# Campo Gravítico da Terra

## 5. Campo Gravítico Anómalo

- A relação entre o potencial gravítico e o potencial normal é dada por:

$$W(x, y, z) = U(x, y, z) + T(x, y, z)$$

- O *campo gravítico anómalo* ou *perturbador* é então definido pela diferença do campo gravítico terrestre com o *campo gravítico normal* do elipsóide de referência;

- Esta aproximação constitui a *chamada linearização do problema de fronteira da geodesia física;*

- O facto da diferença de potenciais ser uma quantidade pequena, permite aproximações lineares da função potencial T(r,θ,λ).



# Campo Gravítico da Terra

## 5.1 Potencial perturbador

- O potencial perturbador T descreve as irregularidades regionais e locais do potencial gravítico W;

- Devido à definição do campo gravítico normal, o potencial perturbador T satisfaz a equação de Laplace no exterior da Terra;

$$T(\vec{r}_A) = V(\vec{r}_A) + F(\vec{r}_A) - \left[\overline{V}(\vec{r}_A) + F(\vec{r}_A)\right] = V(\vec{r}_A) - \overline{V}(\vec{r}_A)$$

- Como Δ é um operador é linear, desprezando a atmosfera, o potencial perturbador é uma função harmónica em todo o espaço exterior à Terra :

$$D T(\vec{r}_A) = 0$$

# Campo Gravítico da Terra

## 5.1 Potencial perturbador

- Baseando-nos no desenvolvimento em harmónicas esféricas dos potenciais gravitacional terrestre e normal, obtemos a representação em harmónicas esféricas da função potencial T:

$$T(r,\theta,\lambda) = \frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n}\sum_{m=0}^{n}\left(\Delta C_{nm}\cos m\lambda + \Delta S_{nm}\sin m\lambda\right)P_{nm}(\cos\theta)$$

- Muitas vezes representada por:

$$T(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(r,\theta,\lambda)$$



# Campo Gravítico da Terra

## 5.1 Potencial perturbador

- Atendendo a que os termos de ordem 0 e 1 correspondem, respectivamente, à diferença de massas e diferença das coordenadas dos centros de massa

$$T_0 = \frac{GM_T}{r} - \frac{GM_E}{r} = \frac{G}{r}\delta M \qquad T_1 = \frac{GM}{r}\left[\Delta x P_{10}(t) + \left(\Delta y\cos\lambda + \Delta z\sin\lambda\right)P_{11}(t)\right]$$

- Considerando-se o elipsóide com massa $M_E = M_T$ e com seu centro coincidente ao centro de massa da Terra, os termos $T_0$ e $T_1$ são nulos, resultando:

$$T(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=2}^{\infty} T_n(r,\theta,\lambda)$$

# Campo Gravítico da Terra

## 5.2 Vector perturbador da gravidade

- Tal como acontece com os potenciais gravítico e normal, ao potencial perturbador também está associada uma aceleração de gravidade;
- Como $\vec{g} = gradW \qquad \vec{\gamma} = gradU$

  o vector perturbador da gravidade resulta por

$$\vec{\delta g} = grad\,(W - U) = gradT \equiv \left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

- O vector perturbador é então, em cada ponto, definido pela diferença

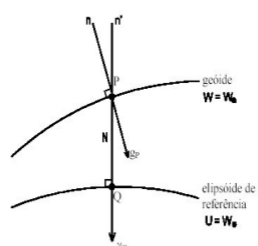
$$\vec{\delta g}(P) = \vec{g}(P) - \vec{\gamma}(P) = gradW - gradU$$



# Campo Gravítico da Terra

## 5.3 Anomalia da gravidade

- Comparemos a superfície do geóide definida por $W(x, y, z) = W_0$
  com a superfície do elipsóide definida por $U(x, y, z) = U_0$
- Assumindo o mesmo valor de potencial $W_0$=$U_0$, um ponto P sobre o geóide é projectado no ponto Q sobre o elipsóide através da sua normal;
- Considerando, respectivamente, o vector gravidade g sobre P e o vector gravidade normal γ sobre Q, o <u>*vector anomalia da gravidade*</u> é definido pela sua diferença:




$$\Delta\vec{g} = \vec{g}_P - \vec{\gamma}_Q$$

# Campo Gravítico da Terra

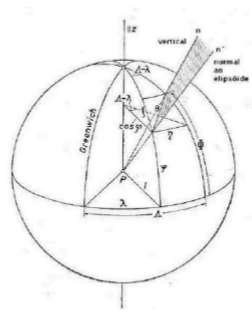
## **5.3** Anomalia da gravidade

- Este vector tem uma magnitude, designada por *anomalia da gravidade*

$$\Delta \boldsymbol{g} = \boldsymbol{g_P} - \gamma_{\boldsymbol{Q}}$$

- E uma direcção dada pelo desvio da vertical, cujas componentes são dadas por

$$\xi = \Phi - \varphi$$
$$\eta = (\Lambda - \lambda)\boldsymbol{\cos}\varphi$$




- A anomalia da gravidade resulta de **observações gravimétricas** e do cálculo de γ pela F.I.G., enquanto que, os desvios da vertical resultam de **observações astronómicas e geodésicas**



# Campo Gravítico da Terra

## **5.4** Fórmula Bruns

- Desenvolvendo em série de Taylor a função de potencial normal em torno do ponto Q sobre o elipsóide, tem-se

$$\boldsymbol{U_P} = \boldsymbol{U_Q} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{n}}\right)_{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{dn} + \cdots$$

