Ciências ULisboa
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Topologia

(Licenciatura em Matemática, 2007/2008)

Fernando Silva

1-jun-2021

A última revisão deste texto está disponível em
http://webpages.fc.ul.pt/~fasilva/top/

Este texto é uma revisão do texto de apoio para a disciplina de Topologia da licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa no ano letivo de 2007/2008.

Conteúdo

Capítulo 1

Preliminares

Ao longo deste texto, $\mathbb{F}$ representa o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais ou o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos; $\mathbb{R}^+$ é o conjunto dos reais positivos; $\mathbb{R}_0^+$ é o conjunto dos reais não negativos; $\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números racionais; $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros; $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais, isto é, números inteiros positivos; $\mathbb{N}_0$ é o conjunto dos números inteiros não negativos.

São exercícios provar as proposições sem demonstração e completar as demonstrações incompletas no texto de apoio.

1.1 Números complexos: sucessões e funções

Nesta secção, mencionam-se alguns conceitos e proposições simples que serão utilizados ao longo do texto e que poderão não ser ainda conhecidos por alguns estudantes.

As partes real e imaginária de um número complexo x representam-se por $\mathrm{R}(x)$ e $\mathrm{I}(x)$, respetivamente:

$$x = \mathrm{R}(x) + i\,\mathrm{I}(x).$$

Proposição 1.1 *Quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{C}$,*

$$\begin{aligned}
&|x+y| \leq |x| + |y|,\\
&||x| - |y|| \leq |x-y|,\\
&|x+y|^2 \leq 2(|x|^2 + |y|^2).
\end{aligned}$$

Proposição 1.2 *Quaisquer que sejam $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$,*

$$\max_{j\in\{1,\ldots,k\}} |z_j| \leq \sum_{j=1}^{k} |z_j| \leq k \max_{j\in\{1,\ldots,k\}} |z_j|,$$

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{k} |z_j|^2} \leq \sum_{j=1}^{k} |z_j| \leq k\sqrt{\sum_{j=1}^{k} |z_j|^2}. \tag{1.1}$$

Demonstração da segunda desigualdade de (1.1). Seja $l \in \{1,\ldots,k\}$ tal que

$$|z_l| = \max_{j\in\{1,\ldots,k\}} |z_j|.$$

Então

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |z_j|\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} |z_i||z_j| \le k^2|z_l|^2 \le k^2 \sum_{j=1}^{k} |z_j|^2,$$

donde resulta a segunda desigualdade de (1.1). ∎

Definição 1.3 Diz-se que uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números complexos converge para um limite $l \in \mathbb{C}$ se, para qualquer $\delta \in \mathbb{R}^+$, existir $p \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \ge p$, $|x_n - l| < \delta$.

Uma sucessão diz-se convergente se convergir para um limite.

Proposição 1.4 *Uma sucessão de números complexos converge para quando muito um limite.*

O limite de uma sucessão convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ representa-se por

$$\lim_{n\to\infty} x_n \qquad \text{ou por} \qquad \lim x_n.$$

Proposição 1.5 *Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números complexos e $l \in \mathbb{C}$. São equivalentes as afirmações seguintes:*

(a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* l.

(b) $(\mathrm{R}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* $\mathrm{R}(l)$ *e* $(\mathrm{I}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* $\mathrm{I}(l)$.

(c) $(|x_n - l|)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* 0.

Definição 1.6 Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números complexos. Diz-se que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma *sucessão de Cauchy* se, para qualquer $\delta \in \mathbb{R}^+$, existir $p \in \mathbb{N}$ tal que, quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}$, com $m \ge n \ge p$, $|x_m - x_n| < \delta$.

Proposição 1.7 *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números complexos. São equivalentes as afirmações seguintes:*

(a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sucessão de Cauchy.*

(b) $(\mathrm{R}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(\mathrm{I}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *são sucessões de Cauchy.*

A proposição seguinte é uma propriedade fundamental de $\mathbb{F}$. Quando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, é conhecida das disciplinas de Análise Matemática. Seguidamente, quando $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, pode demonstrar-se facilmente utilizando as proposições 1.5 e 1.7.

Proposição 1.8 [Princípio de Cauchy-Bolzano] *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de $\mathbb{F}$. São equivalentes as afirmações seguintes:*

(a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sucessão de Cauchy.*

(b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sucessão convergente em* $\mathbb{F}$.

Definição 1.9 Uma *série* de números complexos é um par de sucessões de números complexos $((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_N)_{N\in\mathbb{N}})$, onde

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n, \qquad N \in \mathbb{N}.$$

Diz-se que $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ é a sucessão das somas parciais da série. Usualmente, a série anterior representa-se por

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \qquad \text{ou por} \qquad \sum x_n.$$

Diz-se que uma série $\sum x_n$ é *convergente* se a sucessão das suas somas parciais for convergente. Neste caso, o limite da sucessão das somas parciais chama-se *soma da série* e representa-se por

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n.$$

Diz-se que uma série $\sum x_n$ é *absolutamente convergente* se a série de números reais $\sum |x_n|$ for convergente.

Proposição 1.10 *Uma série* $\sum x_n$ *é convergente se e só se as séries reais*

$$\sum \mathrm{R}(x_n) \qquad e \qquad \sum \mathrm{I}(x_n) \tag{1.2}$$

forem convergentes. Neste caso,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{R}(x_n) + i \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{I}(x_n).$$

Uma série $\sum x_n$ *é absolutamente convergente se e só se as séries* (1.2) *forem absolutamente convergentes.*

As séries absolutamente convergentes são convergentes.

Definição 1.11 Seja $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ uma função definida num intervalo real $[a, b]$, com $a < b$. Diz-se que $f(t)$ converge para o limite $l \in \mathbb{C}$, quando t convergir para $t_0 \in [a, b]$, ([1]) se, para qualquer $\delta \in \mathbb{R}^+$, existir $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, tal que, qualquer que seja $t \in [a, b] \setminus \{t_0\}$, se $|t - t_0| < \epsilon$, então $|f(t) - l| < \delta$.

Proposição 1.12 *Uma função* $f : [a, b] \to \mathbb{F}$, *converge para quando muito um limite, quando* $t \to t_0 \in [a, b]$.

[1] Abreviadatemente, escreve-se "$f(t) \to l$, quando $t \to t_0$".

Com a notação anterior, se a função f convergir para um limite, quando $t \to t_0 \in [a, b]$, então esse limite representa-se por $\lim\limits_{t \to t_0} f(t)$.

Proposição 1.13 *Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{F}$, são equivalentes as afirmações seguintes:*

(a) *$f(t)$ converge para l, quando $t \to t_0$.*

(b) *$\mathrm{R}(f(t))$ converge para $\mathrm{R}(l)$, quando $t \to t_0$, e $\mathrm{I}(f(t))$ converge para $\mathrm{I}(l)$, quando $t \to t_0$.*

(c) *$|f(t) - l|$ converge para 0, quando $t \to t_0$*

Definição 1.14 Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{F}$ diz-se *contínua* em $t_0 \in [a, b]$ se

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0).$$

Diz-se que f é *contínua* se f for contínua em todos os pontos do seu domínio $[a, b]$.

Proposição 1.15 *Dada uma função $f : [a, b] \to \mathbb{F}$, são equivalentes as afirmações seguintes:*

(a) *$f(t)$ é contínua em t_0.*

(b) *$\mathrm{R}(f(t))$ e $\mathrm{I}(f(t))$ são contínuas em t_0.*

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ uma aplicação contínua. O integral de f entre a e b, cujo estudo não faz parte desta disciplina de Topologia, pode calcular-se à custa de integrais de funções reais:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathrm{R}(f(t))dt + i \int_a^b \mathrm{I}(f(t))dt.$$

A igualdade anterior poderá ser tomada como a definição de $\int_a^b f(t)dt$ pelos alunos que ainda não estudaram integrais de funções complexas.

Proposição 1.16 [Linearidade] *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{F}$ aplicações contínuas. Seja $c \in \mathbb{F}$. Então*

$$\int_a^b f(t) + g(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt,$$
$$\int_a^b cf(t)dt = c \int_a^b f(t)dt.$$

Proposição 1.17 *Dada uma aplicação contínua $f : [a, b] \to \mathbb{C}$,*

$$\int_a^b \overline{f(t)}dt = \overline{\int_a^b f(t)dt}.$$

A definição de derivada de $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ em $t_0 \in [a, b]$ é análoga à definição conhecida para as funções reais. Quando existir, representa-se por $(df/dt)(t_0)$ ou por $f'(t_0)$ e diz-se que f é diferenciável em t_0. Além disso, f é diferenciável em t_0 se e só se as funções reais $\mathrm{R}\, f$ e $\mathrm{I}\, f$ forem diferenciáveis em t_0, e

$$f'(t_0) = (\mathrm{R}\, f)'(t_0) + i(\mathrm{I}\, f)'(t_0).$$

Diz-se que f é diferenciável se f for diferenciável em todos os pontos do seu domínio.

1.2 Espaços vetoriais e aplicações lineares

Os exemplos seguintes de espaços vetoriais e aplicações lineares serão muito importantes ao longo da disciplina. Os estudantes devem rever as matérias relevantes.

Exemplo 1.18 $\mathbb{F}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$, com as operações usuais. $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com as operações usuais.

Exemplo 1.19 Se $k \in \mathbb{N}$, então $\mathbb{F}^k$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$, com a soma e o produto escalar definidos do seguinte modo: quaisquer que sejam $x = (x_1, \dots, x_k), y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{F}^k$, $a \in \mathbb{F}$,

$$(x_1, \dots, x_k) + (y_1, \dots, y_k) = (x_1 + y_1, \dots, x_k + y_k),$$
$$a(x_1, \dots, x_k) = (ax_1, \dots, ax_k).$$

Exemplo 1.20 Sejam X um conjunto não vazio e V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Seja $\mathrm{Ap}(X, V)$ o conjunto de todas as aplicações $f : X \to V$.

O conjunto $\mathrm{Ap}(X, V)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com a soma e o produto escalar definidos do seguinte modo: quaisquer que sejam $f, g \in \mathrm{Ap}(X, V)$, $a \in \mathbb{F}$,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in X,$$
$$(af)(x) = af(x), \quad x \in X.$$

Exemplo 1.21 Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$. O conjunto $\mathrm{Lin}(U, V)$ de todas as aplicações lineares $f : U \to V$ é um subespaço vetorial de $\mathrm{Ap}(U, V)$.

Exemplo 1.22 Seja X um conjunto não vazio.

Uma aplicação $f : X \to \mathbb{F}$ diz-se *limitada* se existir $\mu \in \mathbb{R}^+$ tal que, qualquer que seja $x \in X$, $|f(x)| \leq \mu$.

O conjunto $B(X, \mathbb{F})$ formado por todas as aplicações limitadas $f : X \to \mathbb{F}$ é um subespaço vetorial de $\mathrm{Ap}(X, \mathbb{F})$.

Futuramente, para simplificar a notação, representaremos $\mathrm{Ap}(X, \mathbb{F})$ por $\mathrm{Ap}(X)$ e $B(X, \mathbb{F})$ por $B(X)$.

Exemplo 1.23 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Seja $C[a,b]$ o conjunto das aplicações contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{F}$. Para cada $p \in \mathbb{N}$, seja $C^p[a,b]$ o conjunto de todas as aplicações $f : [a,b] \to \mathbb{F}$ que têm derivada de ordem p contínua. Então

$$C^{p+1}[a,b] \leq C^p[a,b] \leq C[a,b] \leq B[a,b] \leq \mathrm{Ap}[a,b],$$

onde o símbolo $\leq$ significa "é subespaço vetorial de".

Exemplo 1.24 A aplicação $C^1[a,b] \to C[a,b]$, que a cada $f \in C^1[a,b]$ faz corresponder a derivada de f, é linear.

Exemplo 1.25 A aplicação $C[a,b] \to \mathbb{F}$, que a cada $f \in C[a,b]$ faz corresponder

$$\int_a^b f(t)dt$$

é linear. Usualmente, as aplicações lineares de um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ para $\mathbb{F}$ chamam-se *funcionais lineares.*

1.3 Espaços vetoriais com produto interno

Definição 1.26 Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$. Uma aplicação

$$V \times V \to \mathbb{F}, \quad (u,v) \mapsto \langle u, v \rangle,$$

chama-se *produto interno* em V se, quaisquer que sejam $u, u', v \in V$, $a \in \mathbb{F}$,

(P_1) $\langle u + u', v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle$,

(P_2) $\langle au, v \rangle = a\langle u, v \rangle$,

(P_3) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$,

(P_4) $\langle u, u \rangle \in \mathbb{R}_0^+$,

(P_5) $\langle u, u \rangle = 0$ se e só se $u = 0$.

Um espaço vetorial munido com um produto interno chama-se espaço vetorial *pré-hilbertiano.*

Proposição 1.27 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{F}$ onde está definido um produto interno. Quaisquer que sejam $u, v, v' \in V$, $a \in \mathbb{F}$,*

(P_0) $\langle u, 0 \rangle = 0 = \langle 0, v \rangle$.

(P'_1) $\langle u, v + v' \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, v' \rangle$,

(P'_2) $\langle u, av \rangle = \overline{a}\langle u, v \rangle$.

Exemplo 1.28 Seja V um espaço vetorial onde está definido um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Seja U um subespaço de V.

Então $\langle\ ,\ \rangle_{|U\times U}$ é um produto interno em U, chamado *produto interno induzido* pelo produto interno de V.

Exemplo 1.29 A aplicação

$$\mathbb{F}^k \times \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}, \quad ((x_1,\dots,x_k),(y_1,\dots,y_k)) \in \mathbb{F}^k \times \mathbb{F}^k \mapsto \sum_{j=1}^{k} x_j\overline{y_j},$$

é um produto interno em $\mathbb{F}^k$, chamado produto interno *euclidiano* ou *usual* em $\mathbb{F}^k$.

Exemplo 1.30 Seja V um espaço vetorial de dimensão finita k sobre $\mathbb{F}$. Seja $(v_1,\dots,v_k)$ uma base de V. A aplicação $V\times V\to\mathbb{F}$, que a cada par

$$(x,y) = (x_1v_1+\cdots+x_kv_k, y_1v_1+\cdots+y_kv_k) \in V\times V,$$

onde $x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_k \in \mathbb{F}$, faz corresponder

$$\langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^{k} x_j\overline{y_j},$$

é um produto interno em V.

Exemplo 1.31 Sejam $V_1,\dots,V_k$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$. O produto cartesiano $V = V_1\times\cdots\times V_k$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$, com a soma e o produto escalar definidos do seguinte modo: quaisquer que sejam $u = (u_1,\dots,u_k), v=(v_1,\dots,v_k)\in V$, $a\in\mathbb{F}$,

$$\begin{aligned}&(u_1,\dots,u_k)+(v_1,\dots,v_k) = (u_1+v_1,\dots,u_k+v_k),\\ &a(u_1,\dots,u_k) = (au_1,\dots,au_k).\end{aligned}$$

Se, além disso, estiverem definidos produtos internos nos espaços $V_1,\dots,$ V_k, então a aplicação

$$V\times V\to\mathbb{F}, \quad ((u_1,\dots,u_k),(v_1,\dots,v_k)) \mapsto \sum_{j=1}^{k}\langle u_j,v_j\rangle,$$

é um produto interno em V.

Exemplo 1.32 O conjunto $\mathrm{Ap}(\mathbb{N})$ de todas as sucessões $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{F}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$, com a soma e o produto escalares definidos por:

$$\begin{aligned}&(x_n)_{n\in\mathbb{N}}+(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}},\\ &a(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (ax_n)_{n\in\mathbb{N}},\end{aligned}$$

quaisquer que sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Ap}(\mathbb{N})$, $a \in \mathbb{F}$.

O conjunto ℓ^2 formado pelas sucessões $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Ap}(\mathbb{N})$ tais que a série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2$$

é convergente é um subespaço vetorial de $\mathrm{Ap}(\mathbb{N})$.

Demonstração. Claramente, o conjunto ℓ^2 não é vazio.

Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, $a \in \mathbb{F}$.

Então, qualquer que seja $N \in \mathbb{N}$, ([2])

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} |x_n + y_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{N} 2(|x_n|^2 + |y_n|^2) &= 2\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2 + 2\sum_{n=1}^{N} |y_n|^2 \\ &\leq 2\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 + 2\sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n|^2,\end{aligned}$$

o que mostra que a sucessão de somas parciais

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |x_n + y_n|^2\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

é limitada superiormente. Assim, esta sucessão é convergente, uma vez que é crescente (em sentido lato). Portanto, a série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n|^2$$

é convergente e

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2.$$

Analogamente, qualquer que seja $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N} |ax_n|^2 = |a|^2 \sum_{n=1}^{N} |x_n|^2 \leq |a|^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2,$$

o que mostra que a série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |ax_n|^2$$

é convergente e, portanto,

$$a(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2.$$

Logo, ℓ^2 é subespaço vetorial de $\mathrm{Ap}(\mathbb{N})$. ∎

[2] Cf. proposição 1.1.

Quaisquer que sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, a série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\overline{y_n} \tag{1.3}$$

é absolutamente convergente.

Demonstração. Qualquer que seja $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N} |x_n\overline{y_n}| = \sum_{n=1}^{N} |x_n||y_n| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |y_n|^2) \leq \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n|^2,$$

donde se conclui que a série (1.3) é absolutamente convergente. ∎

A aplicação $\ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{F}$, que a cada par

$$(x, y) = ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \in \ell^2 \times \ell^2$$

faz corresponder

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\overline{y_n}$$

é um produto interno em ℓ^2.

Exemplo 1.33 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. A aplicação $C[a, b] \times C[a, b] \to \mathbb{F}$, que a cada par

$$(f, g) \in C[a, b] \times C[a, b]$$

faz corresponder

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt,$$

é um produto interno em $C[a, b]$.

Demonstração de (P_4) *e de* (P_5). Seja $f \in C[a, b]$. Então

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f(t)\overline{f(t)}dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt \geq 0.$$

Claramente, se f for a aplicação nula, então $\langle f, f\rangle = 0$.
Suponhamos agora que $\langle f, f\rangle = 0$. Tendo em conta que a aplicação $|f(t)|^2$ é contínua e não negativa, deduz-se que $|f(t)|^2 = 0$, qualquer que seja $t \in [a, b]$. Donde $f = 0$. ∎

Definição 1.34 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com produto interno. Chama-se *norma* de um vetor $v \in V$ ao real não negativo

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Proposição 1.35 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com produto interno. Quaisquer que sejam $v \in V$, $a \in \mathbb{F}$,*

$$\|av\| = |a|\|v\|,$$
$$\|v\| = 0 \text{ se e só se } v = 0.$$

Proposição 1.36 [Desigualdade de Cauchy-Schwarz] *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com produto interno. Quaisquer que sejam $u, v \in V$,*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|. \tag{1.4}$$

Demonstração. Sejam $u, v \in V$. A desigualdade (1.4) é trivial, quando $u = 0$.

Suponhamos agora que $u \neq 0$. Qualquer que seja $a \in \mathbb{F}$,

$$0 \leq \langle au + v, au + v\rangle = a\overline{a}\langle u, u\rangle + a\langle u, v\rangle + \overline{a}\langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle. \tag{1.5}$$

Substituindo a por $-\|u\|^{-2}\langle v, u\rangle$ e simplificando, obtemos a desigualdade

$$0 \leq -\frac{1}{\|u\|^2}\langle u, v\rangle\langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle.$$

Donde $\langle u, v\rangle\langle v, u\rangle \leq \|u\|^2\|v\|^2$. Donde $|\langle u, v\rangle|^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$. Donde resulta (1.4). ■

Exemplos 1.37 Nos espaços vetoriais apresentados anteriormente como exemplos, a desigualdade de Cauchy-Schwarz toma as formas:

- Quaisquer que sejam $(x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{F}^k$,

$$\left|\sum_{j=1}^{k} x_j\overline{y_j}\right|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{k} |y_j|^2\right).$$

- Quaisquer que sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$,

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\overline{y_n}\right|^2 \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n|^2\right).$$

- Quaisquer que sejam $f, g \in C[a, b]$, onde $a < b$,

$$\left|\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt\right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)\left(\int_a^b |g(t)|^2 dt\right).$$

Destas desigualdades resultam as seguintes.

- Quaisquer que sejam $(x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{F}^k$,

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |x_j y_j|\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{k} |y_j|^2\right).$$

- Quaisquer que sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$,

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n y_n|\right)^2 \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |y_n|^2\right).$$

- Quaisquer que sejam $f, g \in C[a, b]$, onde $a < b$,

$$\left(\int_a^b |f(t)g(t)|dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)\left(\int_a^b |g(t)|^2 dt\right).$$

Proposição 1.38 [Desigualdade triangular] *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com produto interno. Quaisquer que sejam $u, v \in V$,*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|. \tag{1.6}$$

Demonstração. Sejam $u, v \in V$. Então

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle} + \langle v,v\rangle = \langle u,u\rangle + 2\,\mathrm{R}\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle \\ &\leq \langle u,u\rangle + 2|\langle u,v\rangle| + \langle v,v\rangle.\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\|u+v\|^2 \leq \langle u,u\rangle + 2\|u\|\|v\| + \langle v,v\rangle = (\|u\| + \|v\|)^2.$$

Donde resulta (1.6). ■

Proposição 1.39 [Lei do paralelogramo] *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Quaisquer que sejam $u, v \in V$,*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2. \tag{1.7}$$

1.4 Espaços vetoriais normados

Definição 1.40 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Uma aplicação

$$\|\ \| : V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|,$$

chama-se *norma* em V se, quaisquer que sejam $u, v \in V$, $a \in \mathbb{F}$,

(N_1) $\|v\| \geq 0$,

(N_2) $\|0_V\| = 0$,

(N_3) Se $\|v\| = 0$, então $v = 0$,

(N_4) $\|av\| = |a|\|v\|$,

(N_5) [Desigualdade triangular] $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Um espaço vetorial onde está definida uma norma chama-se *espaço vetorial normado.*

Observação 1.41 Com a notação anterior, as condições (N_1) e (N_2) são consequências das restantes, como se mostra a seguir.

(N_2): $\|0_V\| = \|0_{\mathbb{F}}0_V\| = |0_{\mathbb{F}}|\|0_V\| = 0_{\mathbb{R}}\|0_V\| = 0_{\mathbb{R}}$.

(N_1): Seja $v \in V \setminus \{0\}$. Então $0 = \|v - v\| \leq \|v\| + \|-v\| = \|v\| + \|v\| = 2\|v\|$. Donde $\|v\| \geq 0$.

Proposição 1.42 *Seja V um espaço vetorial normado. Quaisquer que sejam $u, v \in V$, $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$.*

Demonstração. Quaisquer que sejam $u, v \in V$, $\|u\| = \|u - v + v\| \leq \|u - v\| + \|v\|$. Donde $\|u\| - \|v\| \leq \|u - v\|$. Analogamente $\|v\| - \|u\| \leq \|v - u\| = \|u - v\|$. Logo $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$. ■

Definição 1.43 Duas normas $\| \ \|$ e $\| \ \|'$ num espaço vetorial V dizem-se *equivalentes* se existirem $\mu, \nu \in \mathbb{R}^+$ tais que, qualquer que seja $v \in V$,

$$\mu\|v\| \leq \|v\|' \leq \nu\|v\|.$$

A equivalência de normas é uma relação de equivalência no conjunto de todas as normas num espaço vetorial V.

Exemplo 1.44 A aplicação $\mathbb{F} \to \mathbb{R}$, que a cada $a \in \mathbb{F}$ faz corresponder $|a|$, é uma norma em $\mathbb{F}$.

Exemplo 1.45 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com produto interno. A aplicação $V \to \mathbb{R}$, que a cada $v \in V$ faz corresponder

$$\sqrt{\langle v, v \rangle},$$

é uma norma em V, chamada *norma associada* ao produto interno. Como casos particulares, temos os seguintes exemplos.

- A aplicação $\mathbb{F}^k \to \mathbb{R}$, que a cada $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{F}^k$ faz corresponder

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |x_j|^2},$$

é uma norma em $\mathbb{F}^k$.

- A aplicação $\ell^2 \to \mathbb{R}$, que a cada $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ faz corresponder

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2},$$

é uma norma em ℓ^2.

- A aplicação $C[a, b] \to \mathbb{R}$, que a cada $f \in C[a, b]$ faz corresponder

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt},$$

é uma norma em $C[a, b]$.

Exemplo 1.46 Seja $(V, \|\ \|)$ um espaço vetorial normado e seja U um subespaço de V. Então $\|\ \|_{|U}$ é uma norma em U, chamada *norma induzida* pela norma de V. ([3])

Exemplo 1.47 A aplicação $\mathbb{F}^k \to \mathbb{R}$, que a cada $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{F}^k$ faz corresponder

$$\|x\|_\infty = \max_{j\in\{1,\ldots,k\}} |x_j|,$$

é uma norma em $\mathbb{F}^k$.

Suponhamos que $k \geq 2$ e sejam $x = (1, 0, 0, \ldots, 0), y = (0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{F}^k$. Então

$$\|x + y\|_\infty^2 + \|x - y\|_\infty^2 = 2 \neq 4 = 2\|x\|_\infty^2 + 2\|y\|_\infty^2,$$

o que mostra que, quando $k \geq 2$, a norma $\|\ \|_\infty$ não satisfaz a lei do paralelogramo e, portanto, não está associada a um produto interno. ([4])

[3] Seja V um espaço vetorial com um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e seja U um subespaço de V. Note-se que a norma de U associada ao produto interno $\langle\ ,\ \rangle_{|U\times U}$ de U coincide com a norma de U induzida pela norma de V associada ao produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ de V.

[4] Muitas vezes, utiliza-se a lei do paralelogramo para mostrar que uma norma não está associada a um produto interno, como neste exemplo. Também é verdade que, se uma norma satisfaz a lei do paralelogramo, então está associada a um produto interno, cf. [Machado, Introdução à Análise Funcional, Escolar Editora, Lisboa, 1991, ex. 2.6.15, pág. 183, & ex. 2.6.16, pág. 184].

Exemplo 1.48 A aplicação $\mathbb{F}^k \to \mathbb{R}$, que a cada $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{F}^k$ faz corresponder

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{k} |x_j|,$$

é uma norma em $\mathbb{F}^k$. Quando $k \geq 2$, a norma $\| \; \|_1$ não está associada a um produto interno. Suponhamos que $k \geq 2$ e sejam $x = (1, 0, 0, \ldots, 0), y = (0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{F}^k$. Então

$$\|x + y\|_1^2 + \|x - y\|_1^2 = 8 \neq 4 = 2\|x\|_1^2 + 2\|y\|_1^2,$$

o que mostra que a norma $\| \; \|_1$ não satisfaz a lei do paralelogramo.

