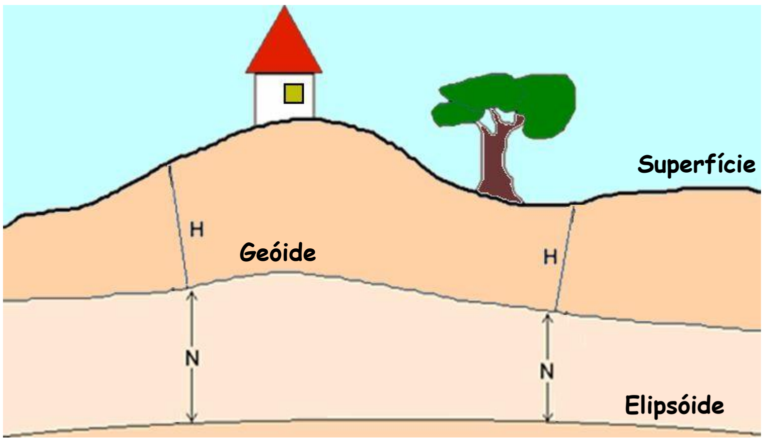
GEÓIDE

1. Geóide

- Na definição da *Forma da Terra* recorre-se a dois conceitos: o da *superfície topográfica* (superfície sólida da Terra) e o da *superfície do geóide* (superfície equipotencial de referência);
- Dada as dimensões da Terra, estas superfícies são relativamente próximas;
- Como as superfícies equipotenciais, em geral, reflectem a forma do campo gravítico, para a Geodesia é *o geóide que define a forma mais rigorosa da Terra*;
- A própria caracterização geométrica da superfície topográfica, dada pela altitude, é definida rigorosamente a partir da superfície do geóide;
- À Geodesia, é essa a forma que interessa, pois é a partir dela que se define a figura do elipsóide de revolução (2ª aproximação) que serve como referência no posicionamento geodésico;

GEÓIDE

1. Geóide



GEÓIDE

1.1 Geóide para quê?

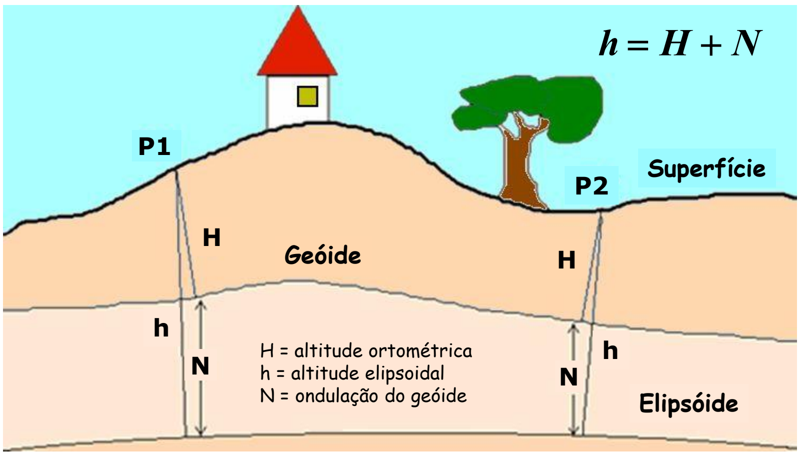
- Na Geodesia, o geóide servirá, essencialmente, dois propósitos:

  1- Definir a forma da Terra, e consequentemente, dar forma ao elipsóide de revolução – datum planimétrico;

  2- Definir o sistema de referência das altitudes ortométricas – datum altimétrico global;

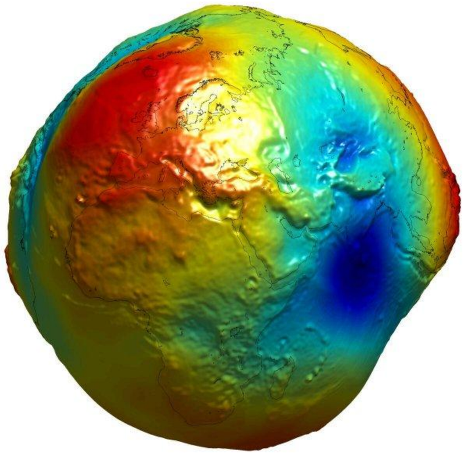
GEÓIDE

1.2 Ondulação do Geóide



GEÓIDE

1.2 Ondulação do Geóide



É mais irregular uma bola de bilhar que a própria superfície do geóide!

