Campo Gravítico da Terra

3.9 Camada de Green e Teorema de Stokes

- Teorema de Stokes: "*sendo S uma superfície equipotencial de um campo Newtoniano, contendo no seu interior todas as massas atraentes, se se modificar a distribuição das massas, sem alterar a sua totalidade, por forma que S continue a ser uma superfície equipotencial exterior às massas atraentes, o potencial num ponto exterior a S permanece inalterável*".

- A *Camada de Green* é uma camada sólida (esfera oca) com uma densidade $\sigma = -\frac{1}{4\pi G}\frac{\partial V}{\partial n}$
  capaz de gerar um potencial igual ao potencial gravítico

$$G\iiint_{\upsilon}\frac{\rho}{l}d\upsilon = G\iint_{s}\frac{\sigma}{l}ds$$

Campo Gravítico da Terra

3.9 Camada de Green e Teorema de Stokes

- O potencial exterior de uma esfera homogéneo, $V=GM/l$, é um exemplo da validade do *Teorema de Stokes*;
- Todas as esferas homogéneas concêntricas com a mesma massa total M, independentemente da sua dimensão, geram o mesmo potencial;
- Juntamente com a camada de Green, este é um exemplo particular do *Teorema de Stokes*, ***uma função harmónica no exterior de S é unicamente determinada pelos seus valores em S***;
- Existem infinitas distribuições de massa que geram o mesmo potencial;

Campo Gravítico da Terra

3.9 Camada de Green e Teorema de Stokes

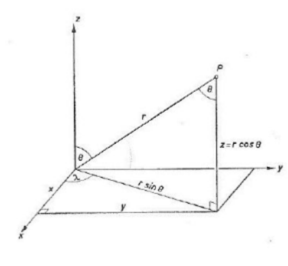
- Por estas razão é impossível a determinação da distribuição das massas a partir do seu potencial externo;
- Este define-se como o ***problema inverso*** da teoria do potencial e não tem solução única;
- Este problema surge na prospecção geofísica: *as massas invisíveis são inferidas a partir das anomalias gravimétricas*, dados sísmicos e com informação geológica adicional;
- Na geodesia, o resultado do Teorema de Stokes é aplicado na *determinação do geóide*, como um problema de fronteira: *determinar a função harmónica W no exterior de S a partir de valores definidos sobre S.*

Campo Gravítico da Terra

3.10 Coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\lambda \\ y = r \sin\theta \sin\lambda \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = tg^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \\ \lambda = tg^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$



Campo Gravítico da Terra

3.10 Coordenadas esféricas

- Elemento linear ***ds*** em coordenadas esféricas

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial x}{\partial \lambda}d\lambda$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial y}{\partial \lambda}d\lambda$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial z}{\partial \lambda}d\lambda$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\lambda^2$$

Nota: as coordenadas esféricas são ortogonais, logo não há produtos cruzados

Campo Gravítico da Terra

3.11 Equação de Laplace

- Laplaceano em coordenadas ortogonais arbitrárias

$$\Delta V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial V}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial V}{\partial q_3}\right)\right]$$

Com o elemento linear dado por:

$$ds^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2$$

Introdução à Geodesia – Aula 14 FCUL-EG

Campo Gravítico da Terra

3.11 Equação de Laplace

- Coordenadas esféricas $q_1=r$, $q_2=\theta$, $q_3=\lambda$;
- Coeficientes da expressão de elemento linear das coordenadas ortogonais arbitrárias: $h_1=1$, $h_2=r$, $h_3=r.\sin\theta$
- Substituindo na forma anterior do Laplaciano e diferenciando, obtemos a *Equação de Laplace* em coordenadas esféricas:

$$r^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+2r\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}+\cot\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}=0$$

Campo Gravítico da Terra

3.12 Harmónicas esféricas

- Considerando a função do Potencial Gravitacional definida por

$$V(r,\theta,\lambda)=f(r)Y(\theta,\lambda)$$

É possível separar a *Equação de Laplace* na forma anterior em duas equações diferenciais

$$\frac{1}{f}f''(r)+2rf'(r)-n(n+1)f(r)=0$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2}+\cot\theta\frac{\partial V}{\partial \theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}+n(n+1)Y=0$$

Campo Gravítico da Terra

3.12 Harmónicas esféricas

- As soluções da 1ª equação diferencial ordinária são do tipo:

$$f(r) = r^{n} \quad \text{ou} \quad f(r) = r^{-(n+1)}$$

- Tomando $Y_n(\theta, \lambda)$ como solução da 2ª equação diferencial às derivadas parciais, a *Equação de Laplace*, $\Delta V=0$, tem as solução:

$$V = r^{n} Y_n(\theta, \lambda) \quad \text{e} \quad V = \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{r^{n+1}}$$