Observação 1.49 Resulta da proposição 1.2 que, qualquer que seja $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{F}^k$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq k\|x\|_\infty,$$
$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq k\|x\|_2.$$

Consequentemente, as normas $\| \; \|_1, \| \; \|_2, \| \; \|_\infty$, em $\mathbb{F}^k$, são equivalentes.

Exemplo 1.50 Seja X um conjunto não vazio. Recorde-se que $B(X)$ é o subespaço de $\mathrm{Ap}(X) = \mathrm{Ap}(X, \mathbb{F})$ formado pelas aplicações limitadas $f : X \to \mathbb{F}$.

A aplicação $B(X) \to \mathbb{R}$, que a cada $f \in B(X)$ faz corresponder

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

é uma norma em $B(X)$. Se X tiver pelo menos 2 elementos, esta norma não não está associada a um produto interno.

Futuramente, representaremos o espaço $B(\mathbb{N})$, das sucessões limitadas de elementos de $\mathbb{F}$, por ℓ^∞.

Exemplo 1.51 Seja ℓ^1 o subespaço de $\mathrm{Ap}(\mathbb{N})$ formado pelas sucessões $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que a série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$$

é convergente.

A aplicação $\ell^1 \to \mathbb{R}$, que a cada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ faz corresponder

$$\|x\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|,$$

é uma norma em ℓ^1, que não não está associada a um produto interno.

Proposição 1.52 *$\ell^1 \subsetneqq \ell^2$ e, qualquer que seja $x \in \ell^1$, $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$.*

Demonstração. Seja $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. Então, qualquer que seja $N \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{N} |x_n|^2} \le \sum_{n=1}^{N} |x_n| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \|x\|_1,$$

o que permite deduzir que $x \in \ell^2$ e $\|x\|_2 \le \|x\|_1$.

A sucessão $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertence a ℓ^2 e não pertence a ℓ^1. ∎

Exemplo 1.53 A aplicação $C[a,b] \to \mathbb{R}$, que a cada $f \in C[a,b]$ faz corresponder

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt,$$

é uma norma em $C[a,b]$, que não não está associada a um produto interno.

Sejam $f, g \in C[a,b]$ as aplicações definidas por $f(t) = t - a$, $g(t) = b - t$, qualquer que seja $t \in [a,b]$. Então

$$\|f+g\|_1^2 + \|f-g\|_1^2 = \frac{5}{4}(b-a)^4 \ne (b-a)^4 = 2\|f\|_1^2 + 2\|g\|_1^2,$$

o que mostra que a norma $\|\ \|_1$ não satisfaz a lei do paralelogramo.

Exemplo 1.54 Sejam $(V_1, \|\ \|_{(1)}), \ldots, (V_k, \|\ \|_{(k)})$ espaços vetoriais normados. Seja $V = V_1 \times \cdots \times V_k$.

- A aplicação $V \to \mathbb{R}$, que a cada $v = (v_1, \ldots, v_k) \in V$ faz corresponder

  $$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \|v_j\|_{(j)}^2},$$

  é uma norma em V.

  Demonstração da desigualdade triangular. (As outras propriedades são triviais.)

  Sejam $v = (v_1, \ldots, v_k), u = (u_1, \ldots, u_k) \in V$. Sejam

  $$x = (\|v_1\|_{(1)}, \ldots, \|v_k\|_{(k)}),\ y = (\|u_1\|_{(1)}, \ldots, \|u_k\|_{(k)}) \in \mathbb{R}^k.$$

  Consideremos a norma $\|\ \|_2$ em $\mathbb{R}^k$. Então

  $$\begin{aligned}\|v+u\|_2 &= \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \|v_j + u_j\|_{(j)}^2} \le \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (\|v_j\|_{(j)} + \|u_j\|_{(j)})^2} = \|x+y\|_2 \\ &\le \|x\|_2 + \|y\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \|u_j\|_{(j)}^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \|v_j\|_{(j)}^2} = \|v\|_2 + \|u\|_2.\end{aligned}$$

  ∎

- A aplicação $V \to \mathbb{R}$, que a cada $v = (v_1, \ldots, v_k) \in V$ faz corresponder

$$\|v\|_1 = \sum_{j=1}^{k} \|v_j\|_{(j)},$$

é uma norma em V.

- A aplicação $V \to \mathbb{R}$, que a cada $v = (v_1, \ldots, v_k) \in V$ faz corresponder

$$\|v\|_\infty = \max_{j \in \{1,\ldots,k\}} \|v_j\|_{(j)},$$

é uma norma em V.

- Resulta da proposição 1.2 que, qualquer que seja $v = (v_1, \ldots, v_k) \in V$,

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_1 \leq k\|v\|_\infty,$$
$$\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq k\|v\|_2.$$

Consequentemente, as normas $\| \|_1, \| \|_2, \| \|_\infty$, em V, são equivalentes.

Definição 1.55 Sejam V um espaço vetorial normado e $u, v \in V$. Chama-se *distância* entre u e v a

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

Proposição 1.56 *Seja V um espaço vetorial normado. Quaisquer que sejam $u, v, w \in V$,*

(a) $d(u, v) \geq 0$,

(b) $d(u, v) = d(v, u)$,

(c) $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$,

(d) $d(u, u) = 0$,

(e) *se $d(u, v) = 0$, então $u = v$.*

Exercício 1.57 Mostre que, no espaço ℓ^1, as normas $\| \|_1$ e $\| \|_2$ não são equivalentes. (Sugestão: Considere as seguintes sucessões. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja s_n a sucessão cujos primeiros n^2 termos são iguais a n e os restantes são nulos.)

Exercício 1.58 $\ell^2 \subsetneqq \ell^\infty$ e, qualquer que seja $x \in \ell^2$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$.

Exercício 1.59 Mostre que, no espaço ℓ^2, as normas $\| \|_2$ e $\| \|_\infty$ não são equivalentes.

Exercício 1.60 A aplicação $C[a,b] \to \mathbb{R}$, que a cada $f \in C[a,b]$ faz corresponder

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|, \ (^5)$$

é uma norma em $C[a,b]$, que não não está associada a um produto interno.

Mostre que, no espaço $C[a,b]$, as normas $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ e $\| \ \|_\infty$ não são equivalentes.

[5] Recorde-se que $[a,b]$ é um subconjunto compacto de R. Como a função $|f(t)| : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua, a sua imagem é um compacto de $\mathbb{R}$. Por isso, existe $\max_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

Capítulo 2

Espaços Métricos

2.1 Definição e exemplos

Definição 2.1 Seja M um conjunto. Chama-se *métrica* em M a qualquer aplicação

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$

tal que, quaisquer que sejam $x, y, z \in M$,

(M_1) $d(x, y) \geq 0$,

(M_2) $d(x, y) = d(y, x)$,

(M_3) [Desigualdade triangular] $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,

(M_4) $d(x, x) = 0$,

(M_5) se $d(x, y) = 0$, então $x = y$.

Se d for uma métrica em M, diz-se que o par (M, d) é um *espaço métrico*, ou, se não existir perigo de confusão, que M é um *espaço métrico*.

Observação 2.2 (M_1) é consequência de (M_2), (M_3) e (M_4). De facto, quaisquer que sejam $x, y \in M$, $0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$. Donde, resulta ($\mathrm{M}_1$).

Definição 2.3 Duas métricas d e d', num conjunto M, dizem-se *equivalentes* se existirem $\mu, \nu \in \mathbb{R}^+$ tais que, quaisquer que sejam $x, y \in M$,

$$\mu d(x, y) \leq d'(x, y) \leq \nu d(x, y).$$

A equivalência de métricas é uma relação de equivalência no conjunto de todas as métricas num conjunto M.

Exemplo 2.4 Sejam (M, d) um espaço métrico e X um subconjunto de M. Então $d_{|X \times X}$ é uma métrica em X, que chamaremos *métrica induzida pela métrica de* M. Diz-se que $(X, d_{|X\times X})$ é um *subespaço métrico* de (M, d).

Exemplo 2.5 Seja M um conjunto. A aplicação $M \times M \to \mathbb{R}$, que a cada par $(x, y) \in M \times M$ faz corresponder

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \neq y, \end{cases}$$

é uma métrica em M, chamada *métrica discreta.*

Exemplo 2.6 A aplicação $d : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{R}$, que a cada par (x, y) faz corresponder $|x - y|$, é uma métrica em $\mathbb{F}$, chamada *métrica euclidiana* ou *métrica usual* em $\mathbb{F}$.

Exemplo 2.7 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$, onde está definida uma norma. A aplicação $V \times V \to \mathbb{R}$, que a cada par $(u, v) \in V \times V$ faz corresponder

$$d(u, v) = \|u - v\|,$$

é uma métrica em V, que chamaremos *métrica associada à norma de* V.

É fácil ver que, se duas normas forem equivalentes, então as métricas associadas também são equivalentes.

Em particular, temos os seguintes exemplos de métricas induzidas.

- A aplicação $\mathbb{F}^k \times \mathbb{F}^k \to \mathbb{R}$, que a cada par

  $$(x, y) = ((x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k)) \in \mathbb{F}^k \times \mathbb{F}^k$$

  faz corresponder

  $$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |x_j - y_j|^2},$$

  é a métrica em $\mathbb{F}^k$ associada à norma $\| \ \|_2$, chamada *métrica euclidiana* ou *métrica usual* em $\mathbb{F}^k$.

- A aplicação $\mathbb{F}^k \times \mathbb{F}^k \to \mathbb{R}$, que a cada par

  $$(x, y) = ((x_1, \ldots, x_k), (x_1, \ldots, x_k)) \in \mathbb{F}^k \times \mathbb{F}^k$$

  faz corresponder

  $$d_\infty(x,y) = \max_{j \in \{1,\ldots,k\}} |x_j - y_j|,$$

  é a métrica em $\mathbb{F}^k$ associada à norma $\| \ \|_\infty$.

- A aplicação $\mathbb{F}^k \times \mathbb{F}^k \to \mathbb{R}$, que a cada par
$$(x, y) = ((x_1, \ldots, x_k), (x_1, \ldots, x_k)) \in \mathbb{F}^k \times \mathbb{F}^k$$
faz corresponder
$$d_1(x, y) = \sum_{j=1}^{k} |x_j - y_j|,$$
é a métrica em $\mathbb{F}^k$ associada à norma $\| \|_1$.

- As métricas d_1, d_2, d_∞, em $\mathbb{F}^k$, são equivalentes, uma vez que as normas a que estão associadas são equivalentes.

- Seja X um conjunto não vazio. A aplicação $B(X) \times B(X) \to \mathbb{R}$, que a cada par
$$(f, g) \in B(X) \times B(X)$$
faz corresponder
$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|,$$
é a métrica em $B(X)$ associada à norma $\| \|_\infty$.
Em particular, a aplicação $\ell^\infty \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$, que a cada par
$$(x, y) = ((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in \ell^\infty \times \ell^\infty$$
faz corresponder
$$d_\infty(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|,$$
é uma métrica em ℓ^∞.

- A aplicação $\ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}$, que a cada par
$$(x, y) = ((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in \ell^2 \times \ell^2$$
faz corresponder
$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|^2},$$
é a métrica em ℓ^2 associada à norma $\| \|_2$.

- A aplicação $\ell^1 \times \ell^1 \to \mathbb{R}$, que a cada par
$$(x, y) = ((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}) \in \ell^1 \times \ell^1$$
faz corresponder
$$d_1(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|,$$
é a métrica em ℓ^1 associada à norma $\| \|_1$.

- A aplicação $C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, que a cada par

  $$(f,g) \in C[a,b] \times C[a,b]$$

  faz corresponder

  $$d_2(f,g) = \sqrt{\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt},$$

  é a métrica em $C[a,b]$ associada à norma $\| \ \|_2$.

- A aplicação $C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, que a cada par

  $$(f,g) \in C[a,b] \times C[a,b]$$

  faz corresponder

  $$d_1(f,g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt,$$

  é a métrica em $C[a,b]$ associada à norma $\| \ \|_1$.

- A aplicação $C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, que a cada par

  $$(f,g) \in C[a,b] \times C[a,b]$$

  faz corresponder

  $$d_\infty(f,g) = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|,$$

  é a métrica em $C[a,b]$ associada à norma $\| \ \|_\infty$. (Cf. exercício 1.60.)

Exemplo 2.8 Sejam $(M_1, d_1), \ldots, (M_k, d_k)$ espaços métricos. Seja $M = M_1 \times \cdots \times M_k$.

- A aplicação $M \times M \to \mathbb{R}$, que a cada par

  $$(x,y) = ((x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k)) \in M \times M$$

  faz corresponder

  $$\rho_2(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} d_j(x_j, y_j)^2}$$

  é uma métrica em M.

  Demonstração da desigualdade triangular. (As outras propriedades são triviais.)

Sejam $x = (x_1, \ldots, x_k), y = (y_1, \ldots, y_k), z = (z_1, \ldots, z_k) \in M$. Sejam

$$u = (d_1(x_1, y_1), \ldots, d_k(x_k, y_k)), v = (d_1(y_1, z_1), \ldots, d_k(y_k, z_k)) \in \mathbb{R}^k.$$

Consideremos a norma $\| \|_2$ em $\mathbb{R}^k$. Então

$$\begin{aligned}
\rho_2(x, z) &= \sqrt{\sum_{j=1}^{k} d_j(x_j, z_j)^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (d_j(x_j, y_j) + d_j(y_j, z_j))^2} \\
&= \|u + v\|_2 \\
&\leq \|u\|_2 + \|v\|_2 \\
&= \sqrt{\sum_{j=1}^{k} d_j(x_j, y_j)^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{k} d_j(y_j, z_j)^2} \\
&= \rho_2(x, y) + \rho_2(y, z).
\end{aligned}$$

■

- A aplicação $M \times M \to \mathbb{R}$, que a cada par

  $$(x, y) = ((x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k)) \in M \times M$$

  faz corresponder

  $$\rho_\infty(x, y) = \max_{j \in \{1, \ldots, k\}} d_j(x_j, y_j)$$

  é uma métrica em M.

- A aplicação $M \times M \to \mathbb{R}$, que a cada par

  $$(x, y) = ((x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k)) \in M \times M$$

  faz corresponder

  $$\rho_1(x, y) = \sum_{j=1}^{k} d_j(x_j, y_j)$$

  é uma métrica em M.

- Resulta da proposição 1.2 que, quaisquer que sejam $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, \ldots, y_k) \in M$,

  $$\begin{aligned}
  \rho_\infty(x, y) \leq \rho_1(x, y) \leq k\rho_\infty(x, y), \\
  \rho_2(x, y) \leq \rho_1(x, y) \leq k\rho_2(x, y).
  \end{aligned}$$

  Consequentemente, as métricas $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$ são equivalentes.

- Suponhamos agora que $M_1, \ldots, M_k$ são espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$ e que as métricas $d_1, \ldots, d_k$ estão associadas a normas $\| \ \|_{(1)}, \ldots, \| \ \|_{(k)}$, respetivamente. Então as métricas $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$ estão associadas às normas $\| \ \|_1, \| \ \|_2, \| \ \|_\infty$, introduzidas no exemplo 1.54.

Definição 2.9 Sejam (M, d) um espaço métrico, X, Y subconjuntos não vazios de M e $a \in M$.

Chama-se *distância* de X a Y ao real não negativo

$$d(X, Y) = \inf_{x \in X, y \in Y} d(x, y).$$

Chama-se *distância* de X a a ao real não negativo

$$d(X, a) = d(X, \{a\}) = \inf_{x \in X} d(x, a).$$

Exercício 2.10 Sejam (M, d) um espaço métrico, X um subconjunto não vazio de M e $a, b \in M$. Mostre que

$$|d(X, a) - d(X, b)| \leq d(a, b).$$

Exercício 2.11 Seja d a métrica usual em $\mathbb{R}$. Dê exemplos de subconjuntos X, Y, Z de $\mathbb{R}$ tais que

$$d(X, Z) > d(X, Y) + d(Y, Z).$$

Definição 2.12 Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subseteq M$.

Diz-se que X é *limitado* se existir $\mu \in \mathbb{R}_0^+$ tal que, quaisquer que sejam $x, y \in X$, $d(x, y) \leq \mu$.

Se X for limitado, chama-se *diâmetro* de X ao real não negativo

$$\operatorname{diam} X = \begin{cases} 0 \quad \text{se} \quad X = \emptyset, \\ \sup\limits_{x,y \in X} d(x, y) \quad \text{se} \quad X \neq \emptyset. \end{cases}$$

Proposição 2.13 *Sejam (M, d) um espaço métrico, $X \subseteq M$ e $a \in M$.*

O conjunto X é limitado se e só se existir $\nu \in \mathbb{R}_0^+$ tal que qualquer que seja $x \in X$, $d(x, a) \leq \nu$.

Demonstração. A proposição é trivial se $X = \emptyset$. Suponhamos que $X \neq \emptyset$ e seja $b \in X$.

Suponhamos que X é limitado. Seja $\mu \in \mathbb{R}_0^+$ tal que, quaisquer que sejam $x, y \in X$, $d(x, y) \leq \mu$. Então, qualquer que seja $x \in X$,

$$d(x, a) \leq d(x, b) + d(b, a) \leq \mu + d(b, a).$$

Reciprocamente, suponhamos que existe $\nu \in \mathbb{R}_0^+$, qualquer que seja $x \in X$, $d(x, a) \leq \nu$. Então, quaisquer que sejam $x, y \in X$,

$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) \leq 2\nu. \qquad \blacksquare$$

2.2 Convergência de sucessões

Seja (M, d) um espaço métrico.

Definição 2.14 Diz-se que uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de M converge para um limite $l \in M$ ([1]) se, para qualquer $\delta \in \mathbb{R}^+$, existir $p \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq p$, $d(x_n, l) < \delta$; ou seja, se a sucessão de números reais $(d(x_n, l))_{n\in\mathbb{N}}$ convergir para 0.

Uma sucessão diz-se *convergente* se convergir para um limite.

Proposição 2.15 *Uma sucessão de elementos de M converge para quando muito um limite.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de M e suponhamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para l e l'. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para l, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq p$, $d(x_n, l) < \delta/2$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para l', existe $q \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq q$, $d(x_n, l') < \delta/2$. Assim, se $m = \max\{p, q\}$, então

$$0 \leq d(l, l') \leq d(l, x_m) + d(x_m, l') < \delta.$$

Como δ é um real positivo arbitrário, $d(l, l') = 0$. Donde $l = l'$. ∎

O limite de uma sucessão convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ representa-se por

$$\lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{ou} \quad \lim x_n.$$

Exemplo 2.16 Consideremos a métrica discreta num conjunto X. Uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente se e só se existir $p \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq p$, $x_n = x_p$.

Exemplo 2.17 No espaço vetorial $C[1, 2]$ das aplicações contínuas $[1, 2] \to \mathbb{F}$, considerem-se as métricas d_1, d_2 e d_∞ (cf. exemplo 2.7). Sejam $f, f_n \in C[1, 2]$, $n \in \mathbb{N}$, as aplicações definidas por

$$f(t) = t, \quad f_n(t) = (1 + t^n)^{1/n}, \quad t \in [1, 2].$$

Para cada $t \in [1, 2]$,

$$0 \leq f_n(t) - f(t) = (1 + t^n)^{1/n} - t \leq (t^n + t^n)^{1/n} - t = t(2^{1/n} - 1).$$

Assim

$$d_\infty(f_n, f) = \max_{t\in[1,2]} |f_n(t) - f(t)| \leq \max_{t\in[1,2]} t(2^{1/n} - 1) = 2(2^{1/n} - 1) \to 0,$$

[1]Quando se está a trabalhar com mais do que uma métrica em M, diz-se que "$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para l, **relativamente à métrica** d", para evitar a ambiguidade. Se a métrica d estiver associada a uma norma $\| \, \|$, também se diz que "$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para l, **relativamente à norma** $\| \, \|$".

quando $n \to \infty$, o que mostra que a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f, relativamente à métrica d_∞.

Por outro lado,

$$d_1(f_n, f) = \int_1^2 f_n(t) - f(t)dt \leq \int_1^2 t(2^{1/n} - 1)dt = (2^{1/n} - 1)\int_1^2 tdt \to 0,$$

quando $n \to \infty$, o que mostra que a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f, relativamente à métrica d_1.

A sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também converge para f, relativamente à métrica d_2.

Finalmente, a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge relativamente à métrica discreta, pois todos os seus elementos são distintos.

Exercício 2.18 [Convergência Uniforme] Sejam X um conjunto não vazio e (M, d) um espaço métrico. Diz-se que uma aplicação $f : X \to M$ é *limitada* se o conjunto $f(X)$ for limitado. Seja $B(X, M)$ o conjunto de todas as aplicações limitadas $f : X \to M$. Mostre que:

(a) Se $f, g \in B(X, M)$, então existe $\mu \in \mathbb{R}^+$ tal que, qualquer que seja $x \in X$, $d(f(x), g(x)) \leq \mu$.

(b) A aplicação

$$\begin{aligned} \rho : B(X, M) \times B(X, M) &\to \mathbb{R}, \\ (f, g) &\mapsto \sup_{x\in X} d(f(x), g(x)), \end{aligned}$$

é uma métrica em $B(X, M)$, chamada *métrica da convergência uniforme.*

(c) Uma sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $B(X, M)$ converge para $f \in B(X, M)$, relativamente à métrica ρ, se e só se, qualquer que seja $\delta \in \mathbb{R}^+$, existir $p \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq p$ e qualquer que seja $x \in X$, $d(f_n(x), f(x)) < \delta$. ([2])

(d) Se uma sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $B(X, M)$ convergir para $f \in B(X, M)$, então, qualquer que seja $x \in X$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f(x)$. ([3])

Exemplo 2.19 Considerem-se as funções $f, f_n \in C[0, 1]$, onde $n \in \mathbb{N}$, definidas por

$$f(t) = 0, \qquad f_n(t) = t^n, \qquad t \in [0, 1].$$

[2]Quando uma sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $B(X, M)$ converge para $f \in B(X, M)$, relativamente à métrica ρ, diz-se que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f.

[3]Quando, para qualquer $x \in X$, a sucessão $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ convergir para $f(x)$, diz-se que a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para f. De acordo com este exercício, a convergência uniforme implica a convergência pontual.

Então,

$$d_1(f_n, f) = \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|dt = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \to 0,$$

o que mostra que a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f, relativamente à métrica d_1. Note-se que a sucessão $(f_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ tem todos os seus elementos iguais a 1 e, portanto, não converge para $f(1) = 0$. ([4])

Exercício. Mostre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f, relativamente à métrica d_2. Mostre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge, relativamente à métrica d_∞.

Definição 2.20 Diz-se que uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de M é *limitada* se o conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ for limitado.

Proposição 2.21 *As sucessões convergentes de elementos de M são limitadas.*

Demonstração. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão convergente e l o seu limite. Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq p$, $d(x_n, l) < 1$. Seja

$$\nu = \max\{1, d(x_1, l), \ldots, d(x_{p-1}, l)\}.$$

Então, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $d(x_n, l) \leq \nu$. Pela proposição 2.13, o conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado. ∎

Definição 2.22 Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de M. Diz-se que $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma subsucessão de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se existir uma aplicação estritamente crescente $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$, $y_m = x_{\nu(m)}$.

Diz-se que $l \in X$ é um sublimite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se existir uma subsucessão de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para l.

Lema 2.23 *Seja $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma aplicação estritamente crescente. Qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$, $\nu(m) \geq m$.*

Demonstração. Por indução em m. Claramente $\nu(1) \geq 1$. Suponhamos que $m \geq 2$. Pela hipótese de indução, $\nu(m-1) \geq m-1$. Como ν é estritamente crescente, $\nu(m) \geq \nu(m-1) + 1 \geq m$. ∎

Proposição 2.24 *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de M que converge para um limite $l \in M$. Então todas as subsucessões de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergem para l.*

[4] Assim a convergência de uma sucessão de funções relativamente a uma métrica nem sempre implica a convergência pontual.

Demonstração. Seja $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma subsucessão de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Seja $\nu:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ uma aplicação estritamente crescente tal que, qualquer que seja $m\in\mathbb{N}$, $y_m = x_{\nu(m)}$.

Seja $\delta\in\mathbb{R}^+$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para l, existe $p\in\mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n\geq p$, $d(x_n,l)<\delta$. Assim, qualquer que seja $m\geq p$, $\nu(m)\geq m\geq p$ e $d(y_m,l)=d(x_{\nu(m)},l)<\delta$. Logo $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge para l. ■

Proposição 2.25 *Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de M e $l\in M$. São equivalentes:*

(a) *l é sublimite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

(b) *Quaisquer que sejam $p\in\mathbb{N}$, $\delta\in\mathbb{R}^+$, existe $n\geq p$ tal que $d(x_n,l)<\delta$.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Seja $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma subsucessão de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para l. Seja $\nu:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ uma aplicação estritamente crescente tal que, qualquer que seja $m\in\mathbb{N}$, $y_m=x_{\nu(m)}$. Sejam $p\in\mathbb{N}$, $\delta\in\mathbb{R}^+$. Como $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge para l, existe $q\in\mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $m\geq q$, $d(y_m,l)<\delta$. Seja $r=\max\{p,q\}$. Então $\nu(r)\geq r\geq p$ e $d(x_{\nu(r)},l)=d(y_r,l)<\delta$, o que mostra que (b) é satisfeita.

(b) $\Rightarrow$ (a) Recursivamente, para cada $m\in\mathbb{N}$, escolhemos $\nu(m)\in\mathbb{N}$, do seguinte modo: escolhemos $\nu(1)$ tal que $d(x_{\nu(1)},l)<1$; para cada $m\geq 2$, escolhemos $\nu(m)$ tal que $\nu(m)>\nu(m-1)$ e $d(x_{\nu(m)},l)<1/m$. Claramente $\nu:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ é estritamente crescente. É fácil concluir que a subsucessão $(x_{\nu(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para l. ■

2.3 Conjuntos abertos e conjuntos fechados

Seja (M,d) um espaço métrico.

Definição 2.26 Sejam (M,d) um espaço métrico, $x\in M$, $r\in\mathbb{R}^+$. Chama-se *bola aberta* com centro em x e raio r ao conjunto

$$\mathbf{B}(x,r)=\{y\in M: d(x,y)<r\}.\ (^5)$$

Definição 2.27 Sejam (M,d) um espaço métrico e $A\subseteq M$.