Bola bilhar:

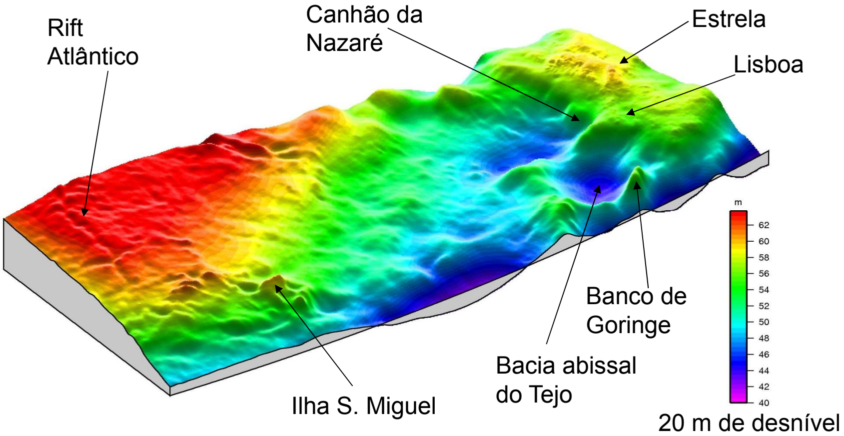
0.05mm / 30mm = 0.16%

Geoide:

100m / 6371000m = 16 ppm

GEÓIDE

1.2 Ondulação do Geóide

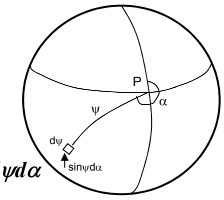


20 m de desnível máximo

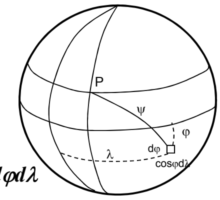
GEÓIDE

1.3 Solução pelo Integral Stokes

- A solução da ondulação do geóide mais comum é a solução dada pela Formula Integral de Stokes;
- Existem duas formas explicitas do integral de Stokes, uma usa *coordenadas polares esféricas* (ψ,α), a outra usa as *coordenadas geodésicas* (λ,φ);



$d\sigma = \sin\psi d\psi d\alpha$



$d\sigma = \cos\varphi d\varphi d\lambda$

Distribuição em Template (ψ,α) Distribuição em Grelha (λ,φ)

GEÓIDE

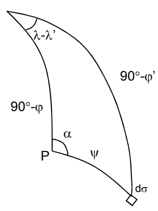
1.3 Solução pelo Integral Stokes

- *<u>Em coordenadas polares esféricas</u> (método de template)*:

$$N_P(\varphi,\lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma}\int_{\alpha=0}^{2\pi}\int_{\psi=0}^{\pi}\Delta g(\psi,\alpha)S(\psi)\sin\psi d\psi d\alpha$$

- *<u>Em coordenadas geodésicas</u> (método de grelha)*:

$$N_P(\varphi,\lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma}\int_{\lambda'=0}^{2\pi}\int_{\varphi'=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Delta g(\varphi',\lambda')S(\psi)\cos\varphi' d\varphi' d\lambda'$$



Com $S(\psi) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} - 6\sin\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos(\psi) - 3\cos(\psi)\ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)$

Onde $\psi = \cos^{-1}\left(\sin\varphi\sin\varphi' + \cos\varphi\cos\varphi'\cos(\lambda'-\lambda)\right)$

GEÓIDE

1.3 Solução pelo Integral Stokes

- Na prática o cálculo da ondulação do geóide pela fórmula de Stokes, resume-se a um duplo somatório do produto da anomalia da gravidade de cada ponto da grelha pelo valor da função de distância de Stokes;
- Para o caso mais comum de dados em grelha, de dimensão nxm e espaçamento $\Delta\varphi$ x $\Delta\lambda$, o valor de N em cada ponto é dado por:

$$N(\varphi_l,\lambda_k)=N_i(\varphi_l,\lambda_k)+N_e(\varphi_l,\lambda_k)$$

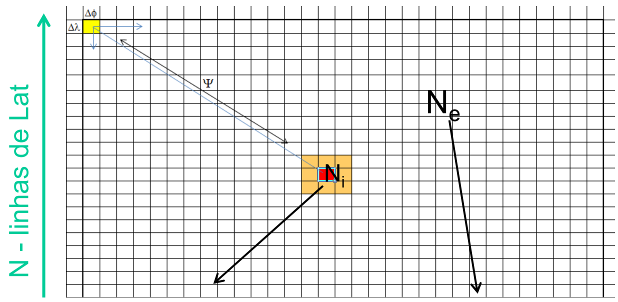
Com $N_i(\varphi_l,\lambda_k)=\frac{S_0}{\gamma}\Delta g(\varphi_l,\lambda_k)$ onde S_0 é o raio da zona mais próxima do ponto

e $$N_e(\varphi_l,\lambda_k)=\frac{R}{4\pi\gamma}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{i=0}^{M-1}\Delta g(\varphi_j,\lambda_i)\cos\varphi_j S(\varphi_l,\lambda_k,\varphi_j,\lambda_i)\Delta\varphi\Delta\lambda$$

GEÓIDE

1.3 Solução pelo Integral Stokes

- Integração numérica da Fórmula de STOKES – dados em GRELHA



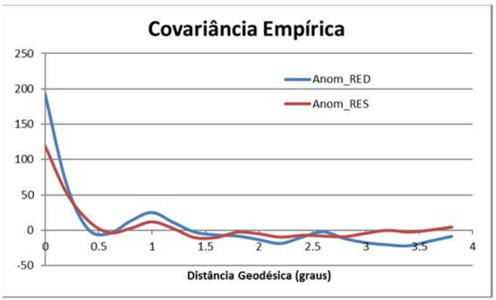
$$N(\varphi_l,\lambda_k)=\frac{S_0}{\gamma}\Delta g(\varphi_l,\lambda_k)+\frac{R}{4\pi\gamma}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{M}\Delta g(\varphi_j,\lambda_i)S(\varphi_l,\lambda_k,\varphi_j,\lambda_i)\cos\varphi_j\Delta\varphi\Delta\lambda$$

M - colunas de Lon

GEÓIDE

1.3 Solução pelo Integral Stokes

- A integração numérica da Fórmula de Stokes é limitada, em extensão, pela convergência da função covariância dos dados (distância de correlação mínima)



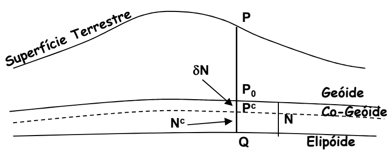
$$N(\varphi_l,\lambda_k)=\frac{S_0}{\gamma}\Delta g(\varphi_l,\lambda_k)+\frac{R}{4\pi\gamma}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{M}\Delta g(\varphi_j,\lambda_i)S(\varphi_l,\lambda_k,\varphi_j,\lambda_i)\cos\varphi_j\Delta\varphi\Delta\lambda$$

GEÓIDE

1.3 Solução pelo Integral Stokes

- Para que o resultado seja válido, as anomalias da gravidade usadas na Fórmula de Stokes devem corresponder a valores reduzidos à superfície do geóide regularizado;
- Logo, o resultado do cálculo da fórmula de Stokes, com as anomalias reduzidas, conduz-nos, não ao geóide, mas a uma superfície designada por co-geóide, N^C;
- O valor final da ondulação do geóide é dado por $N = N^c + \delta N$ onde δN representa o efeito indirecto dado por

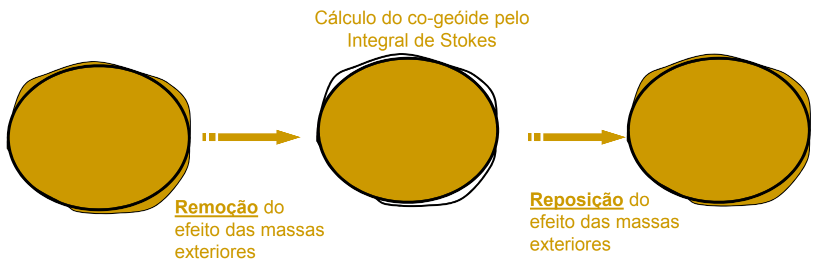
$$\delta N = \frac{\delta W}{\gamma} = \frac{\pi G \rho_0 H_P^2}{\gamma}$$