- Estas funções são designadas por *<u>harmónicas esféricas sólidas</u>*, enquanto que as funções $Y_n(\theta, \lambda)$ são designadas por *<u>harmónicas esféricas de superfície</u>*

Campo Gravítico da Terra

3.12 Harmónicas esféricas

- Se as seguintes funções são solução da *Equação de Laplace*:

$$V = r^{n} Y_n(\theta, \lambda) \quad \text{e} \quad V = \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{r^{n+1}}$$

então qualquer combinação linear destas soluções

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} r^{n} Y_n(\theta, \lambda) \quad \text{e} \quad V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{r^{n+1}}$$

é também uma solução da *Equação de Laplace*, pois Δ é um operador linear (a equação diferencial é linear)

Campo Gravítico da Terra

3.12 Harmónicas esféricas

• Considerando a função harmónica esférica de superfície decomposta pelo seguinte produto

$$Y(\theta,\lambda) = g(\theta)h(\lambda)$$

É possível separa a 2ª diferencial, novamente, em duas equações diferenciais ordinárias

$$\sin\theta \cdot g''(\theta) + \cos\theta \cdot g'(\theta) + \left[n(n+1) - \sin\theta - \frac{m^2}{\sin\theta} \right] g(\theta) = 0$$

$$h''(\lambda) + m^2 h(\lambda) = 0$$

Campo Gravítico da Terra

3.12 Harmónicas esféricas

• Da resolução destas equações diferenciais ordinárias resultam as funções harmónicas esféricas de superfície, soluções da anterior 2ª equação diferencial

$$Y_n(\theta,\lambda) = Pnm(\cos\theta)\cos m\lambda$$

$$Y_n(\theta,\lambda) = Pnm(\cos\theta)\sin m\lambda$$

• Se estas funções são solução de um equação diferencial linear, também o é qualquer combinação linear destas funções

$$Y_n(\theta,\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[a_{nm} P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda \right]$$

Campo Gravítico da Terra

3.12 Harmónicas esféricas

- Inserindo estas funções na combinação linear das harmónicas esféricas sólidas, obtém-se *o desenvolvimento em harmónicas esféricas do Potencial Gravitacional*, como solução da *Equação de Laplace* para o espaço exterior

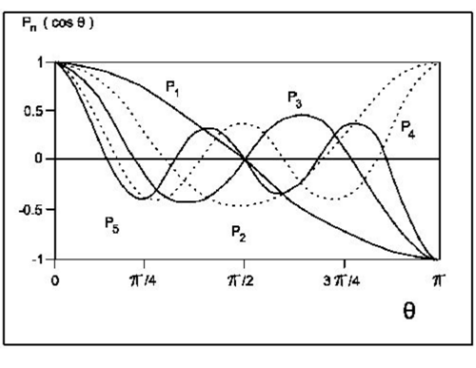
$$V_e(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \left[a_{nm} P_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda + b_{nm} P_{nm}(\cos\theta)\sin m\lambda \right]$$

- Nesta expressão:
  - a_{nm} e b_{nm} são constantes arbitrárias, chamadas *coeficientes harmónicos*;
  - $P_{nm}(t)$ são *funções associadas de Legendre*;
  - $\boldsymbol{n}$ representa o grau e $\boldsymbol{m}$ a ordem do desenvolvimento da série.

Campo Gravítico da Terra

3.12 Harmónicas esféricas

- Exemplos de Polinómios de Legendre (c/ ordem *m*=0)



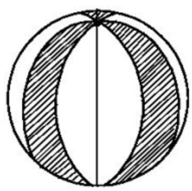
$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(t^2 - 1\right)^n$$

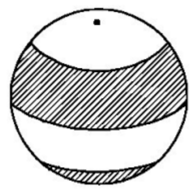
$$P_1(t) = \cos\theta;\ P_2(t) = \frac{3}{4}\cos 2\theta + \frac{1}{4};\ P_3(t) = \frac{5}{8}\cos 3\theta + \frac{3}{8}\cos\theta;\ P_4(t) = \frac{35}{64}\cos 4\theta + \frac{5}{16}\cos 2\theta + \frac{9}{64};\ \text{etc.}$$

Campo Gravítico da Terra

3.12 Harmónicas esféricas

- Ilustração de algumas harmónicas esféricas de superfície (*zonal, sectorial e tesseral*)





$P_3(\cos\theta)$

$P_{0,5}(\cos\theta)\cos 5\lambda$

$$P_{nm}(t) = \left(1 - t^2\right)^{m/2} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m}$$

$P_{12,5}(\cos\theta)\sin 5\lambda$

Campo Gravítico da Terra

3.12 Harmónicas esféricas

- O desenvolvimento em harmónicas esféricas representa uma *decomposição espectral em estruturas de campo de comprimento de onda 360º/n* (resolução 180º/n);
- Os polinómio de Legendre (P_{n0}) representam um campo rotacional simétrico dividindo a esfera em zonas de latitude, onde o grau ***n*** estabelece a simetria em relação ao equador;
- O termo de grau zero corresponde ao potencial de uma Terra esférica e homogénea;
- As harmónicas esféricas são funções ortogonais na superfície esférica S, para qualquer ponto (θ, λ).