Diz-se que $x\in A$ é um *ponto interior* de A se existir $r\in\mathbb{R}^+$, tal que $\mathbf{B}(x,r)\subseteq A$.

O conjunto de todos os pontos interiores de A chama-se *interior* de A e representa-se por A° ou por $\operatorname{int} A$.

Diz-se que A é um subconjunto *aberto* de M se $A=A^\circ$, isto é, se todos os elementos de A forem pontos interiores de A.

[5] Se estivermos a trabalhar simultaneamente com mais do que uma estrutura métrica, acrescentaremos um índice para evitar a ambiguidade da notação: $\mathbf{B}_{(M,d)}(x,r)$, $\mathbf{B}_M(x,r)$ ou $\mathbf{B}_d(x,r)$ em vez de $\mathbf{B}(x,r)$.

Exemplo 2.28 Seja d a métrica discreta num conjunto M. Seja $A \subseteq M$. Então, qualquer que seja $x \in A$, $\mathbf{B}(x, 1) = \{x\} \subseteq A$. Assim todos os pontos de A são interiores e, portanto, A é aberto.

Proposição 2.29 *Seja (M, d) um espaço métrico. Quaisquer que sejam $x \in M$, $r \in \mathbb{R}^+$, a bola aberta $\mathbf{B}(x, r)$ é um aberto.*

Demonstração. Sejam $y \in \mathbf{B}(x, r)$ e $s = d(x, y)$ $(< r)$. Qualquer que seja $z \in \mathbf{B}(y, r - s)$,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < s + (r - s) = r,$$

o que mostra que $z \in \mathbf{B}(x, r)$. Assim $\mathbf{B}(y, r - s) \subseteq \mathbf{B}(x, r)$ e, portanto, y é um ponto interior de $\mathbf{B}(x, r)$. Logo $\mathbf{B}(x, r)$ é um aberto. ■

Proposição 2.30 *Sejam (M, d) um espaço métrico, $X \subseteq M$ e $x \in X$. São equivalentes:*

(a) *x é ponto interior de X.*

(b) *Existe um aberto A tal que $x \in A \subseteq X$.*

Demonstração. Se x for um ponto interior de X, então existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mathbf{B}(x, r) \subseteq X$. O conjunto $\mathbf{B}(x, r)$ é aberto e $x \in \mathbf{B}(x, r) \subseteq X$.

Reciprocamente, suponhamos que existe um aberto A tal que $x \in A \subseteq X$. Como A é aberto, x é ponto interior de A e existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mathbf{B}(x, r) \subseteq A$. Portanto $\mathbf{B}(x, r) \subseteq X$, o que mostra que x é ponto interior de X. ■

Proposição 2.31 *Seja (M, d) um espaço métrico.*

(a) *$\emptyset$ e M são abertos.*

(b) *A união de uma família qualquer de abertos é um aberto.*

(c) *Se A_1 e A_2 forem abertos, então $A_1 \cap A_2$ é um aberto.*

Demonstração. Resulta trivialmente da definição que $\emptyset$ e M são abertos.

Seja $(A_j)_{j \in J}$ uma família de abertos. Seja $x \in \bigcup_{j \in J} A_j$. Existe $l \in J$ tal que $x \in A_l$. Como A_l é aberto, existe $r \in \mathbb{R}^+$, tal que

$$\mathbf{B}(x, r) \subseteq A_l \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j,$$

o que mostra que x é um ponto interior de $\bigcup_{j \in J} A_j$. Logo $\bigcup_{j \in J} A_j$ é aberto.

Sejam A_1, A_2 abertos de M. Seja $x \in A_1 \cap A_2$. Para cada $i \in \{1, 2\}$, como A_i é aberto, existe $r_i \in \mathbb{R}^+$, tal que $\mathbf{B}(x, r_i) \subseteq A_i$. Seja $r = \min\{r_1, r_2\}$. Então $\mathbf{B}(x, r) \subseteq A_1 \cap A_2$, o que mostra que x é um ponto interior de $A_1 \cap A_2$. Logo $A_1 \cap A_2$ é aberto. ■

Corolário 2.32 *Seja (M, d) um espaço métrico. Se $A_1, \ldots, A_n$ forem abertos, então $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ é um aberto.*

Proposição 2.33 *Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto A de M é aberto se e só se A for união de bolas abertas.*

Demonstração. Seja A um subconjunto aberto de M. Para cada $x \in A$, seja $r_x \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mathbf{B}(x, r_x) \subseteq A$. Então $A = \bigcup_{x \in A} \mathbf{B}(x, r_x)$.

A afirmação recíproca resulta das proposições 2.29 e 2.31. ∎

Proposição 2.34 *Seja $(X, d_{|X \times X})$ um subespaço métrico de um espaço métrico (M, d). Um subconjunto C de X é um aberto do subespaço métrico X se e só se existir um aberto A de M tal que $C = A \cap X$.*

Demonstração. Seja C um aberto de X. Para cada $x \in C$, seja $r_x \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\mathbf{B}_X(x, r_x) = \{z \in X : d(x, z) < r_x\} \subseteq C.$$

Então

$$A = \bigcup_{x \in C} \mathbf{B}_M(x, r_x),$$

é um aberto de M e é fácil mostrar que $C = A \cap X$.

Reciprocamente, suponhamos que C é um subconjunto de X e A é um aberto de M tal que $C = A \cap X$. Seja $x \in C$. Como $x \in A$ e A é um aberto de M, existe $r_x \in \mathbb{R}^+$, tal que $\mathbf{B}_M(x, r_x) \subseteq A$. Então

$$\mathbf{B}_X(x, r_x) = \mathbf{B}_M(x, r_x) \cap X \subseteq A \cap X = C,$$

o que mostra que x é um ponto interior de C, relativamente ao espaço X. Logo C é um aberto de X. ∎

Corolário 2.35 *Sejam (M, d) um espaço métrico e X um aberto de M. Um subconjunto C de X é um aberto de X se e só se C for um aberto de M.*

Proposição 2.36 *Sejam (M, d) um espaço métrico, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de M e $l \in M$. A sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para l se e só se, para qualquer aberto A a que l pertencer, existir $p \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq p$, $x_n \in A$.*

Demonstração. Suponhamos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para l. Seja A um aberto a que l pertence. Como A é aberto, existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mathbf{B}(l, \delta) \subseteq A$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para l, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq p$, $d(x_n, l) < \delta$. Portanto, qualquer que seja $n \geq p$, $x_n \in \mathbf{B}(l, \delta) \subseteq A$.

Reciprocamente, suponhamos que, para qualquer aberto A a que l pertence, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq p$, $x_n \in A$. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Como $\mathbf{B}(l, \delta)$ é aberto, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq p$, $x_n \in \mathbf{B}(l, \delta)$, isto é, $d(x_n, l) < \delta$. Logo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para l. ∎

Definição 2.37 Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subseteq M$.

Diz-se que $y \in M$ é um *ponto de acumulação* de X se, para qualquer $\delta \in \mathbb{R}^+$, existir $x \in X$ tal que $0 < d(x, y) < \delta$; isto é, se, para qualquer $\delta \in \mathbb{R}^+$, $X \cap (\mathbf{B}(y, \delta) \setminus \{y\}) \neq \emptyset$.

Diz-se que $x \in X$ é um *ponto isolado* de X se x não for um ponto de acumulação de X.

Proposição 2.38 *Sejam (M, d) um espaço métrico e y um ponto de acumulação de $X \subseteq M$. Qualquer que seja $\delta \in \mathbb{R}^+$, $X \cap (\mathbf{B}(y, \delta) \setminus \{y\})$ é um conjunto infinito.*

Demonstração. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Suponhamos que $X \cap (\mathbf{B}(y, \delta) \setminus \{y\})$ é finito e

$$X \cap (\mathbf{B}(y, \delta) \setminus \{y\}) = \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Seja

$$\epsilon = \min\{d(y, x_1), \ldots, d(y, x_n)\} < \delta.$$

Note-se que ϵ é positivo porque y é distinto de todos os pontos $x_1, \ldots, x_n$. Como y é ponto de acumulação de X, existe $x_{n+1} \in X \cap (\mathbf{B}(y, \epsilon) \setminus \{y\})$. Como $\epsilon < \delta$,

$$x_{n+1} \in X \cap (\mathbf{B}(y, \delta) \setminus \{y\}).$$

Como $d(y, x_{n+1}) < \epsilon = \min\{d(y, x_1), \ldots, d(y, x_n)\}$, $x_{n+1} \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$, o que é uma contradição. Logo $X \cap (\mathbf{B}(y, \delta) \setminus \{y\})$ é infinito. ∎

Proposição 2.39 *Sejam (M, d) um espaço métrico, $X \subseteq M$ e $y \in M$. São equivalentes:*

(a) *y é um ponto de acumulação de X.*

(b) *Para qualquer aberto A tal que $y \in A$, $X \cap (A \setminus \{y\}) \neq \emptyset$.*

(c) *Existe uma sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X, todos distintos de y, que converge para y.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Suponhamos que y é um ponto de acumulação de X. Seja A um aberto a que y pertence. Como A é aberto, existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $A \supseteq \mathbf{B}(y, \delta)$. Então

$$X \cap (A \setminus \{y\}) \supseteq X \cap (\mathbf{B}(y, \delta) \setminus \{y\}) \neq \emptyset.$$

(b) $\Rightarrow$ (c) Suponhamos que (b) é satisfeita. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha-se

$$x_n \in X \cap (\mathbf{B}(y, 1/n) \setminus \{y\}).$$

Assim

$$0 < d(x_n, y) < \frac{1}{n} \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Donde se deduz que a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cujos elementos são todos distintos de y, converge para y.

(c) $\Rightarrow$ (a) Suponhamos que (c) é satisfeita. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para y, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq p$, $d(x_n, y) < \delta$. Como $x_p \neq y$, $0 < d(x_p, y) < \delta$. Logo y é ponto de acumulação de X. ∎

Definição 2.40 Seja (M, d) um espaço métrico. Diz-se que $F \subseteq M$ é um subconjunto *fechado* do espaço métrico M se todos os pontos de acumulação de F pertencerem a F.

Proposição 2.41 *Sejam (M, d) um espaço métrico e $F \subseteq M$. São equivalentes:*

(a) *F é fechado.*

(b) *Para qualquer sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de F, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergir para um limite $l \in M$, então $l \in F$.*

Demonstração. Suponhamos que F é fechado. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de F que converge para um limite $l \in M$. Se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = l$, então $l \in F$. Suponhamos agora que todos os elementos da sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são distintos de l. Pela proposição 2.39, l é ponto de acumulação de F. Como F é fechado, $l \in F$.

Reciprocamente, suponhamos que (b) é satisfeita. Seja y um ponto de acumulação de F. Pela proposição 2.39, existe uma sucessão de elementos de F, todos distintos de y, que converge para y. Por (b), $y \in F$. Logo F é fechado. ∎

Proposição 2.42 *Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto F de M é fechado se e só se $M \setminus F$ for aberto.*

Demonstração. Suponhamos que F é fechado. Seja $y \in M \setminus F$. Como $y \notin F$, y não é ponto de acumulação de F. Assim, existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $F \cap (\mathbf{B}(y, \delta) \setminus \{y\}) = \emptyset$. Como $y \notin F$, $F \cap \mathbf{B}(y, \delta) = \emptyset$. Donde $\mathbf{B}(y, \delta) \subseteq M \setminus F$. Portanto y é ponto interior de $M \setminus F$. Logo $M \setminus F$ é aberto.

Reciprocamente, suponhamos que $M \setminus F$ é aberto. Suponhamos que F não é fechado. Então existe um ponto de acumulação y de F que não pertence a F. Como $y \in M \setminus F$ e $M \setminus F$ é aberto, existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mathbf{B}(y, \delta) \subseteq M \setminus F$. Donde $F \cap \mathbf{B}(y, \delta) = \emptyset$. Donde $F \cap (\mathbf{B}(y, \delta) \setminus \{y\}) = \emptyset$. A última igualdade contradiz a suposição de que y é um ponto de acumulação de F. Logo F é fechado. ∎

Corolário 2.43 *Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto A de M é aberto se e só se $M \setminus A$ for fechado.*

Proposição 2.44 *Seja (M, d) um espaço métrico.*

(a) *$\emptyset$ e M são fechados de M.*

(b) *A intersecção de uma família não vazia de fechados é um fechado.*

(c) *Se F_1, F_2 forem fechados, então $F_1 \cup F_2$ é um fechado.*

Demonstração. Resulta das proposições 2.31 e 2.42.

(a) Pela proposição 2.31, $\emptyset$ e M são abertos. Pela proposição 2.42, $M = M \setminus \emptyset$ e $\emptyset = M \setminus M$ são fechados.

(b) Seja $(F_i)_{i\in I}$ uma família não vazia de fechados. Pela proposição 2.42, $(M \setminus F_i)_{i\in I}$ uma família de abertos. Pela proposição 2.31, $\bigcup_{i\in I}(M \setminus F_i)$ é um aberto. Pela proposição 2.42,

$$\bigcap_{i\in I} F_i = M \setminus \bigcup_{i\in I}(M \setminus F_i)$$

é um fechado.

(c) Exercício. ■

Corolário 2.45 *Seja (M, d) um espaço métrico. Se $F_1, \ldots, F_n$ forem fechados de M, então $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ é um fechado de M.*

Definição 2.46 Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subseteq M$. O conjunto formado pelos elementos de X e pelos pontos de acumulação de X chama-se *fecho* ou *aderência* de X. O fecho de X representa-se por $\overline{X}$.

Proposição 2.47 *Sejam (M, d) um espaço métrico, $X \subseteq M$ e $y \in M$. Então, $y \in \overline{X}$ se e só se y for limite de uma sucessão de elementos de X.*

Demonstração. Suponhamos que $y \in \overline{X}$. Se $y \in X$, então y é o limite da sucessão que tem todos os elementos iguais a y. Suponhamos agora que y é ponto de acumulação de X. Pela proposição 2.39, y é limite de uma sucessão de elementos de X.

Reciprocamente, suponhamos que y é limite de uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X. Se y for igual a algum dos elementos da sucessão, então $y \in X \subseteq \overline{X}$. Se y for distinto de todos os elementos da sucessão, então, pela proposição 2.39, y é ponto de acumulação de X. Portanto $y \in \overline{X}$. Em qualquer dos dois casos, $y \in \overline{X}$. ■

Proposição 2.48 *Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subseteq M$. Então*

$$M \setminus X^\circ = \overline{M \setminus X}.$$

Demonstração. Seja $y \in M \setminus X^\circ$. Seja $n \in \mathbb{N}$. Como $y \notin X^\circ$, $\mathbf{B}(y, 1/n) \not\subseteq X$. Seja $x_n \in \mathbf{B}(y, 1/n) \setminus X$. Assim $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de elementos de $M \setminus X$ e $d(y, x_n) < 1/n \to 0$, isto é, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para y. Pela proposição 2.47, $y \in \overline{M \setminus X}$.

Reciprocamente, seja $y \in \overline{M \setminus X}$. Pela proposição 2.47, y é limite de uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $M \setminus X$. Seja $r \in \mathbb{R}^+$. Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq p$, $d(y, x_n) < r$, o que mostra que $\mathbf{B}(y, r) \not\subseteq X$. Logo $y \notin X^\circ$ e $y \in M \setminus X^\circ$. ∎

Proposição 2.49 *Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subseteq M$. Então*

$$M \setminus \overline{X} = (M \setminus X)^\circ.$$

Demonstração. Seja $Y = M \setminus X$. Então $X = M \setminus Y$. Utilizando a proposição anterior,

$$M \setminus \overline{X} = M \setminus (\overline{M \setminus Y}) = M \setminus (M \setminus Y^\circ) = Y^\circ = (M \setminus X)^\circ.$$ ∎

Proposição 2.50 *Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subseteq M$. Então X° é aberto, $X^\circ \subseteq X$ e X° é o maior aberto contido em X.*

Demonstração. Vejamos que X° é aberto. Seja $x \in X^\circ$. Pela proposição 2.30, existe um aberto A tal que $x \in A \subseteq X$. Seja $y \in A$. Pela proposição 2.30, como $y \in A \subseteq X$, y é um ponto interior de X. Portanto $A \subseteq X^\circ$. Pela proposição 2.30, como $x \in A \subseteq X^\circ$, x é um ponto interior de X°. Logo X° é aberto.

Pela definição de X°, $X^\circ \subseteq X$.

Seja A um aberto contido em X. Seja $x \in A$. Pela proposição 2.30, como $x \in A \subseteq X$, x é um ponto interior de X e $x \in X^\circ$. Logo $A \subseteq X^\circ$. Logo X° é o maior aberto contido em X. ∎

Proposição 2.51 *Seja X um subconjunto de M. Então $\overline{X}$ é fechado, $X \subseteq \overline{X}$ e $\overline{X}$ é o menor fechado que contém X.*

Demonstração. Pela proposição 2.49, $M \setminus \overline{X} = (M \setminus X)^\circ$. Pela proposição 2.50, $(M \setminus X)^\circ$ é aberto. Pela proposição 2.42, $\overline{X}$ é fechado.

Pela definição de $\overline{X}$, $X \subseteq \overline{X}$.

Seja F um fechado que contém X. Então $M \setminus F$ é aberto e $M \setminus F \subseteq M \setminus X$. Pela proposições 2.50 e 2.49, $M \setminus F \subseteq (M \setminus X)^\circ = M \setminus \overline{X}$. Logo $\overline{X} \subseteq F$. Logo $\overline{X}$ é o menor fechado que contém X. ∎

Exercício 2.52 Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subseteq M$.

Mostre que $Y \subseteq X$ é um fechado do subespaço métrico X se e só se existir um fechado F de M tal que $Y = F \cap X$.

Exercício 2.53 Sejam (M, d) um espaço métrico, $x \in M$, $r \in \mathbb{R}^+$ e

$$\mathbf{B}[x, r] = \{y \in M : d(x, y) \leq r\}.$$

Mostre que $\mathbf{B}[x, r]$ é fechado e $\overline{\mathbf{B}(x, r)} \subseteq \mathbf{B}[x, r]$. ([6])

[6] A inclusão pode ser estrita: Se M tiver pelo menos 2 elementos e d for a métrica discreta, então, $\forall x \in M$, $\overline{\mathbf{B}(x, 1)} = \{x\} \subsetneqq M = \mathbf{B}[x, 1]$.

2.4 Limites

Definição 2.54 Sejam (M, d) e (M', d') espaços métricos, $X \subseteq M$, $f : X \to M'$, $x_0 \in M$ um ponto de acumulação de X e $l \in M'$.

Diz-se que f *converge para o limite* l, quando x convergir para x_0 ([7]), se, para qualquer $\delta \in \mathbb{R}^+$, existir $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, tal que, qualquer que seja $x \in X \setminus \{x_0\}$, se $d(x, x_0) < \epsilon$, então $d'(f(x), l) < \delta$. Isto é, se, para qualquer $\delta \in \mathbb{R}^+$, existir $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, tal que, qualquer que seja $x \in X \cap (\mathbf{B}_d(x_0, \epsilon) \setminus \{x_0\})$, $f(x) \in \mathbf{B}_{d'}(l, \delta)$.

Prova-se a seguir que, se f convergir para um limite, quando x convergir para x_0, então esse limite é único. Esse limite único representa-se por

$$\lim_{x \to x_0} f(x).$$

Proposição 2.55 *Sejam* (M, d) *e* (M', d') *espaços métricos,* $X \subseteq M$, $f : X \to M'$ *e* $x_0 \in M$ *um ponto de acumulação de* X*. A aplicação* f *converge para quando muito um limite, quando* x *convergir para* x_0*.*

Demonstração. Suponhamos que f converge para dois limites $l, l' \in M'$, quando x convergir para x_0. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

Como $f(x) \to l$, quando $x \to x_0$, existe $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que, qualquer que seja $x \in X \setminus \{x_0\}$, se $d(x, x_0) < \epsilon$, então $d'(f(x), l) < \delta/2$.

Como $f(x) \to l'$, quando $x \to x_0$, existe $\epsilon' \in \mathbb{R}^+$ tal que, qualquer que seja $x \in X \setminus \{x_0\}$, se $d(x, x_0) < \epsilon'$, então $d'(f(x), l') < \delta/2$.

Seja $r = \min\{\epsilon, \epsilon'\}$. Como x_0 é um ponto de acumulação de X, existe $x \in X \cap (\mathbf{B}(x_0, r) \setminus \{x_0\})$. Assim $x \in X \setminus \{x_0\}$ e $d(x, x_0) < r$. Donde $d'(l, l') \leq d'(l, f(x)) + d'(f(x), l') < \delta/2 + \delta/2 = \delta$. Como δ é um real positivo arbitrário, $d'(l, l') = 0$. Logo $l = l'$. ∎

Proposição 2.56 *Sejam* (M, d) *e* (M', d') *espaços métricos,* $X \subseteq M$, $f : X \to M'$, $x_0 \in M$ *um ponto de acumulação de* X *e* $l \in M'$*.*

São equivalentes:

(a) f *converge para* l*, quando* x *convergir para* x_0*.*

(b) *Para qualquer sucessão* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de elementos de* $X \setminus \{x_0\}$ *que converge para* x_0*, a sucessão* $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ *converge para* l*.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Suponhamos que f converge para l, quando x convergir para x_0. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de $X \setminus \{x_0\}$ que converge para x_0. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

Como f converge para l, quando x convergir para x_0, existe $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que, qualquer que seja $x \in X \setminus \{x_0\}$, se $d(x, x_0) < \epsilon$, então $d'(f(x), l) < \delta$.

Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x_0, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq p$, $d(x_n, x_0) < \epsilon$.

[7] Também se escreve "$f(x) \to l$, quando $x \to x_0$".

Portanto, qualquer que seja $n \geq p$, $d'(f(x_n), l) < \delta$. Logo $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para l.

(b) $\Rightarrow$ (a) Suponhamos que (b) é satisfeita. Com vista a uma contradição, suponhamos que (a) é falsa. Então existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que, qualquer que seja $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, existe $x \in X \setminus \{x_0\}$ tal que $d(x, x_0) < \epsilon$ e $d'(f(x), l) \geq \delta$.

Em particular, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X \setminus \{x_0\}$ tal que $d(x_n, x_0) < 1/n$ e $d'(f(x_n), l) \geq \delta$.

Como $0 \leq d(x_n, x_0) < 1/n \to 0$, a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x_0. Por (b), $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ deveria convergir para l, o que é falso, pois, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $d'(f(x_n), l) \geq \delta > 0$. ■

Proposição 2.57 *Sejam (M, d) e (M', d') espaços métricos, $X \subseteq M$, $f : X \to M'$, $x_0 \in M$ um ponto de acumulação de X e $l \in M'$.*

São equivalentes:

(a) *f converge para l, quando x convergir para x_0.*

(b) *Para qualquer aberto C de M' tal que $l \in C$, existe um aberto A de M tal que $x_0 \in A$ e $f(X \cap (A \setminus \{x_0\})) \subseteq C$.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Suponhamos que (a) é satisfeita. Seja C um aberto de M' tal que $l \in C$. Como C é aberto, existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mathbf{B}_{d'}(l, \delta) \subseteq C$. Por (a), existe $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que, qualquer que seja $x \in X \cap (\mathbf{B}_d(x_0, \epsilon) \setminus \{x_0\})$, $f(x) \in \mathbf{B}_{d'}(l, \delta) \subseteq C$. Logo (b) é satisfeita.

(b) $\Rightarrow$ (a) Suponhamos que (b) é satisfeita. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Então $C = \mathbf{B}_{d'}(l, \delta)$ é um aberto de M' e $l \in C$. Por (b), existe um aberto A de M tal que $x_0 \in A$ e $f(X \cap (A \setminus \{x_0\})) \subseteq C$. Seja $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mathbf{B}_d(x_0, \epsilon) \subseteq A$. Então, qualquer que seja $x \in X \cap (\mathbf{B}_d(x_0, \epsilon) \setminus \{x_0\})$, $f(x) \in C = \mathbf{B}_{d'}(l, \delta)$. Logo (a) é satisfeita. ■

2.5 Continuidade

Definição 2.58 Sejam (M, d) e (M', d') espaços métricos, $f : M \to M'$ e $x_0 \in M$. Diz-se que f é contínua em x_0 se, para qualquer $\delta \in \mathbb{R}^+$, existir $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, tal que, qualquer que seja $x \in M$, se $d(x, x_0) < \epsilon$, então $d'(f(x), f(x_0)) < \delta$. Isto é, se, para qualquer $\delta \in \mathbb{R}^+$, existir $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, tal que $f(\mathbf{B}_d(x_0, \epsilon)) \subseteq \mathbf{B}_{d'}(f(x_0), \delta)$.

Diz-se que f é contínua se f for contínua em todos os pontos do seu domínio.

Se $Y \subseteq M$, diz-se que uma aplicação $h : Y \to M'$ é contínua num ponto $y_0 \in Y$ se h for contínua em y_0, considerando em Y a métrica induzida.

Proposição 2.59 *Sejam (M, d) e (M', d') espaços métricos, $f : M \to M'$ e $x_0 \in M$.*

(a) *Se* x_0 *não for um ponto de acumulação de* M*, então* f *é contínua em* x_0*.*

(b) *Se* x_0 *for um ponto de acumulação de* M*, então* f *é contínua em* x_0 *se e só se* f *convergir para* $f(x_0)$ *quando* x *convergir para* x_0*.*

Demonstração. (a) Suponhamos que x_0 não é ponto de acumulação de M. Então existe $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $M \cap (\mathbf{B}_d(x_0, \epsilon) \setminus \{x_0\} = \emptyset$, isto é, $\mathbf{B}_d(x_0, \epsilon) = \{x_0\}$. Assim, qualquer que seja $\delta \in \mathbb{R}^+$, $f(\mathbf{B}_d(x_0, \epsilon)) = f(\{x_0\}) = \{f(x_0)\} \subseteq \mathbf{B}_{d'}(f(x_0), \delta)$.

A demonstração de (b) é exercício. ∎

Proposição 2.60 *Sejam* (M, d) *e* (M', d') *espaços métricos,* $f : M \to M'$ *e* $x_0 \in M$*. São equivalentes:*

(a) f *é contínua em* x_0*.*

(b) *Para qualquer sucessão* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de elementos de* M *que converge para* x_0*, a sucessão* $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ *converge para* $f(x_0)$*.*

Demonstração. Em primeiro lugar, suponhamos que x_0 é ponto de acumulação de M. Pela proposição anterior, (a) é equivalente a

(c) f converge para $f(x_0)$ quando x convergir para x_0.