GEÓIDE

1.3 Solução pelo Integral Stokes

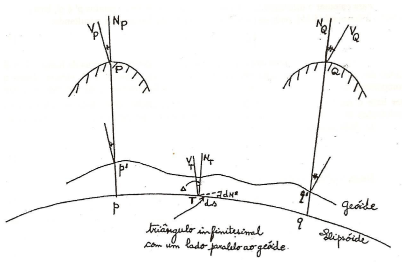
- Na prática, são _calculados os efeitos_ de atracção gravitacional dessas massas em excesso _a retirar dos valores observados de anomalias_, e posteriormente, _repostos sobre a forma de ondulações_ (efeito indirecto);
- É usada a chamada "***Técnica de Remoção - Reposição***".



GEÓIDE

1.4 Método Astro-Geodésico

- Este método de determinação baseia-se na utilização simultânea de observações astronómicas (latitude e longitude) e das respectivas coordenadas geodésicas – observações astro-geodésicas;
- Sendo P e Q projectados sobre o elipsóide, a diferença de ondulação do geóide entre P e Q resulta da integração do desvio total da vertical ao longo do arco de elipsóide definido pelas projecções ortogonais p e q;

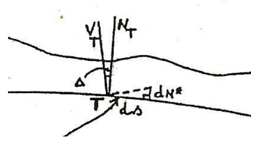


GEÓIDE

1.4 Método Astro-Geodésico

- Esta determinação parte do pressuposto de que o desvio Δ varia linearmente ao longo do arco PQ;
- O desvio total da vertical num ponto genérico t sobre o arco pq, no qual se define o triângulo infinitesimal de comprimento ds é dado por:

$$\Delta = \xi \cdot \cos\alpha_{PQ} + \eta \cdot sen\alpha_{PQ}$$



$$\Delta = (\Phi_T - \varphi_T) \cdot \cos\alpha_{PQ} + (\Lambda_T - \lambda_T) \cdot \cos\varphi_T \cdot sen\alpha_{PQ}$$

- A diferença de ondulação de geóide dN* medida nesse triângulo infinitesimal de vértice T será dada por

$$dN^* = -tg\Delta \cdot ds \approx -\Delta \cdot ds$$

GEÓIDE

1.4 Método Astro-Geodésico

- Integrando esta expressão diferencial ao longo do arco elipsoidal, resulta a diferença de ondulação do geóide entre P e Q $$\Delta N_{PQ} = N^*_{q'} - N^*_{p'} = -\int_{pq} \Delta \cdot ds$$
- O integral anterior só pode ser calculado com o conhecimento da função Δ= Δ(s), como ela não é conhecida, pode ser estimada pela média dos valores
- Nessa hipótese podemos então escrever $\Delta N_{p'q'} = -\dfrac{\Delta_{p'} + \Delta_{q'}}{2} \cdot s_{p'q'}$

ou $$\Delta N_{p'q'} = -\frac{(\xi''_{p'} + \xi''_{q'}) \cdot \cos\alpha_{PQ} + (\eta''_{p'} + \eta''_{q'}) \cdot sen\alpha_{PQ}}{2 \cdot 206265''} \cdot s_{p'q'}$$

onde os valores de desvio da vertical devem ser reduzidos ao geóide;

GEÓIDE

1.4 Método Astro-Geodésico

- A correcção de redução dos desvios da vertical ao geóide passa pela seguinte redução das coordenadas astronómicas

$$\Phi_{geoid} = \Phi_{superf} - 0.17'' \cdot H_{km} \cdot sen2\Phi$$

$$\Lambda_{geoid} = \Lambda_{superf}$$

- A precisão obtida para ΔN^* vai depender, principalmente de dois factores:

1 – Da precisão das observações astronómicas;

