^2\varphi}{\sqrt{a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi}}$$

Campo Gravítico da Terra

4.2 Gravidade Normal

- Todas as fórmulas relativas ao campo normal sobre o elipsóide exprimem-se em termos das quatro constantes (a, f, ω, U_0);
- Desenvolvendo o valor da gravidade normal em série de potências e desprezando os termos de ordem elevada, obtém-se uma expressão da Formula Internacional da Gravidade

$$\boxed{\gamma = \gamma_a \left(1 + f^* \sin^2 \varphi - \frac{1}{4} f_4 \sin^2 2\varphi \right)}$$

onde, f é o achatamento geométrico do elipsóide e f^* é o achatamento gravítico

$$f = \frac{a-b}{a} \qquad f^* = \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a} \qquad f_4 = -\frac{1}{2} f^2 + \frac{5}{2} fm \qquad m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM}$$

Campo Gravítico da Terra

4.3 Teorema de Clairaut

- Considerando que $f^* = f_2 + f_4$

com $$f_2 = -f + \frac{5}{2} fm + \frac{1}{2} f^2 - \frac{26}{7} fm + \frac{15}{4} m^2$$

obtém-se, após substituição, $$f^* = -f + \frac{5}{2} m$$

- Tomando agora a aproximação $$\gamma_a = \frac{GM}{ab} \qquad m = \frac{\omega^2 a}{\gamma_a}$$

obtém-se finalmente a fórmula do Teorema de Clairaut

$$\boxed{f^* + f = \frac{5}{2} \frac{\omega^2 a}{\gamma_a}}$$

Campo Gravítico da Terra

4.3 Teorema de Clairaut

$$\boxed{f^* + f = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 a}{\gamma_a}}$$

- *"A soma do achatamento gravítico com o achatamento geométrico é igual a 5/2 da razão entre a força centrífuga e a gravidade no equador"*;
- Indica-nos uma forma de determinação do achatamento geométrico a partir de quantidades dinâmicas e gravíticas;
- ***Realça a dependência da forma geométrica da Terra em relação ao seu campo gravítico***.

Campo Gravítico da Terra

4.4 Fórmula Internacional da Gravidade

- Expressões numéricas, através da forma convencional da série até à expansão de ordem 2, para o cálculo directo da gravidade normal sobre o elipsóide (precisão de 0,1 mgal,).

$$\gamma_{1930} = 978049{,}0(1 + 0{,}0052884\sin^2\varphi - 5{,}9\text{x}10^{-6}\sin^2 2\varphi)$$

$$\gamma_{1967} = 978031{,}846(1 + 0{,}0053024\sin^2\varphi - 5{,}9\text{x}10^{-6}\sin^2 2\varphi)$$

$$\gamma_{1980} = 978032{,}677(1 + 0{,}0053024\sin^2\varphi - 5{,}8\text{x}10^{-6}\sin^2 2\varphi)$$

Campo Gravítico da Terra

4.4 Fórmula Internacional da Gravidade

- Expressão numérica completa do GRS80 até à expansão de ordem 8:

$$\gamma_{1980} = 978032{,}67715(1 + 0{,}0052790414 \sin^2\varphi + \\ 2{,}32718x10^{-5}\sin^4\varphi + 1{,}262x10^{-7}\sin^6\varphi + 7x10^{-10}\sin^8\varphi)$$

- Gravidade normal para a altitude h

$$\gamma_h = \gamma_0\left[1 - \frac{2}{a}\left(1 + f + m - 2f\sin^2\varphi\right)h + \frac{3}{a^2}h^2\right]$$

Campo Gravítico da Terra

4.5 Gradiente vertical da gravidade

- Derivando a expressão da gravidade normal em ordem a H, obtém-se a expressão

$$\frac{\partial\gamma}{\partial \boldsymbol{H}} = -2\gamma \boldsymbol{J}^N - 2\omega^2$$

onde J^N é o raio de curvatura média do elipsóide ((ρ+N)/2)

- Com algum cálculo e substituindo-se os respectivos valores, chega-se a $\left.\frac{\partial\gamma}{\partial \boldsymbol{H}}\right|_0 \cong -0.308745(1 - 0.001415\sin^2\varphi)\, mGal/m$

- O seu valor médio aproximado de $\left.\frac{\partial\gamma}{\partial \boldsymbol{H}}\right|_0 \cong -0.3086\ mGal/m$ é próximo do gradiente médio da gravidade terrestre.