Pela proposição 2.56, (c) é equivalente a (b).

Suponhamos agora que x_0 não é ponto de acumulação de M. Pela definição de ponto de acumulação, existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que, qualquer que seja $x \in X \setminus \{x_0\}$, $d(x, x_0) \geq \delta$. Pela proposição anterior, (a) é verdadeira.

Vejamos que (b) também é verdadeira. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de M que converge para x_0. Assim existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq p$, $d(x_n, x_0) < \delta$. Donde, qualquer que seja $n \geq p$, $x_n = x_0$ e $f(x_n) = f(x_0)$. Logo $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x_0 e (b) é verdadeira. ∎

Proposição 2.61 *Sejam* (M, d) *e* (M', d') *espaços métricos,* $f : M \to M'$ *e* $x_0 \in M$*. São equivalentes:*

(a) f *é contínua em* x_0*.*

(b) *Para qualquer aberto* C *de* M' *tal que* $f(x_0) \in C$*, existe um aberto* A *de* M *tal que* $x_0 \in A$ *e* $f(A) \subseteq C$*.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Suponhamos que (a) é satisfeita. Seja C um aberto de M' tal que $f(x_0) \in C$. Existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mathbf{B}_{d'}(f(x_0), \delta) \subseteq C$. Por (a), existe $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(\mathbf{B}_d(x_0, \epsilon)) \subseteq \mathbf{B}_{d'}(f(x_0), \delta) \subseteq C$. Como $A = \mathbf{B}_d(x_0, \epsilon)$ é aberto de M e $x_0 \in A$, a demonstração está completa.

(b) $\Rightarrow$ (a) Suponhamos que (b) é satisfeita. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Então $C = \mathbf{B}_{d'}(f(x_0), \delta)$ é aberto de M' e $f(x_0) \in C$. Por (b), existe um aberto A de M tal que $x_0 \in A$ e $f(A) \subseteq C$. Seja $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mathbf{B}_d(x_0, \epsilon) \subseteq A$. Então $f(\mathbf{B}_d(x_0, \epsilon)) \subseteq f(A) \subseteq C = \mathbf{B}_{d'}(f(x_0), \delta)$. Logo (a) é satisfeita. ∎

Exercício 2.62 Sejam (M, d), (M', d') e (M'', d'') espaços métricos. Sejam $f : M \to M'$, $g : M' \to M''$, $x_0 \in M$.

1. Mostre que, se f for contínua em x_0 e g for contínua em $f(x_0)$, então gf é contínua em x_0.

2. Diz-se que f é *uniformemente contínua* se, para qualquer $\delta \in \mathbb{R}^+$, existir $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que, quaisquer que sejam $x, y \in M$, se $d(x, y) < \epsilon$, então $d'(f(x), f(y)) < \delta$.

   Mostre que:

   (a) Se f for uniformemente contínua, então f é contínua.

   (b) Se f e g forem uniformemente contínuas, então gf é uniformemente contínua.

3. Diz-se que f é *lipschitziana* se existir $\mu \in \mathbb{R}^+$ tal que, quaisquer que sejam $x, y \in M$, $d'(f(x), f(y)) \leq \mu d(x, y)$.

   Mostre que, se f for lipschitziana, então f é uniformemente contínua.

2.6 Espaços métricos completos

Definição 2.63 Diz-se que uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de um espaço métrico (M, d) é uma *sucessão de Cauchy* se, para qualquer $\delta \in \mathbb{R}^+$, existir $p \in \mathbb{N}$ tal que, quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}$, com $m \geq n \geq p$, $d(x_m, x_n) < \delta$.

Proposição 2.64 *Se uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de um espaço métrico (M, d) for convergente, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy.*

Demonstração. Suponhamos que $l \in M$ é o limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq p$, $d(x_n, l) < \delta/2$. Quaisquer que sejam $m, n \geq p$, $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, l) + d(l, x_n) < \delta$. ∎

O recíproco da proposição anterior nem sempre é verdadeiro. No subespaço $(0, +\infty)$ de $\mathbb{R}$, com a métrica euclidiana, a sucessão $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy mas não é convergente.

Definição 2.65 Seja (M, d) um espaço métrico. Diz-se que M é *completo* se todas as sucessões de Cauchy de elementos de M forem convergentes. Diz-se que um subconjunto C de M é *completo* se C, com a métrica induzida, for um espaço métrico completo.

Exemplo 2.66 Pela proposição 1.8, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, com as métricas euclidianas, são espaços métricos completos. $\mathbb{R}$ é um subconjunto completo de $\mathbb{C}$.

Proposição 2.67 *Se C for um subconjunto completo de um espaço métrico M, então C é um subconjunto fechado de M.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de C que converge para um limite $l \in M$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy. Como C é completo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em C. Logo $l \in C$. Pela proposição 2.41, C é fechado. ∎

Proposição 2.68 *Se M for um espaço métrico completo e C for um subconjunto fechado de M, então C é um subconjunto completo de M.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy de elementos de C. Como M é completo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um limite $l \in M$. Como C é fechado, $l \in C$. Logo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em C. Logo C é completo. ∎

Teorema 2.69 [Cantor] *Seja (M, d) um espaço métrico completo. Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de subconjuntos não vazios de M tal que,*

- *qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, X_n é fechado e limitado,*
- *qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $X_n \supseteq X_{n+1}$,*
- $(\operatorname{diam} X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* 0.

Então o conjunto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$ é constituído por um único elemento.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, fixemos um elemento x_n em X_n. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Como $(\operatorname{diam} X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq p$, $\operatorname{diam} X_n < \delta$. Sejam $m \geq n \geq p$. Então $x_m \in X_m \subseteq X_p$ e $x_n \in X_n \subseteq X_p$. Assim $d(x_m, x_n) \leq \operatorname{diam} X_p < \delta$. Logo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy. Como M é completo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um limite $l \in M$. Seja $n \in \mathbb{N}$. Note-se que l é o limite da sucessão $(x_m)_{m\geq n}$, que é uma sucessão de elementos de X_n. Como X_n é fechado, $l \in X_n$. Logo $l \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Seja $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Então, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq d(l, x) \leq \operatorname{diam} X_n$. Como $(\operatorname{diam} X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0, deduz-se que $d(l, x) = 0$. Logo $l = x$. Logo l é o único elemento de $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$. ∎

Exercício 2.70 Seja (M, d) um espaço métrico. Mostre que:

1. $\emptyset$ é um subconjunto completo de M.
2. Se C_1 e C_2 forem subconjuntos completos de M, então $C_1 \cup C_2$ é completo.
3. Se $(C_i)_{i\in I}$ for uma família não vazia de subconjuntos completos de M, então $\bigcap_{i\in I} C_i$ é completo.

2.7 Espaços métricos compactos

Definição 2.71 Diz-se que um espaço métrico (M, d) é *compacto* se toda a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de M tiver pelo menos um sublimite.

Diz-se que um subconjunto K de M é *compacto* se K, com a métrica induzida, K for um espaço métrico compacto.

Exemplo 2.72 Qualquer subconjunto finito de um espaço métrico é compacto. Um conjunto infinito, com a métrica discreta, não é compacto.

Proposição 2.73 *Se K for um subconjunto compacto de um espaço métrico M, então K é um subconjunto completo de M.*

Demonstração. Seja K um subconjunto compacto de M. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy de elementos de K. Como K é compacto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem um sublimite $l \in K$ e existe uma aplicação estritamente crescente $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $(x_{\nu(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ converge para l. Vejamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para l. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$.

Como $(x_{\nu(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ converge para l, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $m \geq p$, $d(x_{\nu(m)}, l) < \delta/2$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que, quaisquer que sejam $m \geq n \geq q$, $d(x_m, x_n) < \delta/2$. Seja $m \geq \max\{p, q\}$. Então $\nu(m) \geq m$ e

$$d(x_m, l) \leq d(x_m, x_{\nu(m)}) + d(x_{\nu(m)}, l) < \delta.$$

Logo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para l. Logo K é completo. ■

Proposição 2.74 *Seja K um subconjunto de um espaço métrico M. São equivalentes:*

(a) *K é compacto.*

(b) [Propriedade de Bolzano-Weierstrass] *Qualquer subconjunto infinito de K tem pelo menos um ponto de acumulação que pertence a K.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Suponhamos que K é compacto. Seja X um subconjunto infinito de K. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de X, todos distintos. Como K é compacto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsucessão convergente para um limite $l \in K$. Como os elementos da sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são todos distintos, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsucessão com os elementos todos distintos de l que converge para $l \in K$. Portanto l é um ponto de acumulação de X em K.

(b) $\Rightarrow$ (a) Suponhamos que (b) é satisfeita. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de K. Se o conjunto $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ for finito, então pelo menos um dos elementos de X repete-se uma infinidade de vezes na sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Assim $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsucessão constante que converge para um elemento de K.

Suponhamos agora que $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é infinito. Por (b), X tem pelo menos um ponto de acumulação $y \in K$. Recursivamente, construimos uma aplicação estritamente crescente $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ do modo seguinte. Seja $\nu(1) = 1$. Seja $m \geq 2$. Pela proposição 2.38, $X \cap \mathbf{B}(y, 1/m)$ é um conjunto infinito. Assim existe $\nu(m) \in \mathbb{N}$ tal que $\nu(m) > \nu(m-1)$ e $x_{\nu(m)} \in X \cap \mathbf{B}(y, 1/m)$. Como

$$0 \leq d(x_{\nu(m)}, y) < \frac{1}{m} \to 0,$$

quando $m \to \infty$, deduz-se que a subsucessão $(x_{\nu(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $y \in K$.

Logo K é compacto. ∎

Proposição 2.75 *Seja K um subconjunto de um espaço métrico M.*

(a) *Se K for compacto, então K é fechado e limitado.*

(b) *Se M for compacto e K for fechado, então K é compacto.*

Demonstração. (a) Suponhamos que K é compacto. Pela proposição 2.73, K é completo. Pela proposição 2.67, K é fechado.

Com vista a uma contradição, suponhamos que K não é limitado. Seja $a \in M$. Pela proposição 2.13, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in K$ tal que $d(x_n, a) > n$. Seja $(x_{\nu(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ uma subsucessão da sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, $d(x_{\nu(m)}, a) > \nu(m) \geq m$. Pela proposição 2.13, concluimos que o conjunto $\{x_{\nu(m)} : m \in \mathbb{N}\}$ não é limitado. Pela proposição 2.21, $(x_{\nu(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ não é convergente. Logo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não tem sublimites. Logo K não é compacto.

(b) Suponhamos que M é compacto e K é fechado. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de K. Como M é compacto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem um sublimite $l \in M$ e existe uma subsucessão $(x_{\nu(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para l. Como K é fechado, pela proposição 2.41, $l \in K$. Logo K é compacto. ∎

Exercício 2.76 Mostre que, se K for um subconjunto compacto de um espaço métrico M e F for um subconjunto fechado de M, então $K \cap F$ é compacto.

Exercício 2.77 Seja M um espaço métrico. Mostre que:

1. $\emptyset$ é um subconjunto compacto de M.
2. Se K_1 e K_2 forem subconjuntos compactos de M, então $K_1 \cup K_2$ é compacto.
3. Se $(K_i)_{i \in I}$ for uma família não vazia de subconjuntos compactos de M, então $\bigcap_{i \in I} K_i$ é compacto. ([8])

2.8 Caraterização de Borel-Lebesgue dos conjuntos compactos

Definição 2.78 Diz-se que um subconjunto X de um espaço métrico M é *totalmente limitado* se, para qualquer $\delta \in \mathbb{R}^+$, existirem $p \in \mathbb{N}$ e subconjuntos $Z_1, \ldots, Z_p$ de M limitados com diâmetro que não excede δ tais que $X \subseteq Z_1 \cup \cdots \cup Z_p$.

O subconjunto $\emptyset$ de um espaço métrico é totalmente limitado, pois, tomando $Z_1 = \emptyset$, vem $\emptyset \subseteq Z_1$ e $\operatorname{diam} Z_1 = 0$.

Proposição 2.79 *Seja X um subconjunto de um espaço métrico M.*
Se X for totalmente limitado, então X é limitado.
Se X for totalmente limitado e $Y \subseteq X$, então Y é totalmente limitado.

Demonstração. Exercício. ∎

Lema 2.80 *Se X for um subconjunto limitado de um espaço métrico M, então $\overline{X}$ é limitado e* $\operatorname{diam} \overline{X} = \operatorname{diam} X$.

Demonstração. Sejam $x, y \in \overline{X}$. Pela proposição 2.47, existem sucessões $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X tais que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para x e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para y. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Assim existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq p$, $d(x_n, x) < \delta$ e $d(y_n, y) < \delta$. Donde

$$d(x, y) \leq d(x, x_p) + d(x_p, y_p) + d(y_p, y) < \delta + \operatorname{diam} X + \delta.$$

Como δ é um número real positivo arbitrário, $d(x, y) \leq \operatorname{diam} X$. Donde $\overline{X}$ é limitado e $\operatorname{diam} \overline{X} \leq \operatorname{diam} X$. Como $X \subseteq \overline{X}$, $\operatorname{diam} X \leq \operatorname{diam} \overline{X}$. Logo $\operatorname{diam} \overline{X} = \operatorname{diam} X$. ∎

Lema 2.81 *Se K for um subconjunto compacto de um espaço métrico M, então K é totalmente limitado.*

[8]Sugestão: Utilize a proposição 2.75.

Demonstração. Seja K um subconjunto de um espaço métrico M que não é totalmente limitado. Então

(a) existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que, quaisquer que sejam $p \in \mathbb{N}$ e $Z_1, \ldots, Z_p \subseteq M$ limitados com diâmetro que não excede δ, $K \not\subseteq Z_1 \cup \cdots \cup Z_p$.

Para cada $x \in M$, $\operatorname{diam} \mathbf{B}(x, \delta/2) \leq \delta$. De facto, quaisquer que sejam $y, z \in \mathbf{B}(x, \delta/2)$, $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) < \delta$.

Seguidamente, escolhemos uma sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de K tal que, qualquer que seja $n \geq 2$,

$$x_n \notin \bigcup_{j=1}^{n-1} \mathbf{B}(x_j, \delta/2).$$

Como K não é totalmente limitado, $K \neq \emptyset$. Escolha-se $x_1 \in K$. Suponhamos que já escolhemos $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Por (a),

$$K \not\subseteq \bigcup_{j=1}^{n-1} \mathbf{B}(x_j, \delta/2).$$

Escolha-se

$$x_n \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} \mathbf{B}(x_j, \delta/2).$$

Quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$, $x_m \notin \mathbf{B}(x_n, \delta/2)$, e, portanto, $d(x_m, x_n) \geq \delta/2$. Seja $(x_{\nu(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ uma subsucessão de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Então, quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$, vem $\nu(m) > \nu(n)$ e $d(x_{\nu(m)}, x_{\nu(n)}) \geq \delta/2$. Assim $(x_{\nu(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ não é uma sucessão de Cauchy e, portanto, não é convergente. Logo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não tem sublimites. Logo K não é compacto. ∎

Exemplo 2.82 Consideremos o espaço métrico (ℓ^∞, d_∞).

Seja $X = \mathbf{B}[0, 1]$, o subconjunto de ℓ^∞ formado por todas as sucessões cuja distância à sucessão nula não excede 1.

Com vista a uma contradição, suponhamos que X é totalmente limitado. Então existem $p \in \mathbb{N}$ e subconjuntos $Z_1, \ldots, Z_p$ de ℓ^∞ limitados com diâmetro que não excede $1/2$ tais que $X \subseteq Z_1 \cup \cdots \cup Z_p$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja e_k a sucessão cujo k-ésimo termo é 1 e os restantes são nulos. Claramente, as sucessões e_k pertencem a X. Como existe uma infinidade de sucessões e_k, existe $j \in \{1, \ldots, p\}$ e existem $k, l \in \mathbb{N}$ tais que $k \neq l$ e $e_k, e_l \in Z_j$. Então

$$1 = d_\infty(e_k, e_l) \leq \operatorname{diam} Z_j \leq 1/2,$$

o que é absurdo. Logo X não é totalmente limitado. Pela proposição anterior, X não é compacto.

Sabemos, das disciplinas de Análise Matemática dos primeiros anos, que um subconjunto K de $\mathbb{R}^k$ é compacto se e só se K for fechado e limitado.

Neste exemplo, X não é compacto, mas é fechado (exercício 2.53) e limitado.

Lema 2.83 *Seja X um subconjunto fechado e totalmente limitado de um espaço métrico M. Suponhamos que*

(a) *existe uma família $(A_i)_{i\in I}$ de abertos de M tal que $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$, e, para toda a parte finita I_0 de I, $X \not\subseteq \bigcup_{i\in I_0} A_i$.*

Então, qualquer que seja $\delta \in \mathbb{R}^+$, existe um subconjunto fechado e totalmente limitado S de M tal que $S \subseteq X$, $\operatorname{diam} S \leq \delta$ e, para toda a parte finita I_0 de I, $S \not\subseteq \bigcup_{i\in I_0} A_i$.

Demonstração. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Como X é totalmente limitado, existem $p \in \mathbb{N}$ e $Z_1, \ldots, Z_p \subseteq M$ limitados e com diâmetro que não excede δ tais que $X \subseteq Z_1 \cup \cdots \cup Z_p$.

Com vista a uma contradição, suponhamos que, para cada $j \in \{1, \ldots, p\}$, existe uma parte finita I_j de I tal que $X \cap Z_j \subseteq \bigcup_{i\in I_j} A_i$. Então

$$X = X \cap (Z_1 \cup \cdots \cup Z_p) = (X \cap Z_1) \cup \cdots \cup (X \cap Z_p) \subseteq \bigcup_{i\in I_1\cup\cdots\cup I_p} A_i,$$

o que contradiz (a). Assim existe $j \in \{1, \ldots, p\}$ tal que, para toda a parte finita I_0 de I, $X \cap Z_j \not\subseteq \bigcup_{i\in I_0} A_i$.

Como X é fechado e $X \cap Z_j \subseteq X$, vem que $\overline{X \cap Z_j} \subseteq X$. Como X é totalmente limitado, $\overline{X \cap Z_j}$ também o é. Além disso,

$$\operatorname{diam}(\overline{X \cap Z_j}) = \operatorname{diam}(X \cap Z_j) \leq \operatorname{diam} Z_j \leq \delta.$$

Finalmente, como $X \cap Z_j \subseteq \overline{X \cap Z_j}$, deduz-se que, para toda a parte finita I_0 de I, $\overline{X \cap Z_j} \not\subseteq \bigcup_{i\in I_0} A_i$. ■

Teorema 2.84 *Seja M um espaço métrico. São equivalentes:*

(a) *M é compacto.*

(b) [Propriedade de Borel-Lebesgue] *Qualquer que seja a família de abertos $(A_i)_{i\in I}$ de M tal que $M = \bigcup_{i\in I} A_i$, existe uma parte finita I_0 de I tal que $M = \bigcup_{i\in I_0} A_i$.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Com vista a uma contradição, suponhamos que (a) é verdadeira e (b) é falsa. Como (b) é falsa, existe uma família de abertos $(A_i)_{i\in I}$ de M tal que $M = \bigcup_{i\in I} A_i$, e, para toda a parte finita I_0 de I, $M \neq \bigcup_{i\in I_0} A_i$.

Pelo lema 2.81, M é completamente limitado. Pelo lema anterior, existe um subconjunto fechado e totalmente limitado S_1 de M tal que $\operatorname{diam} S_1 < 1$ e, para toda a parte finita I_0 de I, $S_1 \not\subseteq \bigcup_{i\in I_0} A_i$.

Pelo lema anterior, existe um subconjunto fechado e totalmente limitado S_2 de M tal que $S_2 \subseteq S_1$, $\operatorname{diam} S_2 \leq 1/2$ e, para toda a parte finita I_0 de I, $S_2 \not\subseteq \bigcup_{i\in I_0} A_i$.

Repetindo o argumento anterior sucessivamente, construimos uma sucessão de subconjuntos fechados de M,

$$S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots ,$$

tal que, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, S_n é totalmente limitado, $\operatorname{diam} S_n \leq 1/n$ e, para qualquer parte finita I_0 de I, $S_n \not\subseteq \bigcup_{i\in I_0} A_i$. Note-se que $S_n \neq \emptyset$.

Pela proposição 2.73, M é completo. Pelo teorema 2.69, o conjunto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n$ é constituído por um único elemento x. Como $M = \bigcup_{i\in I} A_i$, existe $j \in I$ tal que $x \in A_j$. Como A_j é aberto, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\mathbf{B}(x, r) \subseteq A_j$.

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < r$. Seja $y \in S_n$. Como $\operatorname{diam} S_n \leq 1/n$, $d(y, x) \leq 1/n < r$. Donde $y \in \mathbf{B}(x, r) \subseteq A_j$. Logo $S_n \subseteq A_j$, o que é absurdo.

(b) $\Rightarrow$ (a) Com vista a uma contradição, suponhamos que (b) é verdadeira e (a) é falsa. Pela proposição 2.74, existe um subconjunto infinito X de M que não tem pontos de acumulação em M.

Seja $y \in M$. Como y não é ponto de acumulação de X, existe um aberto A_y de M tal que $y \in A_y$ e $X \cap (A_y \setminus \{y\}) = \emptyset$. Assim $X \cap A_y \subseteq \{y\}$.

Claramente

$$M = \bigcup_{y\in K} A_y.$$

Como (b) é satisfeita, existe um subconjunto finito L de M tal que

$$M = \bigcup_{y\in L} A_y.$$

Então

$$X = X \cap M = X \cap \bigcup_{y\in L} A_y = \bigcup_{y\in L} (X \cap A_y) \subseteq \bigcup_{y\in L} \{y\} = L,$$

o que é absurdo, pois X é infinito e L é finito. ■

Corolário 2.85 *Seja K um subconjunto de M. São equivalentes as afirmações seguintes:*

(a) *K é compacto.*

(b) [Propriedade de Borel-Lebesgue] *Qualquer que seja a família de abertos $(A_i)_{i\in I}$ de M tal que $K \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$, existe uma parte finita I_0 de I tal que $K \subseteq \bigcup_{i\in I_0} A_i$.*

2.9 Continuidade uniforme

Sejam (M, d) e (M', d') espaços métricos e $f : M \to M'$.

Diz-se que f é *uniformemente contínua* se, para qualquer $\delta \in \mathbb{R}^+$, existir $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que, quaisquer que sejam $x, y \in M$, se $d(x, y) < \epsilon$, então $d'(f(x), f(y)) < \delta$.

É fácil verificar que, se f for uniformemente contínua, então f é contínua. A afirmação recíproca nem sempre é verdadeira. Por exemplo, com as métricas usuais, a aplicação

$$g : (0, 1) \to \mathbb{R} \quad t \mapsto 1/t,$$

é contínua mas não é uniformemente contínua.

Teorema 2.86 *Sejam (M, d) e (M', d') espaços métricos e $f : M \to M'$. Se M for compacto e f for contínua, então f é uniformemente contínua.*

Demonstração. Com vista a uma contradição, suponhamos que M é compacto, f é contínua e f não é uniformemente contínua. Então existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que, qualquer que seja $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, existem $x, y \in M$ tais que $d(x, y) < \epsilon$ e $d'(f(x), f(y)) \geq \delta$. Em particular, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, existem $x_n, y_n \in M$ tais que

$$d(x_n, y_n) < 1/n \qquad \text{e} \qquad d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \delta. \tag{2.1}$$

Como M é compacto, a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsucessão $(x_{\nu(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ que converge para um limite $l \in M$. Assim

$$d(y_{\nu(m)}, l) \leq d(y_{\nu(m)}, x_{\nu(m)}) + d(x_{\nu(m)}, l) < \frac{1}{\nu(m)} + d(x_{\nu(m)}, l) \to 0,$$

quando $m \to \infty$. Portanto a sucessão $(y_{\nu(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ converge para l. Como f é contínua, as sucessões $(f(x_{\nu(m)}))_{m\in\mathbb{N}}$ e $(f(y_{\nu(m)}))_{m\in\mathbb{N}}$ convergem para $f(l)$. Assim

$$d'(f(x_{\nu(m)}), f(y_{\nu(m)})) \leq d'(f(x_{\nu(m)}), l) + d'(l, f(y_{\nu(m)})) \to 0,$$

quando $m \to \infty$, o que é uma contradição, porque, de acordo com (2.1), $d'(f(x_{\nu(m)}), f(y_{\nu(m)})) \geq \delta$, qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$. ∎

Capítulo 3

Espaços Topológicos

3.1 Definição e exemplos

Definição 3.1 Seja T um conjunto. Chama-se *topologia* em T a um conjunto τ de partes de T tal que

(T_1) $\emptyset, T \in \tau$,

(T_2) se $(A_i)_{i\in I}$ for uma família de elementos de τ, então $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$,

(T_3) se $A_1, A_2 \in \tau$, então $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

Se τ for uma topologia em T, diz-se que o par (T, τ) é um *espaço topológico*, ou, se não existir perigo de confusão, que T é um *espaço topológico*. Os elementos de τ chamam-se subconjuntos *abertos* do espaço topológico T.

Proposição 3.2 *Seja τ uma topologia num conjunto T. Se $A_1, \ldots, A_n \in \tau$, então $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \tau$.*

Exemplo 3.3 Seja (M, d) um espaço métrico. O conjunto τ dos subconjuntos abertos de M, relativamente à métrica d, é uma topologia em M, que chamaremos *topologia associada* à métrica d.

Dizemos que um espaço topológico (T, τ) é *metrizável*, ou que a topologia τ é *metrizável*, se τ estiver associada a uma métrica.

Chamamos topologia *euclidiana* ou *usual* de $\mathbb{F}^k$ à topologia associada à métrica euclidiana.

Exemplo 3.4 Seja T um conjunto. Relativamente à métrica discreta, qualquer subconjunto de T é aberto (cf. exemplo 2.28). Assim o conjunto $\mathcal{P}(T)$ de todas as partes de T é a topologia associada à métrica discreta de T. Dizemos que $\mathcal{P}(T)$ é a *topologia discreta* em T.

Exemplo 3.5 Seja T um conjunto. Então $\tau = \{\emptyset, T\}$ é uma topologia em T, chamada *topologia caótica* (ou *grosseira*).

Exemplo 3.6 Seja T um conjunto. Então

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{X \subseteq T : T \setminus X \text{ é finito}\}$$

é uma topologia em T, chamada *topologia cofinita*.