Campo Gravítico da Terra

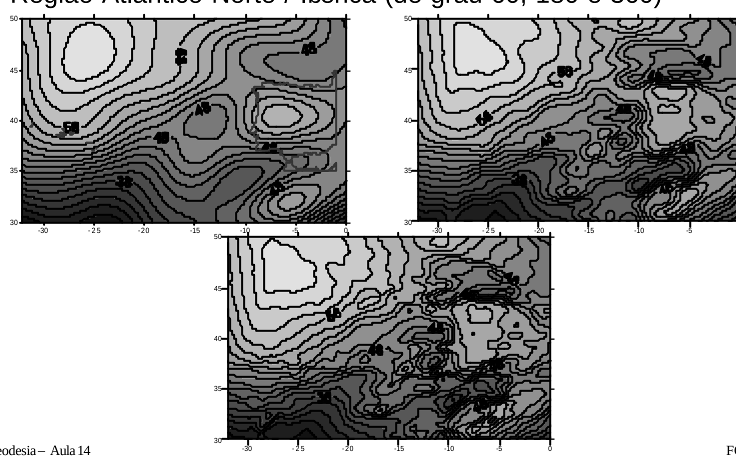
3.12 Harmónicas esféricas

- As harmónicas esféricas são um tipo de solução da *Equação de Laplace*, $\Delta V=0$;
- Como solução da *Eq. Laplace* elas permitem exprimir o potencial gravitacional em séries de desenvolvimento de harmónicas esféricas;
- Os modelos globais do campo gravítico, e implicitamente do geóide, são soluções deste tipo, representadas pelos respectivos coeficientes de harmónicas esféricas;
- EGM96 é um modelo geopotencial utilizado, e é representado pelos coeficientes harmónicos até ao grau 360;

Campo Gravítico da Terra

3.13 Ondulação do modelo EGM96

- Região Atlântico Norte / Ibérica (de grau 60, 180 e 360)



Campo Gravítico da Terra

3.13 Problemas de fronteira

- Problema de *Dirichlet* (*1º problema de valor-livre de fronteira*)

  - Determinar uma função V que seja harmónica ($\Delta V=0$) no exterior ou interior de uma superfície S, e que assuma <u>valores dados sobre essa fronteira</u>;

  valores de fronteira: $\overline{V}(R,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\lambda)$

  solução: $$V(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta,\lambda)$$

- Problema de *Neumann* (2º *problema de valor-livre de fronteira*)

  - Determinar uma função V que seja harmónica ($\Delta V=0$) no exterior ou interior de uma superfície S, e que verifique <u>valores da sua derivada normal</u>, $\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{r=R}$ <u>dados sobre essa fronteira</u>;

Campo Gravítico da Terra

3.13 Problemas de fronteira

- Problema de fronteira da Geodesia Física (*3º problema de valor-livre de fronteira*)

  - Determinar uma função V que seja harmónica ($\Delta V=0$) no exterior ou interior de uma superfície S, e que assuma como valores de fronteira <u>uma combinação linear de V e a sua respectiva derivada normal</u>:

  $$\left[hV + k\frac{\partial V}{\partial n}\right]_{r=R} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\lambda)$$

  solução: $$V_e(r,\theta,\lambda) = R\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\frac{Y_n(\theta,\lambda)}{n-1}$$

  - A fórmula integral que corresponde a esta solução do problema de fronteira da geodesia física é o conhecido <u>*Integral de Stokes*</u>.

Campo Gravítico da Terra

3.13 Problemas de fronteira

- Solução do problema de Dirichlet (*1º problema de fronteira*)

  - Um solução explicita do problema de Dirichlet para o espaço exterior da esfera, é dada pelo ***Integral de Poisson***:

$$V_e(r,\theta,\lambda) = \frac{R(r^2 - R^2)}{4\pi} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} \frac{V(R,\theta',\lambda')}{l^3} \sin\theta' \, d\theta' \, d\lambda'$$

com $$l = \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr\cos\psi}$$