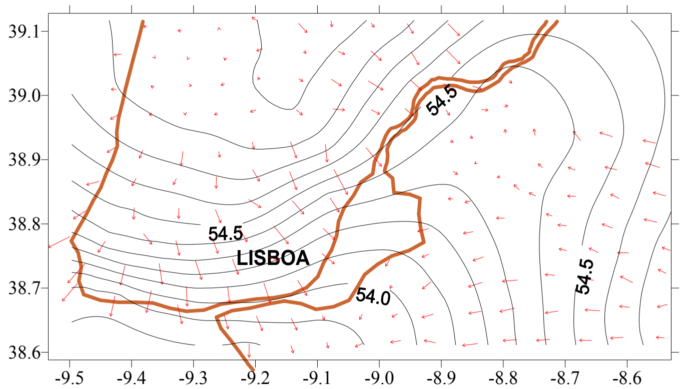
2 – Da distância entre as estações astronómicas, quanto mais próximas menor o erro introduzido pela aproximação da fórmula de cálculo;

Perfil Este-Oeste: $\sigma = 2 \cdot \sqrt{\frac{s_{(km)}}{1000}}(m)$ Perfil Norte-Sul: $\sigma = 1{,}5 \cdot \sqrt{\frac{s_{(km)}}{1000}}(m)$

GEÓIDE

1.4 Método Astro-Geodésico

- Desvios da vertical sobre modelo gravimétrio do geóide na Bacia do Tejo



GEÓIDE

1.4 Método Astro-Geodésico

- Sendo observados desvios da vertical em todos os vértices geodésico, o cálculo de ondulação de geóide passa pelo ajustamento por mínimos quadrados das diferenças

$$f(x_o) + A \cdot \delta = l_0 + \nu$$

$$\Delta N_{calc} + correcção = \Delta N_{obs} + \nu_{\Delta N}$$

- Esta equação de observação de diferenças de ondulação de geóide pode escrever-se na forma

$$dN_j - dN_i = \Delta N_{obs} - \left(\bar{N}_j - \bar{N}_i\right) + \nu_{ij}$$

- Resultando para caso de uma rede com n diferenças observadas em q estações, o sistema de equações lineares

$$A \cdot d\widehat{N} = -w + \nu \qquad \hat{N} = \bar{N} + d\hat{N}$$

GEÓIDE

1.5 Observações finais

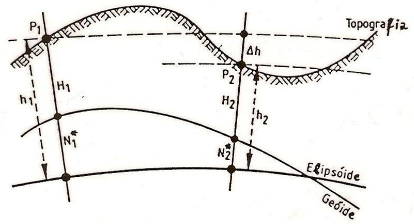
- Para além dos métodos aqui apresentados, existem mais métodos de determinação do geóide:
  - Colocação por Mínimos Quadrados;
  - Molodensky;
  - Coeficientes das Harmónicas Esféricas;
  - Abordagem do Espaço Gravidade;
- O geóide adquiriu nas últimas décadas uma importância acrescida, pelo aparecimento das técnicas de posicionamento por satélite;
- Hoje é possível realizar nivelamento de precisão recorrendo ao GNSS e a um modelo preciso de geóide;
- Os modelos podem ser globais, regionais ou locais, sendo os modelos globais menos precisos e representados por harmónicas esféricas, como é o caso do EGM2008.

GEÓIDE

1.6 Relações entre parâmetros altimétricos

- As altitudes usadas em redes geodésicas, e agora comummente observadas com o sistema GPS, são puramente geométricas;
- Contudo, as altitudes que mais interessam à geodesia e às suas aplicações (ortométricas ou normais) estão relacionadas com o campo gravítico

$$h_1 = H_1 + N_1^*$$
$$h_2 = H_2 + N_2^*$$
$$\Delta h = \Delta H + \Delta N^*$$



GEÓIDE

1.6 Relações entre parâmetros altimétricos

- Desta relação podemos formular vários tipos de problemas:
  - Medindo desníveis elipsoidais (por GPS) e tendo um modelo de geóide, podem-se transportar altitudes ortométricas:

$$H_2 = H_1 + \Delta H = H_1 + \Delta h - \Delta N^*$$

  - Tendo-se simultaneamente nivelamento geométrico e altitudes elipsoidais (GPS), pode-se determinar directamente a ondulação:

$$N_1^* = h_1 - H_1$$

  - Sem contar com as actuais técnicas espaciais, as altitudes elipsoidais necessárias no sistema geodésico são determinadas com nivelamento e modelo de geóide $h_1 = H_1 + N_1^*$

  - Havendo deslocamentos verticais ao longo do tempo, as variações podem ser feitas quer por nivelamento quer por GPS

$$\Delta h_{t_i, t_{i+1}} = \Delta H_{t_i, t_{i+1}}$$