Demonstração. Pela definição de τ, $\emptyset \in \tau$. Como $T \setminus T = \emptyset$ é finito, $T \in \tau$.
Seja $(X_i)_{i \in I}$ uma família de elementos de τ. Se, para qualquer $i \in I$, $X_i = \emptyset$, então $\bigcup_{i \in I} X_i = \emptyset \in \tau$. Suponhamos agora que existe $i_0 \in I$ tal que $X_{i_0} \neq \emptyset$. Então $T \setminus X_{i_0}$ é finito e

$$T \setminus \bigcup_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} (T \setminus X_i) \subseteq T \setminus X_{i_0}.$$

Assim $T \setminus \bigcup_{i \in I} X_i$ é finito e $\bigcup_{i \in I} X_i \in \tau$.
Finalmente, sejam $X_1, X_2 \in \tau$. Se existe $i \in \{1, 2\}$ tal que $X_i = \emptyset$, então $X_1 \cap X_2 = \emptyset \in \tau$. Suponhamos agora que, qualquer que seja $i \in \{1, 2\}$, $X_i \neq \emptyset$. Então, qualquer que seja $i \in \{1, 2\}$, $T \setminus X_i$ é finito e

$$T \setminus (X_1 \cap X_2) = (T \setminus X_1) \cup (T \setminus X_2)$$

é finito. Portanto $X_1 \cap X_2 \in \tau$.
Logo τ é uma topologia em T. ■

Se T for finito, então a topologia cofinita é a topologia discreta.
Se T for infinito, então a topologia cofinita não é metrizável.

Demonstração. A primeira afirmação é trivial. Provemos a segunda.
Com vista a um absurdo, suponhamos que T é infinito e a topologia cofinita está associada a uma métrica d.
Sejam x, y elementos distintos de T. Seja $\epsilon = d(x, y)/2 \in \mathbb{R}^+$. Como $\mathbf{B}(x, \epsilon)$ e $\mathbf{B}(y, \epsilon)$ são abertos, $T \setminus \mathbf{B}(x, \epsilon)$ e $T \setminus \mathbf{B}(y, \epsilon)$ são finitos. Portanto $\mathbf{B}(x, \epsilon)$ e $\mathbf{B}(y, \epsilon)$ são infinitos. Se existisse $z \in \mathbf{B}(x, \epsilon) \cap \mathbf{B}(y, \epsilon)$, então

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2\epsilon = d(x, y),$$

o que é absurdo. Logo $\mathbf{B}(x, \epsilon) \cap \mathbf{B}(y, \epsilon) = \emptyset$. Donde $\mathbf{B}(x, \epsilon) \subseteq T \setminus \mathbf{B}(y, \epsilon)$, o que é absurdo, pois $\mathbf{B}(x, \epsilon)$ é infinito enquanto $T \setminus \mathbf{B}(y, \epsilon)$ é finito. ■

Exemplo 3.7 Seja (T, τ) um espaço topológico. Seja $X \subseteq T$. Então

$$\tau' = \{X \cap A : A \text{ é aberto de } T\}$$

é uma topologia em X. Diz-se que τ' é a topologia em X *induzida* pela topologia τ. Diz-se também que (X, τ') é um *subespaço topológico* de (T, τ).

Demonstração de que τ' é uma topologia em X. Como $\emptyset = X \cap \emptyset$ e $\emptyset \in \tau$, $\emptyset \in \tau'$. Como $X = X \cap T$ e $T \in \tau$, $X \in \tau'$.

Seja $(C_i)_{i\in I}$ uma família de elementos de τ'. Para cada $i \in I$, existe $A_i \in \tau$ tal que $C_i = X \cap A_i$. Assim

$$\bigcup_{i\in I} C_i = \bigcup_{i\in I}(X \cap A_i) = X \cap \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Como τ é uma topologia, $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$. Portanto, $\bigcup_{i\in I} C_i \in \tau'$.

Sejam $C_1, C_2 \in \tau'$. Para cada $i \in \{1,2\}$, existe $A_i \in \tau$ tal que $C_i = X \cap A_i$. Assim

$$C_1 \cap C_2 = (X \cap A_1) \cap (X \cap A_2) = X \cap (A_1 \cap A_2).$$

Como τ é uma topologia, $A_1 \cap A_2 \in \tau$. Portanto $C_1 \cap C_2 \in \tau'$.

Logo τ' é uma topologia em X. ■

Sejam agora (M, d) um espaço métrico e $X \subseteq M$. A topologia em X induzida pela topologia em M associada à métrica d é igual à topologia em X associada à métrica $d_{|X\times X}$.

Demonstração. A topologia em X induzida pela topologia em M associada à métrica d é

$$\tau = \{X \cap A : A \text{ é aberto de } (M, d)\}.$$

A topologia em X associada à métrica $d_{|X\times X}$ é

$$\tau' = \{C : C \text{ é aberto de } (X, d_{|X\times X})\}.$$

Pela proposição 2.34, $\tau = \tau'$. ■

Proposição 3.8 *Seja T um conjunto. Seja $(\tau_j)_{j\in J}$ uma família não vazia de topologias em T. Então $\bigcap_{j\in J} \tau_j$ é uma topologia em T.*

Demonstração. Para cada $j \in J$, $\emptyset, T \in \tau_j$ porque τ_j é uma topologia em T. Portanto $\emptyset, T \in \bigcap_{j\in J} \tau_j$.

Seja $(A_i)_{i\in I}$ uma família de elementos de $\bigcap_{j\in J} \tau_j$. Seja $j \in J$. Então $(A_i)_{i\in I}$ uma família de elementos de τ_j. Como τ_j é uma topologia em T, $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau_j$. Portanto $\bigcup_{i\in I} A_i \in \bigcap_{j\in J} \tau_j$.

Sejam $A_1, A_2 \in \bigcap_{j\in J} \tau_j$. Seja $j \in J$. Então $A_1, A_2 \in \tau_j$. Como τ_j é uma topologia em T, $A_1 \cap A_2 \in \tau_j$. Portanto $A_1 \cap A_2 \in \bigcap_{j\in J} \tau_j$.

Logo $\bigcap_{j\in J} \tau_j$ é uma topologia em T. ■

Definição 3.9 Sejam T um conjunto e $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{P}(T)$. Chamamos *topologia em T gerada* por $\mathcal{Z}$ à intersecção de todas as topologias em T que contêm $\mathcal{Z}$ ([1]). A topologia em T gerada por $\mathcal{Z}$ é a menor, para a inclusão de conjuntos, topologia em T que contém $\mathcal{Z}$.

[1]Note-se que existe pelo menos uma topologia em T que contém $\mathcal{Z}$: a topologia discreta $\mathcal{P}(T)$.

Definição 3.10 Sejam τ, τ' topologias num conjunto T. Diz-se que τ é *mais fina do que* τ' se $\tau \supseteq \tau'$.

Proposição 3.11 *Sejam d e d' métricas num conjunto M tais que existe $\nu \in \mathbb{R}^+$ tal que, quaisquer que sejam $x, y \in M$, $d'(x, y) \leq \nu d(x, y)$. Então a topologia τ associada à métrica d é mais fina do que a topologia τ' associada à métrica d'.*

Demonstração. Seja $A \in \tau'$. Seja $x \in A$. Como A é um aberto de (M, d'), existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\mathbf{B}_{d'}(x, r) = \{y \in M : d'(x, y) < r\} \subseteq A.$$

Assim

$$\mathbf{B}_d(x, r/\nu) = \{y \in M : d(x, y) < r/\nu\} \subseteq \{y \in M : d'(x, y) < r\} \subseteq A.$$

Portanto x é ponto interior de A relativamente à métrica d. Logo A é um aberto de (M, d), ou seja, $A \in \tau$. Logo $\tau' \subseteq \tau$. ■

Corolário 3.12 *Sejam d e d' métricas num conjunto M. Se d e d' forem equivalentes, então d e d' têm associada a mesma topologia.*

Exercício 3.13 Mostre que, se T for um conjunto com pelo menos 2 elementos e τ for a topologia caótica em T, então τ não é metrizável.

Exercício 3.14 Seja $M = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Sejam d a métrica usual em M e d' a métrica discreta em M. Mostre que:

1. A sucessão $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em (M, d) e não é de Cauchy em (M, d').
2. (M, d') é completo e (M, d) não é completo.
3. A topologia discreta em M está associada às métricas d e d'. ([2])

Exercício 3.15 Seja (M, d) um espaço métrico. Mostre que:

1. A aplicação
$$d' : M \times M \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \min\{1, d(x, y)\},$$
é uma métrica em M.
2. As métricas d e d' têm associada a mesma topologia.
3. As métricas d e d' nem sempre são equivalentes. (Dê um exemplo.)

[2] Este exercício mostra que a completude de um espaço métrico não é uma propriedade topológica, isto é, não pode ser caraterizada utilizando apenas a topologia associada à métrica.

3.2 Bases de abertos

Definição 3.16 Seja (T, τ) um espaço topológico. Chamamos *base de abertos* do espaço topológico T a qualquer subconjunto $\mathcal{B}$ de τ tal que todo o aberto de T é união de uma família de elementos de $\mathcal{B}$.

Exemplo 3.17 Seja (T, τ) um espaço topológico. O conjunto de todos os abertos de T é uma base de abertos de T.

Exemplo 3.18 Seja (M, d) um espaço métrico. Pela proposição 2.33, o conjunto de todas as bolas abertas de M é uma base de abertos de M, relativamente à topologia associada a d.

Proposição 3.19 *Seja (T, τ) um espaço topológico. Se $\mathcal{B}$ for uma base de abertos de T, então τ é a topologia em T gerada por $\mathcal{B}$.*

Demonstração. Exercício.

Proposição 3.20 *Seja $\mathcal{B}$ um conjunto de abertos de um espaço topológico T. São equivalentes:*

(a) *$\mathcal{B}$ é uma base de abertos de T.*

(b) *Qualquer que seja o aberto A e qualquer que seja $x \in A$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq A$.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Suponhamos que (a) é satisfeita. Seja A um aberto e seja $x \in A$. Como $\mathcal{B}$ é uma base de abertos de T, existe uma família $(B_i)_{i \in I}$ de elementos de $\mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup_{i \in I} B_i$. Como $x \in A$, existe $j \in I$ tal que $x \in B_j$. Claramente $x \in B_j \subseteq A$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Suponhamos que (b) é satisfeita. Seja A um aberto. Por (b), para cada $x \in A$, existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq A$. É fácil verificar que

$$A = \bigcup_{x \in A} B_x.$$

Logo $\mathcal{B}$ é uma base de abertos de T. ∎

Proposição 3.21 *Seja $\mathcal{B}$ um conjunto de partes de um conjunto T. São equivalentes:*

(a) *Existe uma topologia τ em T tal que $\mathcal{B}$ é uma base de abertos de (T, τ).*

(b) *São satisfeitas as seguintes condições:*

   (i) *Qualquer que seja $x \in T$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$.*

   (ii) *Quaisquer que sejam $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Suponhamos que (a) é satisfeita. Então a afirmação (b) no enunciado da proposição 3.20 é satisfeita.

Seja $x \in T$. Pela afirmação (b) no enunciado da proposição 3.20, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq T$. Portanto (i) é satisfeita.

Provemos agora (ii). Sejam $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$. Como $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $\mathcal{B}$ é uma base de abertos, os conjuntos B_1 e B_2 são abertos. Portanto $B_1 \cap B_2$ é aberto. Pela afirmação (b) no enunciado da proposição 3.20, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Suponhamos que (b) é satisfeita. Seja τ o conjunto das partes A de T tais que A é união de elementos de $\mathcal{B}$. Vejamos que τ é uma topologia em T.

O conjunto vazio é a união da família vazia de elementos de $\mathcal{B}$. Portanto $\emptyset \in \tau$. Por (i), para cada $x \in T$, existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x$. Então

$$T = \bigcup_{x \in T} B_x \in \tau.$$

Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de elementos de τ. Para cada $i \in I$, existe uma família $(B_{i,j})_{j \in J_i}$ de elementos de $\mathcal{B}$ tal que $A_i = \bigcup_{j \in J_i} B_{i,j}$. Então

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} B_{i,j} \in \tau.$$

Sejam $B, D \in \mathcal{B}$. Por (ii), para cada $x \in B \cap D$, existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq B \cap D$. Então

$$B \cap D = \bigcup_{x \in B \cap D} B_x \in \tau.$$

Sejam agora $A_1, A_2 \in \tau$. Existem famílias $(B_i)_{i \in I}$ e $(D_j)_{j \in J}$ de elementos de $\mathcal{B}$ tais que

$$A_1 = \bigcup_{i \in I} B_i \quad \text{e} \quad A_2 = \bigcup_{j \in J} D_j.$$

Então

$$A_1 \cap A_2 = \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} D_j \right) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} (B_i \cap D_j).$$

Tendo em conta os dois parágrafos anteriores, $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

Logo τ é uma topologia em T. Pela definição de τ, $\mathcal{B}$ é uma base de abertos do espaço (T, τ). ∎

Exercício 3.22 Seja $T = \{1, 2, 3, 4\}$. Construa a topologia gerada por

$$X = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{4\}\}.$$

Diga se X é uma base de abertos para essa topologia.

Exercício 3.23 Mostre que um conjunto $\mathcal{B}$ de partes de um conjunto T é uma base de abertos para a topologia discreta em T se e só se, qualquer que seja $x \in T$, $\{x\} \in \mathcal{B}$.

Exercício 3.24 Seja $\mathcal{B}$ uma base de abertos de um espaço topológico T e seja X um subespaço de T. Mostre que

$$\mathcal{B}' = \{B \cap X : B \in \mathcal{B}\}$$

é uma base de abertos de X.

Exercício 3.25 [Topologia da reta acabada] Fixemos dois objetos distintos $-\infty, +\infty$ que não pertencem a $\mathbb{R}$ e seja $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Estendemos a ordenação de $\mathbb{R}$ a $\overline{\mathbb{R}}$ da forma usual: qualquer que seja $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $-\infty \leq a \leq +\infty$.

Chamamos intervalos de $\overline{\mathbb{R}}$ aos conjuntos de um dos tipos:

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x < b\},\\
[a, b] &= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x \leq b\},\\
(a, b] &= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x \leq b\},\\
[a, b) &= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x < b\},
\end{aligned}$$

onde $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \leq b$. Em particular, $\emptyset$ e os subconjuntos de $\overline{\mathbb{R}}$ com um único elemento são intervalos. Note-se que os intervalos de $\mathbb{R}$ são os intervalos de $\overline{\mathbb{R}}$ contidos em $\mathbb{R}$.

Mostre que:

1. O conjunto
$$\mathcal{B}' = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$
é uma base de abertos de $\mathbb{R}$, com a topologia usual.

2. Existe uma única topologia τ em $\overline{\mathbb{R}}$, chamada *topologia da reta acabada*, tal que o conjunto
$$\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{(a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\} \cup \{[-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$$
é uma base de abertos do espaço $(\overline{\mathbb{R}}, \tau)$.

3. A topologia da reta acabada induz, em $\mathbb{R}$, a topologia usual.

Exercício 3.26 Mostre que

$$\mathcal{B} = \{(b, +\infty) : b \in \mathbb{R}\}$$

é uma base de abertos de uma topologia τ em $\mathbb{R}$. Mostre que, em $\mathbb{R}$, a topologia usual é mais fina do que τ.

3.3 Conjuntos fechados. Interior e fecho

A proposição 2.30 motiva a definição seguinte.

Definição 3.27 Sejam T um espaço topológico e $X \subseteq T$. Diz-se que $x \in X$ é um *ponto interior* de X se existir um aberto A tal que $x \in A \subseteq X$. O conjunto de todos os pontos interiores de X chama-se *interior* de X e representa-se por X° ou $\operatorname{int} X$.

Proposição 3.28 *Seja T um espaço topológico. Um subconjunto X de T é aberto se e só se $X = X^\circ$.*

Demonstração. Suponhamos que X é aberto. Pela definição de ponto interior, $X^\circ \subseteq X$. Seja $x \in X$. Como X é aberto e $x \in X \subseteq X$, x é ponto interior de X, ou seja, $x \in X^\circ$. Assim $X \subseteq X^\circ$. Logo $X = X^\circ$.

Reciprocamente suponhamos que $X = X^\circ$. Seja $x \in X = X^\circ$. Como x é ponto interior de X, existe um aberto A_x tal que $x \in A_x \subseteq X$. É fácil verificar que

$$X = \bigcup_{x \in X} A_x.$$

Como a união de abertos é um aberto, X é aberto. ∎

A proposição 2.39 motiva a definição seguinte.

Definição 3.29 Sejam T um espaço topológico e $X \subseteq T$. Diz-se que $y \in T$ é um *ponto de acumulação* de X (em T) se, para qualquer aberto A de T tal que $y \in A$, $X \cap (A \setminus \{y\}) \neq \emptyset$. Diz-se que $x \in X$ é um *ponto isolado* de X se x não for um ponto de acumulação de X.

Definição 3.30 Sejam T um espaço topológico e $F \subseteq T$. Diz-se que F é um subconjunto *fechado* de T se todos os pontos de acumulação de F pertencerem a F.

Proposição 3.31 *Seja T um espaço topológico. Um subconjunto F de T é fechado se e só se $T \setminus F$ for aberto.*

Demonstração. Suponhamos que F é fechado. Seja $y \in T \setminus F$. Como F é fechado, y não é ponto de acumulação de F. Assim existe um aberto A tal que $y \in A$ e $F \cap (A \setminus \{y\}) = \emptyset$. Como $y \notin F$, $F \cap A = \emptyset$. Donde $A \subseteq T \setminus F$. Portanto y é ponto interior de $T \setminus F$. Logo $T \setminus F$ é aberto.

Reciprocamente, suponhamos que $T \setminus F$ é aberto. Seja $y \in T \setminus F$. Como

$$F \cap ((T \setminus F) \setminus \{y\}) = \emptyset,$$

y não é ponto de acumulação de F. Logo todos os pontos de acumulação de F pertencem a F. Logo F é fechado. ∎

Corolário 3.32 *Seja T um espaço topológico. Um subconjunto A de T é aberto se e só se $T \setminus A$ for fechado.*

Proposição 3.33 *Seja T um espaço topológico.*

(a) *$\emptyset$ e T são fechados.*

(b) *A intersecção de uma família não vazia de fechados é fechada.*

(c) *Se F_1, F_2 forem fechados, então $F_1 \cup F_2$ é fechado.*

Demonstração. É análoga à demonstração da proposição 2.44. ■

Corolário 3.34 *Seja T um espaço topológico. Se $F_1, \ldots, F_n$ forem fechados, então $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ é fechado.*

Proposição 3.35 *Seja $\mathcal{F}$ um conjunto de partes de um conjunto T tal que:*

(a) *$\emptyset$ e T pertencem a $\mathcal{F}$.*

(b) *A intersecção de qualquer família não vazia de elementos de $\mathcal{F}$ pertence a $\mathcal{F}$.*

(c) *Se $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, então $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.*

Então existe uma e uma só topologia τ em T tal que os fechados de (T, τ) são os elementos de $\mathcal{F}$.

Demonstração. Seja $\tau = \{T \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$. Mostre que τ é uma topologia em T e os fechados de (T, τ) são os elementos de $\mathcal{F}$.

Para provar a unicidade, suponhamos que τ' também é uma topologia em T tal que os conjuntos fechados de (T, τ') são os elementos de $\mathcal{F}$. Então X é aberto de (T, τ) sse $T \setminus X$ for fechado de (T, τ) sse $T \setminus X \in \mathcal{F}$ sse $T \setminus X$ for fechado de (T, τ') sse X for aberto de (T, τ'). Logo $\tau = \tau'$. ■

Exemplo 3.36 Seja κ um cardinal infinito. Seja T um conjunto. Seja $\mathcal{F}$ o conjunto cujos elementos são T e as partes de T com cardinal inferior a κ. Claramente as condições (a), (b) e (c) da proposição anterior são satisfeitas. Portanto $\mathcal{F}$ é o conjunto dos fechados de uma única topologia τ em T. Quando $\kappa = \aleph_0$, τ é topologia cofinita.

Definição 3.37 Sejam T um espaço topológico e $X \subseteq T$. Chama-se *fecho* ou *aderência* de X (em T) ao subconjunto de T formado pelos elementos de X e pelos pontos de acumulação de X. O fecho de X representa-se por $\overline{X}$.

Proposição 3.38 *Sejam T um espaço topológico e $X \subseteq T$. Então*

$$T \setminus X^\circ = \overline{T \setminus X}.$$

Demonstração. Seja $y \in T \setminus X^\circ$. Se $y \in T \setminus X$, então $y \in \overline{T \setminus X}$. Suponhamos agora que $y \notin T \setminus X$. Seja A um aberto de T tal que $y \in A$. Como $y \notin X^\circ$, $A \nsubseteq X$. Seja $z \in A \setminus X$. Então $z \in (T \setminus X) \cap A$. Como $y \notin T \setminus X$, $y \neq z$. Assim $z \in (T \setminus X) \cap (A \setminus \{y\})$ e $(T \setminus X) \cap (A \setminus \{y\}) \neq \emptyset$. Portanto y é um ponto de acumulação de $T \setminus X$. Donde $y \in \overline{T \setminus X}$. Logo $T \setminus X^\circ \subseteq \overline{T \setminus X}$.

Reciprocamente seja $y \in \overline{T \setminus X}$. Se $y \in T \setminus X$, então $y \in T \setminus X^\circ$, uma vez que $X^\circ \subseteq X$. Suponhamos agora que $y \notin T \setminus X$. Então y é um ponto de acumulação de $T \setminus X$. Seja A um aberto tal que $y \in A$. Então $(T \setminus X) \cap (A \setminus \{y\}) \neq \emptyset$. Como $y \notin T \setminus X$, $(T \setminus X) \cap A \neq \emptyset$. Donde $A \nsubseteq X$. Pela definição de ponto interior, $y \notin X^\circ$. Assim $y \in T \setminus X^\circ$. Logo $\overline{T \setminus X} \subseteq T \setminus X^\circ$. ∎

Proposição 3.39 *Sejam T um espaço topológico e $X \subseteq T$. Então*

$$T \setminus \overline{X} = (T \setminus X)^\circ.$$

Demonstração. É análoga à demonstração da proposição 2.49. ∎

Proposição 3.40 *Sejam T um espaço topológico e $X \subseteq T$. Então X° é aberto, $X^\circ \subseteq X$ e X° é o maior aberto contido em X.*

Demonstração. Em primeiro lugar, observemos que, se C for um aberto contido em X, então $C \subseteq X^\circ$. Seja x um elemento de um aberto C contido em X. Pela definição de ponto interior, $x \in X^\circ$. Portanto $C \subseteq X^\circ$.

Seja $x \in X^\circ$. Existe um aberto A tal que $x \in A \subseteq X$. Pela observação anterior, $A \subseteq X^\circ$. Logo x é ponto interior de X°. Logo X° é aberto.

Pela definição de X°, $X^\circ \subseteq X$. Pela observação inicial desta demonstração, X° é o maior aberto contido em X. ∎

Proposição 3.41 *Sejam T um espaço topológico e $X \subseteq T$.*

(a) *$\overline{X}$ é fechado, $X \subseteq \overline{X}$ e $\overline{X}$ é o menor fechado que contém X.*

(b) *X é fechado se e só se $X = \overline{X}$.*

Demonstração. (a) é uma adaptação simples da demonstração da proposição 2.51. (b) é um corolário de (a). ∎

Definição 3.42 Sejam T um espaço topológico e $X \subseteq T$.

Chama-se *exterior* de X ao interior de $T \setminus X$.

Chama-se *fronteira* de X ao conjunto $T \setminus (X^\circ \cup (T \setminus X)^\circ)$. Representa-se a fronteira de X por ∂X.

Claramente, o interior, o exterior e a fronteira de X são conjuntos disjuntos 2 a 2 e $T = X^\circ \cup (T \setminus X)^\circ \cup \partial X$.

Exercício 3.43 Sejam T um espaço topológico e $X \subseteq T$. Mostre que $y \in \partial X$ se e só se, para qualquer aberto A tal que $y \in A$, $A \cap X \neq \emptyset$ e $A \cap (T \setminus X) \neq \emptyset$.

Exercício 3.44 Sejam T um espaço topológico e $X \subseteq T$. Mostre que um subconjunto Y de X é um fechado de X se e só se existir um fechado F de T tal que $Y = F \cap X$.

Exercício 3.45 Sejam T um espaço topológico e $X, Y \subseteq T$. Mostre que:

1. Se $X \subseteq Y$, então $X^\circ \subseteq Y^\circ$ e $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$.
2. $(X^\circ)^\circ = X^\circ$ e $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.
3. $(X \cap Y)^\circ = X^\circ \cap Y^\circ$ e $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.
4. $\partial X = \overline{X} \setminus X^\circ = \overline{X} \cap \overline{T \setminus X} = \partial(T \setminus X)$.

3.4 Limites

A definição seguinte é motivada pela proposição 2.57.

Definição 3.46 Sejam T e T' espaços topológicos, $X \subseteq T$, $f : X \to T'$, $x_0 \in T$ um ponto de acumulação de X e $l \in T'$.

Diz-se que f converge para o limite l, quando x convergir para x_0 ([3]), se, para qualquer aberto C de T' tal que $l \in C$, existir um aberto A de T tal que $x_0 \in A$ e $f(X \cap (A \setminus \{x_0\})) \subseteq C$.

Exemplo 3.47 Nas condições anteriores, o limite, se existir, pode não ser único. Se a topologia em T' for a caótica, então, qualquer que seja $l' \in T'$, f converge para l', quando x convergir para x_0.

Proposição 3.48 *Sejam T e T' espaços topológicos, $\mathcal{B}$ uma base de abertos de T e $\mathcal{B}'$ uma base de abertos de T'. São equivalentes:*

(a) *f converge para l, quando x convergir para x_0.*

(b) *Para qualquer $D \in \mathcal{B}'$ tal que $l \in D$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x_0 \in B$ e $f(X \cap (B \setminus \{x_0\})) \subseteq D$.*

Demonstração. Exercício. ∎

[3] E escreve-se "$f(x) \to l$, quando $x \to x_0$".

3.5 Continuidade

A definição seguinte é motivada pela proposição 2.61.

Definição 3.49 Sejam T e T' espaços topológicos.

Diz-se que uma aplicação $f : T \to T'$ é *contínua em* $x_0 \in T$ se, para qualquer aberto C de T' tal que $f(x_0) \in C$, existir um aberto A de T tal que $x_0 \in A$ e $f(A) \subseteq C$.