- Substituindo na expressão do potencial gravítico em P a parte linear destes desenvolvimento, e tomando dn=N, tem-se

$$\boldsymbol{W_P} = \boldsymbol{U_P} + \boldsymbol{T_P} = \boldsymbol{U_Q} - \gamma\boldsymbol{N} + \boldsymbol{T_P}$$

- Impondo-se a condição $\boldsymbol{W_P} = \boldsymbol{U_Q} = \boldsymbol{W_0}$

  obtém-se $-\gamma\boldsymbol{N} + \boldsymbol{T_P} = \boldsymbol{0}$

# Campo Gravítico da Terra

## 5.4 Fórmula Bruns

- Resultando então a chamada *Fórmula de Bruns*:

$$\boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{T}}{\gamma}$$

- Esta fórmula relaciona directamente a ondulação do geóide com o valor do potencial perturbador, onde γ, a gravidade normal sobre o elipsóide, é uma mera constante.
- Esta fórmula constitui um resultado importante para a resolução do problema da determinação do geóide (problema de fronteira);
- Ao resolver o problema de fronteira determina-se o potencial perturbado T, e com esta fórmula sai directamente a ondulação do geóide.



# Campo Gravítico da Terra

## 5.5 Equação fundamental da geodesia física

- Desenvolvendo em série de Taylor a função de gravidade normal em torno do ponto Q sobre o elipsóide, tem-se

$$\gamma_{\boldsymbol{P}} = \gamma_{\boldsymbol{Q}} + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \boldsymbol{n}}\right)_{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{N} + \cdots$$

- Tomando a sua parte linear e tomando a sua diferença com o valor da gravidade g no ponto P

$$\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{P}} - \gamma_{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{P}} - \gamma_{\boldsymbol{Q}} + \frac{\partial \gamma}{\partial \boldsymbol{n}} \boldsymbol{N} = -\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{h}}$$

# Campo Gravítico da Terra

## 5.5 Equação fundamental da geodesia física

- Substituindo a expressão da anomalia da gravidade

$$-\frac{\partial T}{\partial h} = \Delta g_P - \frac{\partial \gamma}{\partial n} N$$

- Obtém-se assim, usando a fórmula de Bruns, a Equação Fundamental da Geodesia Física

$$\frac{\partial T}{\partial h} - \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial h} T + \Delta g_P = 0$$

- Esta é a equação que define a condição de fronteira na determinação do potencial gravítico da Terra no espaço exterior, e consequentemente, a determinação do geóide



# Campo Gravítico da Terra

## 5.6 3º Problema de Fronteira

- O 3º problema de fronteira é o ***problema geodésico de fronteira***, que na sua essência, é o problema da determinação da superfície do geóide – datum altimétrico;
- *Determinar a função potencial T que seja harmónica no espaço exterior à Terra e que verifique, sobre o geóide, a equação fundamental da geodesia*

$$\begin{cases} \Delta T = \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \\ \dfrac{\partial T}{\partial h} - \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\partial \gamma}{\partial h} T + \Delta g_P = 0 \end{cases}$$

- A solução, que através da F. de Bruns nos dá a ondulação do geóide, é uma solução da equação de Laplace que verifica a condição de fronteira dada pela E.F.G.F.

# Campo Gravítico da Terra

## **5.7** Expansão em harmónicas esféricas

- A equação fundamental pode ser escrita em aproximação esférica;
- Seja, $g = \frac{KM}{r^2}$ então $\frac{\partial g}{\partial h} = -\frac{2G}{R}$ tomando-se $\gamma$=G e r=R;
- Como d/dh=d/dr, vem a equação definida em aproximação esférica

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2}{R} T + \Delta g_P = 0$$

- Tomemos a expressão do potencial perturbado em harmónicas esféricas sobre o geóide

$$T(R,\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\theta,\lambda)$$



# Campo Gravítico da Terra

## **5.7** Expansão em harmónicas esféricas

- Derivado esta expressão em ordem a r, tem-se;

$$\delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) T_n(\theta,\lambda)$$

- Substituindo agora os dois desenvolvimentos na expressão modificada da equação fundamental

$$\Delta g_P = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R} T$$

- Obtém-se o desenvolvimento da anomalia da gravidade sobre o geóide em harmónicas esféricas

$$\Delta g = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) T_n(\theta,\lambda)$$

# Campo Gravítico da Terra

## **5.8** Fórmula de Stokes

- Stokes formulou em 1849, pela primeira vez de forma rigorosa, o problema da determinação da ondulação do geóide;
- Resolvendo a equação diferencial de fronteira definida sobre o geóide

$$-\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{R} T = \Delta g_P$$

obteve a solução

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g \, S(\psi) \, d\sigma$$

- Onde S(ψ) é a chamada função de Stokes e é definida por

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} - 6\sin\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos(\psi) - 3\cos(\psi)\ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)$$



# Campo Gravítico da Terra

## **5.8** Fórmula de Stokes

- Aplicando o teorema de Bruns T=N/G, onde G é o valor da gravidade sobre o elipsóide ($\gamma_Q$), obtém-se a chamada *fórmula* ou *integral de Stokes*

$$N = \frac{R}{4\pi G} \iint_{\sigma} \Delta g \, S(\psi) \, d\sigma$$

- Esta é <u>*a fórmula mais importante da geodesia física*</u>, pois permite determina directamente a <u>*ondulação do geóide*</u> a partir das <u>*anomalias da gravidade*</u> definidas sobre o geóide;
- Esta fórmula não é de fácil aplicação, já que a superfície terrestre não coincide com o geóide, e as anomalias da gravidade observadas não são definidos sobre o geóide;
- Isto implica que os <u>*valores de gravidade observados*</u> à superfície tenham de ser <u>*reduzidos ao nível geóide*</u>.