Diz-se que $f : T \to T'$ é *contínua* se f for contínua em todos os pontos do seu domínio.

As demonstrações das 3 proposições seguintes são exercícios.

Proposição 3.50 *Sejam T e T' espaços topológicos e $f : T \to T'$.*

Se $x_0 \in T$ não for ponto de acumulação de T, então f é contínua em x_0.

Se $x_0 \in T$ for ponto de acumulação de T, então f é contínua em x_0 se e só se f convergir para $f(x_0)$, quando x convergir para x_0.

Proposição 3.51 *Sejam T, T', T'' espaços topológicos.*

Se $f : T \to T'$ for contínua em $x_0 \in T$ e $g : T' \to T''$ for contínua em $f(x_0)$, então gf é contínua em x_0. Consequentemente, se f e g forem contínuas, então gf é contínua.

Proposição 3.52 *Sejam T e T' espaços topológicos, $f : T \to T'$, $x_0 \in T$, $\mathcal{B}$ uma base de abertos de T e $\mathcal{B}'$ uma base de abertos de T'. São equivalentes:*

(a) *f é contínua em x_0.*

(b) *Para qualquer $D \in \mathcal{B}'$ tal que $f(x_0) \in D$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x_0 \in B$ e $f(B) \subseteq D$.*

Proposição 3.53 *Sejam T e T' espaços topológicos e $f : T \to T'$. São equivalentes:*

(a) *f é contínua.*

(b) *Para qualquer aberto C de T', $f^{-1}(C)$ é aberto de T.*

(c) *Para qualquer fechado G de T', $f^{-1}(G)$ é fechado de T.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Suponhamos que f é contínua. Seja C um aberto de T'. Seja $x_0 \in f^{-1}(C)$. Como f é contínua em x_0 e $f(x_0) \in C$, existe um aberto A de T tal que $x_0 \in A$ e $f(A) \subseteq C$. Donde $A \subseteq f^{-1}(C)$. Portanto x_0 é ponto interior de $f^{-1}(C)$. Logo $f^{-1}(C)$ é aberto de T.

(b) $\Rightarrow$ (a) Suponhamos que (b) é satisfeita. Seja $x_0 \in T$. Seja C um aberto de T' tal que $f(x_0) \in C$. Por (b), $f^{-1}(C)$ é aberto de T. Então $x_0 \in f^{-1}(C)$ e $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$. Logo f é contínua em x_0. Logo f é contínua.

(b) $\Rightarrow$ (c) Suponhamos que (b) é satisfeita. Seja G um conjunto fechado de T'. Então $T'\backslash G$ é aberto de T'. Por (b), $f^{-1}(T'\backslash G)$ é aberto de T. Donde $T\backslash f^{-1}(T'\backslash G)$ é fechado de T. É fácil mostrar que $T\backslash f^{-1}(T'\backslash G) = f^{-1}(G)$.

(c) $\Rightarrow$ (b) O argumento é análogo ao anterior. ∎

Definição 3.54 Sejam T e T' espaços topológicos.

Diz-se que uma aplicação $f : T \to T'$ é *aberta* se, para qualquer aberto A de T, $f(A)$ for aberto de T'.

Diz-se que $f : T \to T'$ é *fechada* se, para qualquer fechado F de T, $f(F)$ for fechado de T'.

Exemplo 3.55 Seja S um conjunto com pelo menos 2 elementos. Sejam τ_0 a topologia caótica e τ_1 a topologia discreta em S.

A aplicação indentidade $\mathrm{id}_S : (S, \tau_1) \to (S, \tau_0)$, $x \mapsto x$, é contínua e não é aberta. A aplicação $\mathrm{id}_S : (S, \tau_0) \to (S, \tau_1)$ é aberta e não é contínua.

Proposição 3.56 *Sejam T e T' espaços topológicos, $f : T \to T'$ e $\mathcal{B}'$ uma base de abertos de T'. São equivalentes:*

(a) *f é contínua.*

(b) *Para qualquer $D \in \mathcal{B}'$, $f^{-1}(D)$ é aberto de T.*

Demonstração. Pela proposição 3.53, (a) $\Rightarrow$ (b).

Suponhamos agora que (b) é satisfeita. Seja C um aberto de T'. Seja $(D_i)_{i\in I}$ uma família de elementos de $\mathcal{B}'$ tal que $C = \bigcup_{i\in I} D_i$. Para cada $i \in I$, $f^{-1}(D_i)$ é um aberto de T. Donde

$$f^{-1}(C) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} D_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(D_i)$$

é aberto de T. Pela proposição 3.53, f é contínua. ∎

Exercício 3.57 Sejam (T, τ) e (T', τ') espaços topológicos. Mostre que:

1. τ é a topologia discreta se e só se, qualquer que seja o espaço topológico (S, σ), qualquer aplicação $g : T \to S$ é contínua.

2. τ' é a topologia caótica se e só se, qualquer que seja o espaço topológico (S, σ), qualquer aplicação $h : S \to T'$ é contínua.

Homeomorfismos

Definição 3.58 Sejam T e T' espaços topológicos. Diz-se que uma aplicação $f : T \to T'$ é um *homeomorfismo* se f for invertível e contínua e a sua inversa for contínua.

Diz-se que os espaços topológicos T e T' são *homeomorfos* se existir um homeomorfismo de T para T'.

Observação 3.59 Sejam T e T' espaços topológicos e $f : T \to T'$ uma aplicação bijetiva. Pela proposição 3.53, f^{-1} é contínua se e só se f for aberta. Assim,

(a) se f for um homeomorfismo, então f e f^{-1} são contínuas e abertas;

(b) f é um homeomorfismo se e só se f for bijetiva, contínua e aberta.

Proposição 3.60 *A aplicação inversa de um homeomorfismo é um homeomorfismo. A composição de dois homeomorfismos é um homeomorfismo.*

Exemplo 3.61 Considere-se $\mathbb{R}^k$ munido com a norma $\| \ \|_2$ (e com a topologia associada à métrica associada a esta norma). As aplicações

$$f : \mathbb{R}^k \to B(0,1), \quad v \mapsto \frac{1}{1+\|v\|_2}v,$$

$$g : B(0,1) \to \mathbb{R}^k, \quad v \mapsto \frac{1}{1-\|v\|_2}v,$$

são contínuas e uma é a inversa da outra. Consequentemente, o espaço $\mathbb{R}^k$ é homeomorfo ao seu subespaço $B(0,1)$.

Proposição 3.62 *Se $f : (T,\tau) \to (T',\tau')$ for um homeomorfismo, então as aplicações*

$$\Phi : \tau \to \tau', \quad A \mapsto f(A),$$

$$\Psi : \tau' \to \tau, \quad C \mapsto f^{-1}(C),$$

são invertíveis e uma é a inversa da outra.

Demonstração. Note-se que, como f é aberta e contínua, as aplicações Φ e Ψ estão bem definidas. Como f é bijetiva, é fácil concluir que $\Phi\Psi = \mathrm{id}_{\tau'}$ e $\Psi\Phi = \mathrm{id}_{\tau}$. ∎

A proposição anterior mostra que a estrutura topológica de dois espaços homeomorfos é idêntica e é fácil provar afirmações como as seguintes.

Exercício 3.63 Sejam $f : T \to T'$ um homeomorfismo e $X \subseteq T$. Mostre que:

1. $x \in X$ é um ponto interior de X se e só se $f(x)$ for um ponto interior de $f(X)$.

2. $y \in T$ é um ponto de acumulação de X se e só se $f(y)$ for um ponto de acumulação de $f(X)$.

3.6 Produtos finitos de espaços topológicos

Sejam $T_1, \dots, T_k$ espaços topológicos e $T = T_1 \times \cdots \times T_k$. Seja

$$\mathcal{B} = \{A_1 \times \cdots \times A_k : A_j \text{ é aberto de } T_j, j \in \{1, \dots, k\}\}. \tag{3.1}$$

Como $T \in \mathcal{B}$, a condição (i) da proposição 3.21 é trivialmente satisfeita. Se

$$A_1 \times \cdots \times A_k, C_1 \times \cdots \times C_k \in \mathcal{B},$$

então

$$(A_1 \times \cdots \times A_k) \cap (C_1 \times \cdots \times C_k) = (A_1 \cap C_1) \times \cdots \times (A_k \cap C_k) \in \mathcal{B}$$

e é fácil concluir que a condição (ii) da proposição 3.21 também é satisfeita. Pela proposição 3.21, existe uma topologia τ em T tal que $\mathcal{B}$ é uma base de abertos de (T, τ).

Diz-se que (T, τ) é o *espaço topológico produto* de $T_1, \dots, T_k$, e que τ é a *topologia produto* das topologias em $T_1, \dots, T_k$.

Para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, chama-se j-ésima projeção de T em T_j à aplicação $\pi_j : T \to T_j$, que a cada $(x_1, \dots, x_k) \in T$ faz corresponder x_j.

Proposição 3.64 *Sejam $T_1, \dots, T_k$ espaços topológicos e T o espaço topológico produto de $T_1, \dots, T_k$.*

(a) *Para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, a projeção $\pi_j : T \to T_j$ é contínua e aberta.*

(b) *Quaisquer que sejam o espaço topológico Z e $z \in Z$, uma aplicação $f : Z \to T$ é contínua em z se e só se, para qualquer $j \in \{1, \dots, k\}$, $\pi_j f : Z \to T_j$ for contínua em z.*

Demonstração. Exercício. ■

Proposição 3.65 *Sejam $T_1, \dots, T_k$ espaços topológicos e (T, τ) o espaço topológico produto de $T_1, \dots, T_k$. Seja σ uma topologia em T tal que, com esta topologia, a seguinte propriedade é satisfeita:*

(a) *Para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, a projeção $\pi_j : T \to T_j$ é contínua.*

Então $\tau \subseteq \sigma$. Assim, a topologia produto é a menor topologia em T com a propriedade (a).

Demonstração. Considere-se a base de abertos $\mathcal{B}$ de (T, τ) descrita em (3.1). Seja $A = A_1 \times \cdots \times A_k \in \mathcal{B}$. Como (T, σ) satisfaz (a),

$$\pi_j^{-1}(A_j) = T_1 \times \cdots \times T_{j-1} \times A_j \times T_{j+1} \times \cdots \times T_k$$

é um aberto de (T, σ), qualquer que seja $j \in \{1, \dots, k\}$. Portanto

$$A = A_1 \times \cdots \times A_k = \bigcap_{j=1}^{k} \pi_j^{-1}(A_j)$$

é um aberto de (T, σ), isto é, $A \in \sigma$. Logo $\mathcal{B} \subseteq \sigma$. Pela proposição 3.19, $\mathcal{B}$ gera τ. Logo $\tau \subseteq \sigma$. ■

Exemplo 3.66 Sejam $M_1, \ldots, M_k$ espaços topológicos metrizáveis, cujas topologias estão associadas a métricas $d_1, \ldots, d_k$, respetivamente. Seja $M = M_1 \times \cdots \times M_k$.

Qualquer uma das métricas $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$ em M, definidas no exemplo 2.8, está associada à topologia produto em M.

Demonstração. Como as métricas $\rho_1, \rho_2, \rho_\infty$ são equivalentes, basta provar que ρ_∞ tem associada a topologia produto em M (cf. corolário 3.12).

Seja

$$\mathcal{B} = \{A_1 \times \cdots \times A_k : A_j \text{ é aberto de } M_j, j \in \{1, \ldots, k\}\}. \tag{3.2}$$

Seja τ a topologia produto em M, que é a topologia em M gerada por $\mathcal{B}$.

Seja τ' a topologia em M associada a ρ_∞. De acordo com o exemplo 3.18, o conjunto $\mathcal{B}'$ formado pelas bolas abertas de (M, ρ_∞) é uma base de abertos de (M, τ'). Portanto $\mathcal{B}'$ gera a topologia τ'.

Observe-se que, quaisquer que sejam $x = (x_1, \ldots, x_k) \in M$, $r \in \mathbb{R}^+$, a bola aberta $B_{\rho_\infty}(x, r)$ tem a forma

$$B_{\rho_\infty}(x, r) = B_{d_1}(x_1, r) \times \cdots \times B_{d_k}(x_k, r)$$

e, portanto, é um elemento de $\mathcal{B}$. Assim $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \subseteq \tau$. Como τ' é a menor topologia em M que contém $\mathcal{B}'$, $\tau' \subseteq \tau$.

Sejam agora

$$A = A_1 \times \cdots \times A_k \in \mathcal{B}, \quad x = (x_1, \ldots, x_k) \in A.$$

Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, seja $r_j \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$x_j \in B_{d_j}(x_j, r_j) \subseteq A_j.$$

Seja $r = \min\{r_1, \ldots, r_k\}$. Então

$$\begin{aligned} x \in B_{\rho_\infty}(x, r) &= B_{d_1}(x_1, r) \times \cdots \times B_{d_k}(x_k, r) \\ &\subseteq B_{d_1}(x_1, r_1) \times \cdots \times B_{d_k}(x_k, r_k) \subseteq A, \end{aligned}$$

o que permite deduzir que x é um ponto interior de A no espaço (M, ρ_∞). Logo A é um aberto de (M, ρ_∞), isto é, $A \in \tau'$. Logo $\mathcal{B} \subseteq \tau'$. Como $\mathcal{B}$ gera τ, $\tau \subseteq \tau'$. ■

Proposição 3.67 *Seja (M, d) um espaço métrico. Então $d : M \times M \to \mathbb{R}$ é uma aplicação contínua, considerando em M a topologia associada à métrica d, em $M \times M$ a topologia produto e em $\mathbb{R}$ a topologia usual.*

Demonstração. Consideremos em $M \times M$ a métrica ρ_1, a qual tem associada a topologia produto. Seja $(x_0, y_0) \in M \times M$. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Seja $(x, y) \in M \times M$ tal que

$$\rho_1((x, y), (x_0, y_0)) = d(x, x_0) + d(y, y_0) < \delta.$$

Então

$$d(x,y) \leq d(x,x_0) + d(x_0,y_0) + d(y_0,y),$$
$$d(x_0,y_0) \leq d(x_0,x) + d(x,y) + d(y,y_0).$$

Donde

$$d(x,y) - d(x_0,y_0) \leq d(x,x_0) + d(y_0,y) < \delta,$$
$$d(x_0,y_0) - d(x,y) \leq d(x_0,x) + d(y,y_0) < \delta.$$

Donde $|d(x,y) - d(x_0,y_0)| < \delta$. Logo d é contínua em (x_0,y_0). Logo d é contínua. ■

Exercício 3.68 Sejam (M,d) um espaço métrico e $x \in M$. Mostre que a aplicação $d_x : M \to \mathbb{R}$, $y \mapsto d(x,y)$, é contínua.

Exercício 3.69 Sejam $T_1,\ldots,T_k$ espaços topológicos e T o espaço topológico produto de $T_1,\ldots,T_k$. Para cada $j \in \{1,\ldots,k\}$, seja $\mathcal{B}_j$ uma base de abertos de T_j. Mostre que

$$\mathcal{B}' = \{B_1 \times \cdots \times B_k : B_j \in \mathcal{B}_j,\ j \in \{1,\ldots,k\}\}$$

é uma base de abertos de T.

Exercício 3.70 Sejam $S = \{s\}, T_1, T_2, T_3$ espaços topológicos. Mostre que as aplicações seguintes são homeomorfismos.

(a) $f : T_1 \to \{s\} \times T_1, \quad x \mapsto (s,x)$.

(b) $g : T_1 \times T_2 \to T_2 \times T_1, \quad (x,y) \mapsto (y,x)$.

(c) $h : T_1 \times T_2 \times T_3 \to (T_1 \times T_2) \times T_3, \quad (x,y,z) \mapsto ((x,y),z)$.

3.7 Espaços topológicos compactos

O teorema 2.84 motiva a seguinte definição.

Definição 3.71 Diz-se que um espaço topológico T é compacto se, para qualquer família de abertos $(A_i)_{i\in I}$ tal que $T = \bigcup_{i\in I} A_i$, existir uma parte finita I_0 de I tal que $T = \bigcup_{i\in I_0} A_i$.

Diz-se que um subconjunto X de um espaço topológico T é *compacto* se X, com a topologia induzida pela topologia de T, for compacto.

Proposição 3.72 *Um subconjunto X de um espaço topológico T é compacto se e só se, para qualquer família de abertos $(A_i)_{i\in I}$ tal que $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$, existir uma parte finita I_0 de I tal que $X \subseteq \bigcup_{i\in I_0} A_i$.*

Demonstração. Exercício. ■

Exemplo 3.73 Os subconjuntos finitos de um espaço topológico são compactos.

Proposição 3.74 *Seja X um subconjunto de T. São equivalentes as afirmações seguintes:*

(a) *X é compacto.*

(b) *Para qualquer família não vazia de fechados $(F_i)_{i\in I}$ de T tal que $X \cap (\bigcap_{i\in I} F_i) = \emptyset$, existe uma parte finita não vazia I_0 de I tal que $X \cap (\bigcap_{i\in I_0} F_i) = \emptyset$.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Suponhamos que X é compacto. Seja $(F_i)_{i\in I}$ uma família não vazia de fechados de T tal que $X \cap (\bigcap_{i\in I} F_i) = \emptyset$. Então $(T \setminus F_i)_{i\in I}$ é uma família de abertos de T e

$$X \subseteq T \setminus \bigcap_{i\in I} F_i = \bigcup_{i\in I} (T \setminus F_i).$$

Como X é compacto, existe uma parte finita não vazia I_0 de I tal que

$$X \subseteq \bigcup_{i\in I_0} (T \setminus F_i) = T \setminus \bigcap_{i\in I_0} F_i.$$

Donde $X \cap (\bigcap_{i\in I_0} F_i) = \emptyset$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Suponhamos que (b) é satisfeita. Seja $(A_i)_{i\in I}$ uma família de abertos de T tal que $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. Se $I = \emptyset$, então $X = \emptyset$ e X é compacto. Suponhamos que $I \neq \emptyset$. Então $(T \setminus A_i)_{i\in I}$ é uma família não vazia de fechados de T e

$$\emptyset = X \cap \left(T \setminus \bigcup_{i\in I} A_i \right) = X \cap \left(\bigcap_{i\in I} (T \setminus A_i) \right)$$

Por (b), existe uma parte finita não vazia I_0 de I tal que

$$\emptyset = X \cap \left(\bigcap_{i\in I_0} (T \setminus A_i) \right) = X \cap \left(T \setminus \bigcup_{i\in I_0} A_i \right)$$

Donde $X \subseteq \bigcup_{i\in I_0} A_i$. Logo X é compacto. ∎

Proposição 3.75 [Propriedade de Bolzano-Weierstrass] *Se K for um subconjunto compacto de um espaço topológico T, então, para qualquer subconjunto infinito de K, existe pelo menos um ponto de acumulação que pertence a K.*

Demonstração. Com vista a uma contradição, suponhamos que K é um subconjunto compacto de T e existe um subconjunto infinito X de K que não tem pontos de acumulação em K. Seja $y \in K$. Como y não é ponto de acumulação de X, existe um aberto A_y de T tal que $y \in A_y$ e

$$X \cap (A_y \setminus \{y\}) = \emptyset.$$

Assim

$$K \subseteq \bigcup_{y \in K} A_y.$$

Como K é compacto, existe uma parte finita K_0 de K tal que

$$K \subseteq \bigcup_{y \in K_0} A_y.$$

Como K_0 é finito e X é infinito, existe $x \in X \setminus K_0$. Como $x \in X \subseteq K \subseteq \bigcup_{y \in K_0} A_y$, existe $y \in K_0$ tal que $x \in A_y$. Note-se que $x \neq y$, porque $x \notin K_0$ e $y \in K_0$. Então $x \in X \cap (A_y \setminus \{y\}) = \emptyset$, o que é absurdo. ∎

Observação 3.76 Note-se que definimos subconjunto compacto de um espaço topológico utilizando a propriedade de Borel-Lebesgue (cf. teorema 2.84). Nos espaços métricos, a propriedade de Borel-Lebesgue é equivalente à propriedade de Bolzano-Weierstrass (cf. teorema 2.84 e proposição 2.74). Nos espaços topológicos, a propriedade de Borel-Lebesgue implica a propriedade de Bolzano-Weierstrass, como vimos na proposição anterior, mas a implicação recíproca nem sempre é verdadeira (cf. [Lima, *Elementos de Topologia Geral*, pg. 173]).

Proposição 3.77 *Se T for um espaço topológico compacto e K for um subconjunto fechado de T, então K é compacto.*

Demonstração. Suponhamos que T é compacto e K é um subconjunto fechado de T. Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de abertos de T tal que $K \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Como K é fechado, $T \setminus K$ é aberto. Além disso,

$$T = \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup (T \setminus K).$$

Como T é compacto, existe um subconjunto finito I_0 de I tal que

$$T = \left(\bigcup_{i \in I_0} A_i \right) \cup (T \setminus K).$$

Donde $K \subseteq \bigcup_{i \in I_0} A_i$. Logo K é compacto. ∎

Proposição 3.78 Sejam T e T' são espaços topológicos e $f : T \to T'$ uma aplicação contínua. Se K for um subconjunto compacto de T, então $f(K)$ é um subconjunto compacto de T'.

Demonstração. Seja K um subconjunto compacto de T. Seja $(C_i)_{i\in I}$ uma família de abertos de T' tal que

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i\in I} C_i.$$

Então

$$K \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(C_i).$$

Como f é contínua, cada $f^{-1}(C_i)$ é um aberto de T. Como K é compacto, existe uma parte finita I_0 de I tal que

$$K \subseteq \bigcup_{i\in I_0} f^{-1}(C_i).$$

Donde

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i\in I_0} C_i.$$

Logo $f(K)$ é compacto. ∎

Exercício 3.79 Seja T um conjunto e consideremos em T a topologia cofinita (cf. exemplo 3.6). Mostre que T é compacto.

Produtos de espaços topológicos compactos

Lema 3.80 *Sejam T um espaço topológico e K um espaço topológico compacto. Sejam $x \in T$ e U um aberto de $T \times K$ tais que $\{x\} \times K \subseteq U$.*

Existe um aberto A de T tal que $x \in A$ e $A \times K \subseteq U$.

Demonstração. Recorde-se que

$$\mathcal{B} = \{A \times C : A \text{ é aberto de } T \text{ e } C \text{ é aberto de } K\}$$

é uma base de abertos de $T \times K$. Assim, para cada $y \in K$, existem abertos A_y de T e C_y de K tais que

$$(x, y) \in A_y \times C_y \subseteq U.$$

É fácil verificar que a aplicação $f : K \to \{x\} \times K$, $y \mapsto (x, y)$, é um homeomorfismo. Portanto $\{x\} \times K$ é compacto. Como

$$\{x\} \times K \subseteq \bigcup_{y\in K} A_y \times C_y,$$

existe uma parte finita K_0 de K tal que

$$\{x\} \times K \subseteq \bigcup_{y \in K_0} A_y \times C_y.$$

Então $A = \bigcap_{y \in K_0} A_y$ é um aberto de T, $x \in A$ e

$$A \times K \subseteq A \times \bigcup_{y \in K_0} C_y = \bigcup_{y \in K_0} A \times C_y \subseteq \bigcup_{y \in K_0} A_y \times C_y \subseteq U.$$

■

Proposição 3.81 *Se T_1, T_2 forem espaços topológicos compactos, então $T_1 \times T_2$ é compacto.*

Demonstração. Seja $(U_i)_{i \in I}$ uma família de abertos de $T_1 \times T_2$ tal que

$$T_1 \times T_2 = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Seja $x \in T_1$. Como os espaços $\{x\} \times T_2$ e T_2 são homeomorfos, $\{x\} \times T_2$ é compacto. Como

$$\{x\} \times T_2 \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i,$$

existe uma parte finita I_x de I tal que

$$\{x\} \times T_2 \subseteq \bigcup_{i \in I_x} U_i.$$

Pelo lema 3.80, existe um aberto A_x de T_1 tal que $x \in A_x$ e

$$A_x \times T_2 \subseteq \bigcup_{i \in I_x} U_i.$$

Como T_1 é compacto e

$$T_1 = \bigcup_{x \in T_1} A_x,$$

existe uma parte finita S de T_1 tal que

$$T_1 = \bigcup_{x \in S} A_x.$$

Assim

$$T_1 \times T_2 = \left(\bigcup_{x \in S} A_x \right) \times T_2 = \bigcup_{x \in S} (A_x \times T_2) \subseteq \bigcup_{x \in S} \bigcup_{i \in I_x} U_i \subseteq T_1 \times T_2.$$

Logo

$$T_1 \times T_2 = \bigcup_{x \in S} \bigcup_{i \in I_x} U_i.$$

Logo $T_1 \times T_2$ é compacto. ■

Corolário 3.82 *Sejam $T_1, \dots, T_k$ espaços topológicos.*
O produto $T_1 \times \cdots \times T_k$ é compacto se e só se $T_1, \dots, T_k$ forem compactos.

Demonstração. Suponhamos que $T = T_1 \times \cdots \times T_k$ é compacto. Pela proposição 3.64, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, a projeção $\pi_j : T \to T_j$ é contínua. Pela proposição 3.78, T_j é compacto.

Reciprocamente, suponhamos que $T_1, \dots, T_k$ são compactos. A demonstração é por indução em k. Pela proposição 3.81, o resultado é verdadeiro quando $k = 2$. Suponhamos que $k \geq 3$. Pela hipótese de indução, $T_1 \times \cdots \times T_{k-1}$ é compacto. Pela proposição 3.81, $(T_1 \times \cdots \times T_{k-1}) \times T_k$ é compacto. Os espaços $T_1 \times \cdots \times T_k$ e $(T_1 \times \cdots \times T_{k-1}) \times T_k$ são homeomorfos. Logo $T_1 \times \cdots \times T_k$ é compacto. ■

3.8 Espaços topológicos conexos

Definição 3.83 Diz-se que um espaço topológico espaço T é *conexo* se **não** existirem abertos não vazios A e B tais que $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = T$.

Diz-se que um subconjunto X de um espaço topológico T é *conexo* se X, com a topologia induzida, for um espaço topológico conexo.

Exemplo 3.84 Se T estiver munido com a topologia discreta e tiver pelo menos 2 elementos, então T não é conexo, uma vez que, fixado $x \in T$, $A = \{x\}$ e $B = T \setminus \{x\}$ são abertos não vazios, $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = T$.

Exemplo 3.85 O conjunto vazio e os subconjuntos singulares de um espaço topológico são subconjuntos conexos de T.

Proposição 3.86 *Seja T um espaço topológico. São equivalentes:*

(a) *T é conexo.*

(b) *Não existem fechados não vazios A e B tais que $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = T$.*

(c) *Os únicos subconjuntos de T que são abertos e fechados são $\emptyset$ e T.*

Demonstração. Exercício. ■

Proposição 3.87 *Um subconjunto X de um espaço topológico T é conexo se e só se não existirem abertos A e B de T tais que*

$$A \cap X \neq \emptyset, \quad B \cap X \neq \emptyset, \quad A \cap B \cap X = \emptyset, \quad A \cup B \supseteq X. \tag{3.3}$$

Demonstração. Suponhamos que X é um subconjunto de T que não é conexo. Pela definição, existem abertos não vazios C e D de X tais que $C \cap D = \emptyset$ e $C \cup D = X$. Existem abertos A e B de T tais que $C = A \cap X$ e $D = B \cap X$ (cf. exemplo 3.7). Então $A \cap X = C \neq \emptyset$, $B \cap X = D \neq \emptyset$,

$$A \cap B \cap X = (A \cap X) \cap (B \cap X) = C \cap D = \emptyset,$$
$$A \cup B \supseteq (A \cap X) \cup (B \cap X) = C \cup D = X.$$

Reciprocamente, suponhamos que existem abertos A e B de T tais que as condições (3.3) são satisfeitas. Então $A \cap X$ e $B \cap X$ são abertos não vazios de X e

$$(A \cap X) \cap (B \cap X) = A \cap B \cap X = \emptyset,$$
$$(A \cap X) \cup (B \cap X) = (A \cup B) \cap X = X.$$

Logo X não é conexo. ■

Lema 3.88 *Seja T um espaço topológico. Seja $(E_j)_{j \in J}$ uma família de subconjuntos conexos de T tal que $W = \bigcap_{j \in J} E_j \neq \emptyset$. Então $X = \bigcup_{j \in J} E_j$ é conexo.*

Demonstração. Suponhamos que X não é conexo. Então existem subconjuntos abertos A e B de T tais que as condições (3.3) são satisfeitas. Seja $x \in W = \bigcap_{j \in J} E_j$. Como $x \in \bigcup_{j \in J} E_j = X \subseteq A \cup B$, $x \in A$ ou $x \in B$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $x \in A$.

Seja $j \in J$. Então

$$x \in A \cap E_j, \qquad A \cap B \cap E_j \subseteq A \cap B \cap X = \emptyset, \qquad A \cup B \supseteq X \supseteq E_j.$$

Como E_j é conexo, resulta da proposição 3.87 que $B \cap E_j = \emptyset$. Assim

$$B \cap X = B \cap \bigcup_{j \in J} E_j = \bigcup_{j \in J} (B \cap E_j) = \bigcup_{j \in J} \emptyset = \emptyset,$$

o que é absurdo. Logo X é conexo. ■

Componentes conexas

Seja T um espaço topológico. Em T, definimos uma relação binária $\simeq$ do seguinte modo: quaisquer que sejam $x, y \in T$, $x \simeq y$ se e só se existir um subconjunto conexo E de T tal que $x, y \in E$.

Proposição 3.89 *Com a notação anterior, $\simeq$ é uma relação de equivalência em T.*

Demonstração. Qualquer que seja $x \in T$, $\{x\}$ é conexo. Portanto $\simeq$ é reflexiva. Claramente $\simeq$ é simétrica.

Sejam $x, y, z \in T$ tais que $x \simeq y$ e $y \simeq z$. Existem subconjuntos conexos E_1 e E_2 de T tais que $x, y \in E_1$ e $y, z \in E_2$. Como $y \in E_1 \cap E_2$, resulta do lema 3.88 que $E_1 \cup E_2$ é conexo. Como $x, z \in E_1 \cup E_2$, $x \simeq z$. Logo $\simeq$ é transitiva. ■

Definição 3.90 Com a notação anterior, as classes de equivalência para a relação $\simeq$ chamam-se *componentes conexas* de T.

Proposição 3.91 *Seja T um espaço topológico não vazio. As componentes conexas de T são os subconjuntos conexos maximais de T.*

Demonstração. Seja E uma componente conexa de T. Fixemos $x \in E$. Seja E' um subconjunto conexo de T tal que $E \subseteq E'$. Seja $y \in E'$. Como $x, y \in E'$ e E' é conexo, $x \simeq y$. Assim, x e y pertencem à mesma classe de equivalência para $\simeq$. Donde $y \in E$. Logo $E = E'$, o que mostra que E é conexo maximal.

Reciprocamente, seja E um subconjunto conexo maximal de T. Note-se que $E \neq \emptyset$, uma vez que os subconjuntos singulares de T são conexos. Seja $x \in E$. Seja E_x a componente conexa de x, i. e., a classe de equivalência de x para a relação $\simeq$. Vejamos que $E = E_x$. Seja $y \in E$. Como $x, y \in E$ e E é conexo, $x \simeq y$. Portanto $y \in E_x$. Logo $E \subseteq E_x$. Como E é conexo maximal, $E = E_x$. ∎

Proposição 3.92 *Sejam T e T' espaços topológicos e $f : T \to T'$ uma aplicação contínua. Se $X \subseteq T$ for conexo, então $f(X)$ é conexo.*

Demonstração. Suponhamos que $f(X)$ não é conexo. Pela proposição 3.87, existem abertos C e D de T' tais que

$$C \cap f(X) \neq \emptyset, \quad D \cap f(X) \neq \emptyset, \quad C \cap D \cap f(X) = \emptyset, \quad C \cup D \supseteq f(X).$$

Não é difícil verificar que

$$f^{-1}(C) \cap X \neq \emptyset,\ f^{-1}(D) \cap X \neq \emptyset,\ f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \cap X = \emptyset,\ f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \supseteq X.$$

Como $f^{-1}(C)$ e $f^{-1}(D)$ são abertos de T, resulta da proposição 3.87 que X não é conexo. ∎

Produtos de espaços topológicos conexos

Lema 3.93 *Seja $(E_j)_{j \in J}$ uma família de subconjuntos conexos de um espaço topológico T. Suponhamos que existe $j_0 \in J$ tal que, qualquer que seja $j \in J$, $E_{j_0} \cap E_j \neq \emptyset$. Então $\bigcup_{j \in J} E_j$ é conexo.*

Demonstração. Seja $j \in J$. Como $E_{j_0} \cap E_j \neq \emptyset$, resulta do lema 3.88 que $E_{j_0} \cup E_j$ é conexo. Como

$$\emptyset \neq E_{j_0} \subseteq \bigcap_{j \in J} (E_{j_0} \cup E_j),$$

resulta do lema 3.88 que

$$\bigcup_{j \in J} E_j = \bigcup_{j \in J} (E_{j_0} \cup E_j)$$

é conexo. ∎

Proposição 3.94 *Sejam $T_1, \dots, T_k$ espaços topológicos. O produto $T_1 \times \cdots \times T_k$ é conexo se e só se $T_1, \dots, T_k$ forem conexos.*

Demonstração. Suponhamos que $T = T_1 \times \cdots \times T_k$ é conexo. Para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, a projeção $\pi_j : T \to T_j$ é contínua. Pela proposição 3.92, T_j é conexo.

Reciprocamente, suponhamos que $T_1, \dots, T_k$ são conexos. A demonstração é por indução em k. Se $k = 1$, é trivial. Suponhamos agora que $k \geq 2$. Se, para algum $j \in \{1, \dots, k\}$, $T_j = \emptyset$, então $T_1 \times \cdots \times T_k = \emptyset$ é conexo. Suponhamos agora que, qualquer que seja $j \in \{1, \dots, k\}$, $T_j \neq \emptyset$. Para cada $j \in \{1, \dots, k-1\}$, fixemos $x_j \in T_j$. Seja $R = \{x_1\} \times \cdots \times \{x_{k-1}\} \times T_k$. Como R é homeomorfo a T_k, R é conexo. Pela hipótese de indução, $T_1 \times \cdots \times T_{k-1}$ é conexo. Para cada $w \in T_k$,

$$S_w = T_1 \times \cdots \times T_{k-1} \times \{w\} \quad \text{é homeomorfo a} \quad T_1 \times \cdots \times T_{k-1}$$

e, portanto, S_w é conexo. Para cada $w \in T_k$, $(x_1, \dots, x_{k-1}, w) \in R \cup S_w$. Pelo lema anterior,

$$T_1 \times T_k = R \cup \bigcup_{w \in T_k} S_w$$

é conexo. ∎

Conexos por arcos

Seja T um espaço topológico. Chama-se *arco em T de $x \in T$ para $y \in T$* a qualquer aplicação contínua $f : [0,1] \to T$, definida no intervalo real $[0,1]$, tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$.

Definimos uma relação binária $\approx$ em T do seguinte modo: quaisquer que sejam $x, y \in T$, $x \approx y$ se e só se existir um arco de x para y.

Diz-se que T é *conexo por arcos* se, quaisquer que sejam $x, y \in T$, existir um arco de x para y.

Exercício 3.95 Com a notação anterior, mostre que $\approx$ é uma relação de equivalência em T.

Proposição 3.96 *Se um espaço topológico T for conexo por arcos, então T é conexo.*

Demonstração. Com vista a uma contradição, suponhamos que T é conexo por arcos e não é conexo. Como T não é conexo, existem abertos não vazios A e B de T tais que $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = T$. Sejam $a \in A, b \in B$. Como T é conexo por arcos, existe um arco $f : [0,1] \to T$ de a para b. Mostre que $[0,1]$ é conexo ([4]). Pela proposição 3.92, $J = f([0,1])$ é conexo.

[4] Mais geralmente, um subconjunto I de $\mathbb{R}$ é conexo se e só se I for um intervalo. Cf. [Machado, *Introdução à Análise Funcional*, pag. 92].

Por outro lado,

$$a \in A \cap J, \quad b \in B \cap J, \quad A \cap B \cap J \subseteq A \cap B = \emptyset, \quad A \cup B = T \supseteq J,$$

Pela proposição 3.87, J não é conexo, uma contradição. ∎

Exercício 3.97 Seja

$$X = (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y = \operatorname{sen}(1/x)\}.$$

Mostre que X é conexo e não é conexo por arcos.

3.9 Separação

Definição 3.98 Seja T um espaço topológico.

Diz-se que $x, y \in T$ são *topologicamente indistinguíveis* se x e y pertencerem aos mesmos abertos; no caso contrário, diz-se que x, y são *topologicamente distinguíveis*.

Diz-se que T é *espaço de Kolmogorov* ou *espaço* T_0 se quaisquer dois pontos distintos de T forem topologicamente distinguíveis, isto é, se quaisquer que sejam $x, y \in T$, com $x \neq y$, existir um aberto A tal que $x \in A$ e $y \notin A$ ou existir um aberto B tal que $y \in B$ e $x \notin B$.

Diz-se que T é *espaço* T_1 se, quaisquer que sejam $x, y \in T$, com $x \neq y$, existir um aberto A tal que $x \in A$ e $y \notin A$.

Diz-se que T é *espaço de Hausdorff* ou *espaço topológico separado* ou *espaço* T_2 se, quaisquer que sejam $x, y \in T$, com $x \neq y$, existirem abertos A e B tais que $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$.

Claramente, se T for T_2, então T é T_1; e, se T for T_1, então T é T_0.

Exemplo 3.99 Se T for um conjunto munido com a topologia caótica, então quaisquer dois pontos de T são topologicamente indistinguíveis; assim, se T tiver pelo menos dois elementos, T não é T_0.

Proposição 3.100 *Se um espaço topológico T for metrizável, então T é de Hausdorff.*

Demonstração. Suponhamos que a topologia em T está associada a uma métrica d.

Sejam $x, y \in T$, com $x \neq y$. Seja $\delta = d(x, y)$. Então $A = \mathbf{B}(x, \delta/2)$ e $B = \mathbf{B}(y, \delta/2)$ são abertos, $x \in A$ e $y \in B$. Se existir $z \in A \cap B$, então

$$\delta = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \delta/2 + \delta/2 = \delta,$$

o que é absurdo. Assim $A \cap B = \emptyset$. Logo T é de Hausdorff. ∎

Proposição 3.101 *Um espaço topológico T é* T_1 *se e só se, qualquer que seja $x \in T$, $\{x\}$ for fechado.*

Demonstração. Suponhamos que T é T_1. Seja $x \in T$. Como T é T_1, para cada $y \in T \setminus \{x\}$, existe um aberto A_y tal que $y \in A_y$ e $x \notin A_y$. Então

$$T \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in T \setminus \{x\}} A_y$$

é aberto e, portanto, $\{x\}$ é fechado.

Reciprocamente, suponhamos que, qualquer que seja $x \in T$, $\{x\}$ é fechado. Sejam $x, y \in T$, com $x \neq y$. Como $\{y\}$ é fechado, $T \setminus \{y\}$ é aberto. Além disso, $x \in T \setminus \{y\}$ e $y \notin T \setminus \{y\}$. Logo T é T_1. ■

Proposição 3.102 *Se T for um espaço topológico de Hausdorff e K for um subconjunto compacto de T, então K é fechado.*

Demonstração. Com vista a uma contradição, suponhamos que T é de Hausdorff e que K é um subconjunto compacto de T que não é fechado. Como K não é fechado, existe um ponto de acumulação y de K que não pertence a K. Como T é de Hausdorff, para cada $x \in K$, existem abertos A_x e B_x tais que $x \in A_x$, $y \in B_x$ e $A_x \cap B_x = \emptyset$. Claramente

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} A_x.$$

Como K é compacto, existe um subconjunto finito K_0 de K tal que

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K_0} A_x.$$

Seja

$$B = \bigcap_{x \in K_0} B_x.$$

Como K_0 é finito, B é aberto. Como

$$K \cap B \subseteq \left(\bigcup_{x \in K_0} A_x \right) \cap B = \bigcup_{x \in K_0} (A_x \cap B) \subseteq \bigcup_{x \in K_0} (A_x \cap B_x) = \bigcup_{x \in K_0} \emptyset = \emptyset,$$

$B \subseteq T \setminus K$. Como $y \in B$ e B é aberto, $y \in (T \setminus K)^\circ = T \setminus \overline{K}$. Donde $y \notin \overline{K}$, o que é absurdo. ■

Proposição 3.103 Sejam T e T' espaços topológicos e $f : T \to T'$.

Se T for compacto, T' for de Hausdorff e f for bijetiva e contínua, então f é um homeomorfismo.

Demonstração. Vejamos que f é uma aplicação fechada. Seja F um subconjunto fechado de T. Pela proposição 3.77, F é compacto. Pela proposição 3.78, $f(F)$ é compacto. Pela proposição 3.102, $f(F)$ é fechado.

Tendo em atenção que f é fechada e bijetiva, deduza que f^{-1} é contínua. Logo f é um homeomorfismo. ■

Exercício 3.104 Seja T o intervalo real $[-1,1]$. Seja

$$\begin{aligned}\tau = \{T,\emptyset\} &\cup \{[-1,b) : b\in(0,1]\}\\ &\cup \{(a,1] : a\in[-1,0)\}\\ &\cup \{(a,b) : a\in[-1,0), b\in(0,1]\}.\end{aligned}$$

Mostre que τ é uma topologia em T. Mostre que, com a topologia τ, $\{0\}$ não é fechado, T é T_0 e T não é T_1.

Exercício 3.105 Seja T um conjunto infinito. Mostre que:

1. Com a topologia cofinita, T é T_1 e não é T_2.
2. Se (T,τ') for T_1, então τ' é mais fina do que a topologia cofinita.

Exercício 3.106 Se (T,τ) for um espaço topológico finito e T_1, então τ é a topologia discreta.

Espaços semimétricos

Definição 3.107 Seja M um conjunto. Chama-se *semimétrica* em M a uma aplicação $d : M\times M\to\mathbb{R}$ tal que, quaisquer que sejam $x,y,z\in M$,

(M_1) $d(x,y)\geq 0$,

(M_2) $d(x,y)=d(y,x)$,

(M_3) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$,

(M_4) $d(x,x)=0$.

Se d for uma semimétrica em M, diz-se que o par (M,d) é um *espaço semimétrico*, ou, se não existir perigo de confusão, que M é um *espaço semimétrico.*

Claramente, uma métrica em M é uma semimétrica em M. Muitas propriedades dos espaços métricos são válidas para os espaços semimétricos e demonstram-se de forma análoga. Uma exceção é a unicidade dos limites.

Exemplo 3.108 A aplicação

$$d : \mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{R},\quad (x,y)\mapsto |\,\mathrm{R}(x)-\mathrm{R}(y)|,$$

é uma semimétrica em $\mathbb{C}$ que não é uma métrica.

Exemplo 3.109 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Seja $R[a, b]$ o conjunto de todas as funções $[a, b] \to \mathbb{R}$ integráveis segundo Riemann (como definido nas disciplinas de Análise Matemática do primeiro ano).

- A aplicação $d_1 : R[a, b] \times R[a, b] \to \mathbb{R}$,

  $$(f, g) \mapsto \int_a^b |f(t) - g(t)| dt,$$

  é uma semimétrica em $R[a, b]$ que não é uma métrica.

- A aplicação $d_2 : R[a, b] \times R[a, b] \to \mathbb{R}$,

  $$(f, g) \mapsto \sqrt{\int_a^b (f(t) - g(t))^2 dt},$$

  é uma semimétrica em $R[a, b]$ que não é uma métrica.

Definição 3.110 Seja (M, d) um espaço semimétrico.

Chama-se *bola aberta* com centro em $x \in M$ e raio $r \in \mathbb{R}^+$ ao conjunto

$$\mathbf{B}(x, r) = \{y \in M : d(x, y) < r\}.$$

Se $x \in X \subseteq M$, diz-se que x é um *ponto interior* de X se existir $r \in \mathbb{R}^+$, tal que $\mathbf{B}(x, r) \subseteq X$.

Diz-se que $X \subseteq M$ é um conjunto *aberto* de M se todos os elementos de X forem pontos interiores de X.

Diz-se que uma sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de M converge para um limite $l \in M$ se, qualquer real positivo δ, existir $p \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq p$, $d(x_n, l) < \delta$.

Exercício 3.111 Seja (M, d) um espaço semimétrico. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de M. Sejam $l, l' \in M$ tais que $d(l, l') = 0$.

Mostre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para l se e só se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergir para l'.

Exercício 3.112 Seja (M, d) um espaço semimétrico. Mostre que:

1. O conjunto de todos os abertos de M é uma topologia em M.

2. $x, y \in M$ são topologicamente indistinguíveis se e só se $d(x, y) = 0$.

3. d é uma métrica se e só se M for T_0.

Exercício 3.113 Seja (M, d) um espaço semimétrico. Em M, definimos uma relação de equivalência $\sim$ do seguinte modo: quaisquer que sejam $x, y \in M$, $x \sim y$ se e só se $d(x, y) = 0$.

Para cada $x \in M$, seja $\widetilde{x}$ a classe de equivalência de x. Seja $\widetilde{M}$ o conjunto de todas as classes de equivalência: $\widetilde{M} = \{\widetilde{x} : x \in M\}$.

Mostre que:

1. Quaisquer que sejam $x, x', y, y' \in M$, se $x \sim x'$ e $y \sim y'$, então $d(x, y) = d(x', y')$.

2. A aplicação $\widetilde{d} : \widetilde{M} \times \widetilde{M} \to \mathbb{R}$, $(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \mapsto d(x, y)$, é uma métrica em $\widetilde{M}$.

3. A aplicação $\phi : M \to \widetilde{M}$, que a cada $x \in M$ faz corresponder $\widetilde{x}$, é contínua, aberta e sobrejetiva.

4. Se d for uma métrica, então, qualquer que seja $x \in M$, $\widetilde{x} = \{x\}$ e ϕ é um homeomorfismo.

5. Um subconjunto Z de $\widetilde{M}$ é aberto se e só se $\phi^{-1}(Z) = \{x \in M : \widetilde{x} \in Z\}$ for um aberto de M.

Quociente de Kolmogorov

Seja agora (T, τ) um espaço topológico. Em T, definimos uma relação de equivalência $\sim$ do seguinte modo: quaisquer que sejam $x, y \in T$, $x \sim y$ se e só se x e y forem topologicamente indistinguíveis.

Para cada $x \in T$, seja $\widetilde{x}$ a classe de equivalência de x. Seja $\widetilde{T}$ o conjunto de todas as classes de equivalência: $\widetilde{T} = \{\widetilde{x} : x \in T\}$.

Seja $\widetilde{\tau}$ o conjunto de todas as partes Z de $\widetilde{T}$ tais que $\{x \in T : \widetilde{x} \in Z\}$ é um aberto de T.

Exercício 3.114 Mostre que:

1. $\widetilde{\tau}$ é uma topologia em $\widetilde{T}$.

2. $(\widetilde{T}, \widetilde{\tau})$ é T_0.

3. A aplicação $\phi : T \to \widetilde{T}$, que a cada $x \in T$ faz corresponder $\widetilde{x}$, é contínua, aberta e sobrejetiva.

4. Se (T, τ) for T_0, então, qualquer que seja $x \in T$, $\widetilde{x} = \{x\}$ e ϕ é um homeomorfismo.

Diz-se que o espaço $(\widetilde{T}, \widetilde{\tau})$ é o quociente de Kolmogorov de (T, τ).

3.10 Exemplo: a topologia de Zariski

Seja K um corpo. Recorde-se que um polinómio nas indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$ com coeficientes em K é uma expressão da forma

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1=0}^{k_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n} a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}, \tag{3.4}$$

onde $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$, e os elementos $a_{i_1,\ldots,i_n}$ pertencem a K.

Seja $K[x_1, \ldots, x_n]$ o conjunto dos polinómios nas indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$ com coeficientes em K. Com as operações de soma, multiplicação e multiplicação escalar definidas da forma usual, $K[x_1, \ldots, x_n]$ é um anel comutativo e um espaço vetorial sobre K.

Seja $\mathrm{Ap}(K^n, K)$ o conjunto de todas as aplicações de K^n para K. Em $\mathrm{Ap}(K^n, K)$, definimos uma soma, uma multiplicação e uma multiplicação escalar de elementos de K por elementos de $\mathrm{Ap}(K^n, K)$ do seguinte modo: quaisquer que sejam $f, g \in \mathrm{Ap}(K^n, K)$, $a \in K$,

$$\begin{aligned} &(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in K^n, \\ &(fg)(x) = f(x)g(x), \quad \forall x \in K^n, \\ &(af)(x) = af(x), \quad \forall x \in K^n. \end{aligned}$$

Com estas operações, $\mathrm{Ap}(K^n, K)$ é um anel comutativo e um espaço vetorial sobre K.

Para cada polinómio da forma (3.4) e cada $b = (b_1, \ldots, b_n) \in K^n$, seja $f(b_1, \ldots, b_n)$ o elemento de K que resulta de substituir as variáveis $x_1, \ldots, x_n$ por $b_1, \ldots, b_n$, respetivamente:

$$f(b) = f(b_1, \ldots, b_n) = \sum_{i_1=0}^{k_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n} a_{i_1,\ldots,i_n} b_1^{i_1} \cdots b_n^{i_n}.$$

Prova-se que a aplicação

$$\Phi : K[x_1, \ldots, x_n] \to \mathrm{Ap}(K^n, K),$$

que a cada polinómio $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ faz corresponder a aplicação

$$\Phi(f) : K^n \to K, \quad b \mapsto f(b),$$

é um homomorfismo de anéis e uma aplicação linear.

Para cada $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$, diz-se que $\Phi(f)$ é a aplicação polinomial associada a f.

Diz-se que $b = (b_1, \ldots, b_n) \in K^n$ é uma *raiz* de um polinómio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F[x_1, \ldots, x_n]$ se

$$f(b) = f(b_1, \ldots, b_n) = 0.$$

Para cada $G \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$, seja

$$V(G) = \{b \in K^n : \forall f \in G,\ f(b) = 0\},$$

isto é, $V(G)$ é o conjunto das raízes comuns a todos os polinómios que pertencem a G. Chamamos *variedade algébrica afim* de K^n ou simplesmente *variedade* de K^n a qualquer conjunto da forma $V(G)$. Diz-se que $V(G)$ é a variedade definida por G. O estudo das variedades é um dos objetivos principais da disciplina de Geometria Algébrica.

Exemplos 3.115 Seja K um corpo.

1. $\emptyset$ é a variedade de K^n definida pelo conjunto $\{1\}$.
2. Se $b = (b_1, \ldots, b_n) \in K^n$, então $\{b\}$ é a variedade definida pelo conjunto $\{x_1 - b_1, \ldots, x_n - b_n\}$.
3. K^n é a variedade de K^n definida pelo conjunto $\{0\}$ e também pelo conjunto $\emptyset$.
4. O conjunto das soluções de um sistema de p equações lineares, em n indeterminadas, com coeficientes em K, é uma variedade de K^n definida por um conjunto de p polinómios de grau ≤ 1. Estas variedades também se chamam subespaços afins de K^n.
5. Em $\mathbb{R}^2$, a circunferência de centro em $(0,0)$ e raio 1 é a variedade definida pelo conjunto $\{x_1^2 + x_2^2 - 1\}$.

Para cada $X \subseteq K^n$, seja

$$I(X) = \{f \in K[x_1, \ldots, x_n] : \forall b \in X,\ f(b) = 0\}.$$

Pela proposição seguinte, $I(X)$ é um ideal. Diz-se que $I(X)$ é o ideal do conjunto X.

Proposição 3.116 *Para cada $X \subseteq K^n$, $I(X)$ é um ideal do anel $K[x_1, \ldots, x_n]$.*

Demonstração. Claramente, o polinómio nulo, representado por 0, é um elemento de $I(X)$. Os argumentos seguintes utilizam a definição de Φ, as definições de soma e produto de elementos de $\mathrm{Ap}(K^n, K)$ e o facto de Φ ser um homomorfismo de anéis.

Sejam $f, g \in I(X)$. Então, qualquer que seja $b \in X$, $f(b) = g(b) = 0$. Donde, qualquer que seja $b \in X$, $(f+g)(b) = (\Phi(f+g))(b) = (\Phi(f) + \Phi(g))(b) = (\Phi(f))(b) + (\Phi(g))(b) = f(b) + g(b) = 0 + 0 = 0$. Logo $f + g \in I(X)$.

Sejam $h \in K[x_1, \ldots, x_n]$, $f \in I(X)$. Então, qualquer que seja $b \in X$, $f(b) = 0$. Donde, qualquer que seja $b \in X$, $(hf)(b) = (\Phi(hf))(b) = (\Phi(h)\Phi(f))(b) = (\Phi(h))(b)(\Phi(f))(b) = h(b)f(b) = h(b)0 = 0$. Logo, $hf \in I(X)$.

Logo $I(X)$ é um ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$. ∎

Proposição 3.117 *Sejam K um corpo, $G, H \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ e $X, Y \subseteq K^n$. Então*

(a) $G \subseteq IV(G)$

(b) $X \subseteq VI(X)$.

(c) *Se* $G \subseteq H$, *então* $V(H) \subseteq V(G)$.

(d) *Se* $X \subseteq Y$, *então* $I(Y) \subseteq I(X)$.

(e) $V(G) = VIV(G)$.

(f) $I(X) = IVI(X)$.

Demonstração. (a) Seja $f \in G$. Pela definição de $V(G)$, para qualquer $b \in V(G)$, $f(b) = 0$. Pela definição de $IV(G)$, $f \in IV(G)$. Logo $G \subseteq IV(G)$.

A demonstração de (b) é análoga à demonstração de (a).

(c) Suponhamos que $G \subseteq H$. Seja $b \in V(H)$. Então, para qualquer $f \in H$, $f(b) = 0$. Como $G \subseteq H$, vem que, para qualquer $f \in G$, $f(b) = 0$. Logo $b \in V(G)$. Logo $V(H) \subseteq V(G)$.

A demonstração de (d) é análoga à demonstração de (c).

(e) Por (b), $V(G) \subseteq VIV(G)$. Vejamos que a inclusão recíproca é verdadeira. Por (a), $G \subseteq IV(G)$. Por (c), $VIV(G) \subseteq V(G)$. Logo $V(G) = VIV(G)$.

A demonstração de (f) é análoga à demonstração de (e). ∎

Seja $\mathcal{V}$ o conjunto de todas as variedades de K^n. Seja $\mathcal{R}$ o conjunto de todos os ideais de $K[x_1, \ldots, x_n]$ da forma $I(X)$, para algum $X \subseteq K^n$.

Por (e), toda a variedade é definida por um ideal pertencente a $\mathcal{R}$ ([5]). Analogamente, por (f), todo o ideal $I \in \mathcal{R}$ é ideal de uma variedade.

Além disso, (e) e (f) mostram que as aplicações

$$V : \mathcal{R} \to \mathcal{V} \qquad \text{e} \qquad I : \mathcal{V} \to \mathcal{R}$$

são invertíveis e uma é a inversa da outra.

Corolário 3.118 *Sejam* K *um corpo,* $G \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ *e* $\langle G \rangle$ *o ideal de* $K[x_1, \ldots, x_n]$ *gerado por* G. *Então* $V(\langle G \rangle) = V(G)$.

Demonstração. Como $G \subseteq IV(G)$ e $\langle G \rangle$ é o menor ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$ que contém G, vem

$$G \subseteq \langle G \rangle \subseteq IV(G).$$

Donde, utilizando a proposição anterior,

$$V(G) = VIV(G) \subseteq V(\langle G \rangle) \subseteq V(G).$$

Logo $V(\langle G \rangle) = V(G)$. ∎

[5] Se V for uma variedade definida por $G \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$, então V também é definida pelo ideal $IV(G)$.

Observação 3.119 O Teorema da base de Hilbert, que não será demonstrado nesta disciplina, afirma que *todos os ideais do anel* $K[x_1, \ldots, x_n]$ *são finitamente gerados.*

Como corolário, deduzimos que, *para qualquer variedade* V, *existe um subconjunto finito* F *de* $K[x_1, \ldots, x_n]$ *tal que* $V = V(F)$.

> *Demonstração.* Seja V uma variedade. Existe $G \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $V = V(G)$. Pelo teorema da base de Hilbert, existe um conjunto finito $F \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ que gera o ideal $\langle G \rangle$. Pelo corolário 3.118, $V(G) = V(\langle G \rangle) = V(\langle F \rangle) = V(F)$. ∎

Lema 3.120 *Sejam* K *um corpo e* $(V_i)_{i \in I}$ *uma família não vazia de variedades de* K^n. *Suponhamos que, para cada* $i \in I$, $V_i = V(G_i)$, *onde* $G_i \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$. *Então*

$$\bigcap_{i \in I} V_i = V\left(\bigcup_{i \in I} G_i\right).$$

Demonstração. Seja $b \in \bigcap_{i \in I} V_i$. Para qualquer $i \in I$, $b \in V_i = V(G_i)$. Donde, para quaisquer $i \in I$ e $f \in G_i$, $f(b) = 0$. Donde, para qualquer $f \in \bigcup_{i \in I} G_i$, $f(b) = 0$. Donde $b \in V(\bigcup_{i \in I} G_i)$. Logo $\bigcap_{i \in I} V_i \subseteq V(\bigcup_{i \in I} G_i)$.

Reciprocamente, para cada $j \in I$, $G_j \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$. Donde $V(\bigcup_{i \in I} G_i) \subseteq V(G_j) = V_j$. Logo $V(\bigcup_{i \in I} G_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} V_i$. ∎

Lema 3.121 *Sejam* K *um corpo e* $V_1, \ldots, V_p$ *variedades de* K^n. *Suponhamos que, para cada* $i \in \{1, \ldots, p\}$, $V_i = V(G_i)$, *onde* $G_i \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$. *Seja*

$$G = \{f_1 \cdots f_p : f_1 \in G_1, \ldots, f_p \in G_p\}.$$

Então

$$V_1 \cup \cdots \cup V_p = V(G).$$

Demonstração. Seja $b \in V_1 \cup \cdots \cup V_p$. Existe $i \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $b \in V_i = V(G_i)$. Assim, para qualquer $f_i \in G_i$, $f_i(b) = 0$. Seja $f_1 \cdots f_p$ um elemento arbitrário de G, onde $f_1 \in G_1, \ldots, f_p \in G_p$. Utilizando o facto de Φ ser homomorfismo de anéis e tendo em conta a definição da multiplicação em $\mathrm{Ap}(K^n, K)$, temos

$$\begin{aligned}(f_1 \cdots f_p)(b) &= (\Phi(f_1 \cdots f_p))(b) = (\Phi(f_1) \cdots \Phi(f_p))(b) \\ &= (\Phi(f_1))(b) \cdots (\Phi(f_p))(b) = f_1(b) \cdots f_p(b) = 0.\end{aligned}$$

(A última igualdade é verdadeira, porque $f_i(b) = 0$.) Portanto $b \in V(G)$. Logo $V_1 \cup \cdots \cup V_p \subseteq V(G)$.

Reciprocamente, seja $b \in V(G)$. Se $b \in V_1 \cup \cdots \cup V_{p-1}$, então $b \in V_1 \cup \cdots \cup V_p$. Suponhamos agora que $b \notin V_1 \cup \cdots \cup V_{p-1}$. Então, para cada $i \in \{1, \ldots, p-1\}$, $b \notin V_i = V(G_i)$ e, portanto, existe $f_i \in G_i$ tal que

$f_i(b) \neq 0$. Seja $f_p \in G_p$. Como $b \in V(G)$, $(f_1 \cdots f_{p-1} f_p)(b) = 0$. Com um argumento análogo ao utilizado acima, vem $f_1(b) \cdots f_{p-1}(b) f_p(b) = 0$. Como $f_1(b), \ldots, f_{p-1}(b)$ não são nulos, $f_p(b) = 0$. Logo $b \in V(G_p) = V_p \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_p$. Logo $V(G) \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_p$. ■

Teorema 3.122 *Seja K um corpo. Existe uma única topologia em K^n cujos fechados são as variedades de K^n.*

Demonstração. Como vimos no exemplo 3.115, $\emptyset$ e K^n são variedades. Pelo lema 3.120, a intersecção de uma família não vazia de variedades é uma variedade. Pelo lema 3.121, a união finita de variedades é uma variedade.

Pela proposição 3.35, existe uma única topologia em K^n cujos fechados são as variedades de K^n. ■

A topologia referida no teorema anterior chama-se *topologia de Zariski* de K^n.

Proposição 3.123 *Seja K for um corpo. Então K^n, com a topologia de Zariski, é um espaço* T_1.

Demonstração. Vimos, no exemplo 3.115, que os subconjuntos singulares de K^n são variedades. Pela proposição 3.101, K^n é T_1. ■

Proposição 3.124 *Seja K for um corpo. Em K, a topologia de Zariski coincide com a topologia cofinita.*

Demonstração. Basta mostrar que os fechados para a topologia de Zariski coincidem com os fechados para a topologia cofinita.

Seja F um fechado para a topologia cofinita. Se $F = K$, então $F = V(\emptyset)$. Suponhamos agora que $F \neq K$. Então F é um conjunto finito. Suponhamos que $F = \{a_1, \ldots, a_p\}$. Seja $f(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_p) \in F[x]$. Então $F = V(\{f\})$, o que mostra que F é fechado para a topologia de Zariski.

Reciprocamente, seja V um fechado para topologia de Zariski, isto é, uma variedade de K. Seja $G \subseteq K[x]$ tal que $V = V(G)$. Se $G \subseteq \{0\}$, então $V(G) = K$ é fechado para a topologia cofinita. Suponhamos agora que $G \not\subseteq \{0\}$. Seja $f \in G \setminus \{0\}$. Sabemos ([6]) que o conjunto das raízes de f é finito, isto é, $V(\{f\})$ é finito. Como $V = V(G) \subseteq V(\{f\})$, V é finito. Portanto V é fechado para a topologia cofinita. ■

Proposição 3.125 *Seja $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Em $\mathbb{F}^n$, a topologia usual é mais fina do que a topologia de Zariski.*

[6] Das disciplinas de Álgebra do segundo ano.

Demonstração. Basta mostrar que todos os fechados para a topologia de Zariski são fechados para a topologia usual.

Seja V uma variedade de $\mathbb{F}^n$, isto é, um fechado para a topologia de Zariski. Seja $G \subseteq \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $V = V(G)$.

Seja $f \in G$. Considerando em $\mathbb{F}^n$ e em $\mathbb{F}$ as topologias usuais, a aplicação polinomial $\Phi(f) : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ é contínua. Como $\{0\}$ é um fechado de $\mathbb{F}$ para a topologia usual, $(\Phi(f))^{-1}(\{0\})$ é um fechado de $\mathbb{F}^n$ para a topologia usual. Mas

$$(\Phi(f))^{-1}(\{0\}) = \{b \in \mathbb{F}^n : (\Phi(f))(b) = 0\} = \{b \in \mathbb{F}^n : f(b) = 0\} = V(\{f\}).$$

Assim

$$V(G) = V(\bigcup_{f \in G} \{f\}) = \bigcap_{f \in G} V(\{f\}) = \bigcap_{f \in G} (\Phi(f))^{-1}(\{0\})$$

é um fechado de $\mathbb{F}^n$ para a topologia usual. ■

3.11 Breve referência à noção de vizinhança

Diz-se que um subconjunto V de um espaço topológico T é uma *vizinhança* de $x \in T$ se x for um ponto interior de V. Para cada $x \in T$, seja $\mathcal{V}_x$ o conjunto de todas as vizinhanças de x.

Proposição 3.126 *Seja T um espaço topológico. Quaisquer que sejam $x \in T$, $V, U \subseteq T$,*

(V_1) $T \in \mathcal{V}_x$,

(V_2) *Se $V, U \in \mathcal{V}_x$, então $V \cap U \in \mathcal{V}_x$.*

(V_3) *Se $V \in \mathcal{V}_x$ e $V \subseteq U$, então $U \in \mathcal{V}_x$.*

(V_4) *Se $V \in \mathcal{V}_x$, então $x \in V$.*

(V_5) *Se $V \in \mathcal{V}_x$, então existe $W \in \mathcal{V}_x$ tal que, qualquer que seja $y \in W$, $V \in \mathcal{V}_y$.*

Muitas definições e proposições da Topologia podem ser enunciadas, utilizando as vizinhanças em vez dos abertos. Os exercícios seguintes ilustram a utilização da noção de vizinhança.

Exercício 3.127 Mostre que um subconjunto A de T é aberto se e só se, qualquer que seja $x \in A$, $A \in \mathcal{V}_x$.

Exercício 3.128 Sejam T um espaço topológico, $X \subseteq T$ e $y \in T$. Mostre que y é ponto de acumulação de X se e só se, para toda a vizinhança V de y, $X \cap (V \setminus \{y\}) \neq \emptyset$.

Exercício 3.129 Seja $f : T \to T'$, onde T e T' são espaços topológicos. Seja $x \in T$. Mostre que f é contínua em x se e só se, para toda a vizinhança V' de $f(x)$, $f^{-1}(V')$ for uma vizinhança de x.

Exercício 3.130 Sejam T um espaço topológico, $X \subseteq T$ e $x \in X$. Mostre que o conjunto das vizinhanças de x no subespaço topológico X é

$$\mathcal{V}'_x = \{X \cap V : V \in \mathcal{V}_x\}.$$

Exercício 3.131 Mostre que um espaço topológico T é de Hausdorff se e só se, quaisquer que sejam $x, y \in T$, com $x \neq y$, existirem $V \in \mathcal{V}_x$ e $U \in \mathcal{V}_y$ tais que $V \cap U = \emptyset$.

Definição alternativa de espaço topológico

Seja T um conjunto. Seja $\mathbf{Viz}_T$ o conjunto de todas as famílias $(\mathcal{V}_x)_{x\in T}$ de elementos de $\mathcal{P}(T)$ tais que, quaisquer que sejam $x \in T$, $V, U \subseteq T$, as propriedades (V_1) a (V_5) são satisfeitas. Seja $\mathbf{Top}_T$ o conjunto de todas as topologias em T.

Para cada $\tau \in \mathbf{Top}_T$, seja

$$\Phi(\tau) = (\mathcal{V}_x)_{x\in T},$$

onde, para cada $x \in T$, $\mathcal{V}_x$ é o conjunto de todas as vizinhanças de x, relativamente à topologia τ. Pela proposição 3.126, $\Phi(\tau) \in \mathbf{Viz}_T$. Deste modo, definimos uma aplicação

$$\Phi : \mathbf{Top}_T \to \mathbf{Viz}_T.$$

Reciprocamente, para cada $\mathcal{V} = (\mathcal{V}_x)_{x\in T} \in \mathbf{Viz}_T$, seja

$$\Psi(\mathcal{V}) = \{A \subseteq T : \forall x \in A, A \in \mathcal{V}_x\}.$$

Proposição 3.132 *Para cada* $\mathcal{V} \in \mathbf{Viz}_T$, $\Psi(\mathcal{V})$ *é uma topologia em* T.

Deste modo, definimos uma aplicação

$$\Psi : \mathbf{Viz}_T \to \mathbf{Top}_T.$$

Proposição 3.133 $\Phi\Psi = \mathrm{id}_{\mathbf{Viz}_T}$ *e* $\Psi\Phi = \mathrm{id}_{\mathbf{Top}_T}$.

Assim, existe uma bijecção natural entre $\mathbf{Top}_T$ e $\mathbf{Viz}_T$. Esta bijecção justifica que, nalguns livros ([7]), se defina espaço topológico como sendo um par $(T, \mathcal{V})$, onde $\mathcal{V} \in \mathbf{Viz}_T$. Com esta definição, dado um espaço topológico $(T, \mathcal{V})$, definiriamos aberto do seguinte modo: Um subconjunto A de T é um aberto de $(T, \mathcal{V})$ se, qualquer que seja $x \in A$, $A \in \mathcal{V}_x$ (isto é, $A \in \Psi(\mathcal{V})$).

[7] Por exemplo, [Machado, *Introdução à Análise Funcional*, Escolar Editora, 1991.]

Capítulo 4

Espaços Vetoriais Normados

Neste capítulo, estudam-se as propriedades topológicas dos espaços vetoriais normados. Está implicito que um espaço vetorial normado $(V, \| \ \|)$ está munido com a métrica d que lhe está associada e com a topologia associada a d.

4.1 Continuidade de aplicações lineares e multilineares

Proposição 4.1 *Seja $(V, \| \ \|)$ um espaço normado. A aplicação $\| \ \| : V \to \mathbb{R}$ é contínua, relativamente à métrica associada a $\| \ \|$ em V e à métrica usual em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $v_0 \in V$. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Seja $v \in V$ tal que $\|v - v_0\| < \delta$. Então

$$|\|v\| - \|v_0\|| \leq \|v - v_0\| < \delta.$$

Logo $\| \ \|$ é contínua em v_0. Logo $\| \ \|$ é contínua. ■

Exemplo 4.2 No espaço ℓ^1, a norma $\| \ \|_1 : \ell^1 \to \mathbb{R}$ não é contínua, relativamente à métrica associada a $\| \ \|_\infty$ em ℓ^1 e à métrica usual em $\mathbb{R}$.

> *Demonstração.* Suponhamos que $\| \ \|_1$ é contínua, relativamente à métrica associada a $\| \ \|_\infty$ em ℓ^1 e à métrica usual em $\mathbb{R}$.
>
> Então $\| \ \|_1$ é contínua em 0 e existe $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que, qualquer que seja $x \in \ell^1$,
>
> $$\|x - 0\|_\infty < \epsilon \Rightarrow |\|x\|_1 - \|0\|_1| < 1.$$
>
> Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k\epsilon/2 \geq 1$. Seja $x \in \ell^1$ a sucessão cujos primeiros k termos são iguais a $\epsilon/2$ e os restantes são nulos. Então $\|x\|_\infty = \epsilon/2 < \epsilon$, enquanto $\|x\|_1 = k\epsilon/2 \geq 1$, o que é absurdo.

Proposição 4.3 *Sejam V e U espaços vetoriais normados. Seja $f : V \to U$ uma aplicação linear. São equivalentes:*

(a) *f é contínua.*

(b) *f é contínua em $0 \in V$.*

(c) *Existe $\mu \in \mathbb{R}^+$ tal que, qualquer que seja $v \in V$, $\|f(v)\| \leq \mu\|v\|$.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) é trivial.

(b) $\Rightarrow$ (c) Suponhamos que f é contínua em $0 \in V$. Existe $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que, qualquer que seja $v' \in V$,

$$\|v'\| = \|v' - 0\| < \epsilon \Rightarrow \|f(v')\| = \|f(v') - f(0)\| < 1.$$

Seja $v \in V \setminus \{0\}$. Então

$$w = \frac{\epsilon}{2\|v\|} v$$

tem norma $\epsilon/2$ e, portanto, $\|f(w)\| < 1$. Então

$$\|f(v)\| = \left\| f\left(\frac{2\|v\|}{\epsilon} w\right) \right\| = \left\| \frac{2\|v\|}{\epsilon} f(w) \right\| = \frac{2\|v\|}{\epsilon} \|f(w)\| < \frac{2}{\epsilon}\|v\|.$$

Se $v = 0 \in V$, então $\|f(v)\| = \|0\| = 0 = (2/\epsilon)\|v\|$. Assim, qualquer que seja $v \in V$, $\|f(v)\| \leq (2/\epsilon)\|v\|$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Suponhamos que a condição (c) é satisfeita. Seja $w \in V$. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Qualquer que seja $v \in V$, se $\|v - w\| < \delta/\mu$, então

$$\|f(v) - f(w)\| = \|f(v - w)\| \leq \mu\|v - w\| < \delta.$$

Logo f é contínua em w. Logo f é contínua. ■

Proposição 4.4 *Seja V um espaço vetorial normado. A adição*

$$\sigma : V \times V \to V, \quad (v, u) \mapsto \sigma(v, u) = v + u,$$

é uma aplicação linear contínua (considerando no espaço vetorial produto $V \times V$ a topologia produto).

Demonstração. Verifiquemos que σ é linear. Quaisquer que sejam (v, u), $(v', u') \in V \times V$, $a \in \mathbb{F}$,

$$\begin{aligned}
\sigma((v, u) + (v', u')) &= \sigma(v + v', u + u') = (v + v') + (u + u') \\
&= (v + u) + (v' + u') = \sigma(v, u) + \sigma(v', u'), \\
\sigma(a(v, u)) &= \sigma(av, au) = av + au = a(v + u) = a\sigma(v, u).
\end{aligned}$$

Com vista a provar que σ é contínua, consideremos no espaço produto $V \times V$ a norma $\| \ \|_1$ (cf. exemplo 1.54), a qual tem associada a métrica ρ_1 (cf. exemplo 2.8) que tem associada a topologia produto (cf. exemplo 3.66).

Qualquer que seja $(u, v) \in V \times V$,

$$\|\sigma(u, v)\| = \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| = \|(u, v)\|_1.$$

Pela proposição 4.3, σ é contínua. ■

Exemplo 4.5 Seja ℓ^0 o conjunto de todas as sucessões $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{F}$ tais que

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\}$$

é finito. É fácil mostrar que ℓ^0 é um subespaço do espaço vetorial $\mathrm{Ap}(\mathbb{N}, \mathbb{F})$ de todas as sucessões de elementos de $\mathbb{F}$. Além disso, $\ell^0 \subseteq \ell^1 \subseteq \ell^2 \subseteq \ell^\infty \subseteq \mathrm{Ap}(\mathbb{N}, \mathbb{F})$. Seja $i \in \{1, 2, \infty\}$ e consideremos em ℓ^0 a norma $\| \; \|_i$.

É fácil mostrar que a aplicação $f : \ell^0 \to \ell^0$, que a cada sucessão $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ faz corresponder $f(x) = (nx_n)_{n\in\mathbb{N}}$, é linear. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja e_k a sucessão cujo k-ésimo elemento é 1 e os restantes são nulos. Então $\|e_k\|_i = 1$ e $\|f(e_k)\|_i = k$. Tendo em conta a proposição 4.3, deduz-se que f não é contínua, relativamente à norma $\| \; \|_i$.

Definição 4.6 Sejam $V_1, \ldots, V_k$ e U espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$. Diz-se que uma aplicação $f : V_1 \times \cdots \times V_k \to U$ é multilinear se, para quaisquer $j \in \{1, \ldots, k\}$, $v_1 \in V_1, \ldots, v_{j-1} \in V_{j-1}, v_{j+1} \in V_{j+1}, \ldots, v_k \in V_k$, a aplicação

$$V_j \to U, \quad v_j \mapsto f(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_k),$$

for linear, isto é, se, para quaisquer $j \in \{1, \ldots, k\}$, $v_1 \in V_1, \ldots, v_{j-1} \in V_{j-1}$, $v_j, v_j' \in V_j, v_{j+1} \in V_{j+1}, \ldots, v_k \in V_k$, $a \in \mathbb{F}$,

$$\begin{aligned} &f(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j + v_j', v_{j+1}, \ldots, v_k) = \\ &\qquad f(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_k) + f(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j', v_{j+1}, \ldots, v_k), \\ &f(v_1, \ldots, v_{j-1}, av_j, v_{j+1}, \ldots, v_k) = af(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \ldots, v_k). \end{aligned}$$

Se $k = 2$, então uma aplicação multilinear $f : V_1 \times V_2 \to U$ também se chama aplicação bilinear.

Proposição 4.7 *Sejam $V_1, \ldots, V_k, U$ espaços vetoriais normados. Considere-se em $V_1 \times \cdots \times V_k$ a topologia produto. Seja $f : V_1 \times \cdots \times V_k \to U$ uma aplicação multilinear. São equivalentes:*

(a) *f é contínua.*

(b) *f é contínua em $0 = (0, \ldots, 0) \in V_1 \times \cdots \times V_k$.*

(c) *Existe $\mu \in \mathbb{R}^+$ tal que, qualquer que seja $(v_1, \ldots, v_k) \in V_1 \times \cdots \times V_k$,*

$$\|f(v_1, \ldots, v_k)\| \leq \mu\|v_1\| \cdots \|v_k\|. \tag{4.1}$$

Demonstração. Considere-se em $V = V_1 \times \cdots \times V_k$ a norma $\| \; \|_\infty$ (cf. exemplo 1.54), a qual tem associada a métrica ρ_∞ (cf. exemplo 2.8) que tem associada a topologia produto (cf. exemplo 3.66). (a) $\Rightarrow$ (b) é trivial.

(b) $\Rightarrow$ (c) Suponhamos que f é contínua em $(0, \ldots, 0)$. Existe $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que, quaisquer que sejam $v_1' \in V_1, \ldots, v_k' \in V_k$,

$$\|(v_1', \ldots, v_k')\|_\infty < \epsilon \Rightarrow \|f(v_1', \ldots, v_k')\| = \|f(v_1', \ldots, v_k') - f(0, \ldots, 0)\| < 1.$$

Seja $(v_1, \dots, v_k) \in V$. Suponhamos, em primeiro lugar, que $v_j \neq 0$, qualquer que seja $j \in \{1, \dots, k\}$. Então

$$(w_1, \dots, w_k) = \left(\frac{\epsilon}{2\|v_1\|} v_1, \dots, \frac{\epsilon}{2\|v_k\|} v_k \right)$$

tem norma $\epsilon/2$ e, portanto, $\|f(w_1, \dots, w_k)\| < 1$. Então

$$\begin{aligned} \|f(v_1, \dots, v_k)\| &= \left\| f\left(\frac{2\|v_1\|}{\epsilon} w_1, \dots, \frac{2\|v_k\|}{\epsilon} w_k \right) \right\| \\ &= \left\| \frac{2^k}{\epsilon^k} \|v_1\| \cdots \|v_k\| f(w_1, \dots, w_k) \right\| \\ &= (2^k/\epsilon^k) \|v_1\| \cdots \|v_k\| \|f(w_1, \dots, w_k)\| \\ &< (2^k/\epsilon^k) \|v_1\| \cdots \|v_k\|. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que $v_j = 0$, para algum $j \in \{1, \dots, k\}$. Então

$$\|f(v_1, \dots, v_k)\| = \|0\| = (2^k/\epsilon^k) \|v_1\| \cdots \|v_k\|.$$

Em qualquer caso, $\|f(v_1, \dots, v_k)\| \leq (2^k/\epsilon^k) \|v_1\| \cdots \|v_k\|$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Suponhamos que (c) é satisfeita. Seja $(w_1, \dots, w_k) \in V$. Vejamos que f é contínua em $(w_1, \dots, w_k)$. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Seja

$$M = \max\{\|w_1\|, \dots, \|w_k\|\} + 1.$$

Seja

$$\epsilon = \min\left\{1, \frac{\delta}{k\mu M^{k-1}}\right\}.$$

Seja $(v_1, \dots, v_k) \in V_1 \times \cdots \times V_k$ tal que

$$\max_{j \in \{1, \dots, k\}} \|v_j - w_j\| = \|(v_1, \dots, v_k) - (w_1, \dots, w_k)\|_\infty < \epsilon. \tag{4.2}$$

Sejam

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= (v_1,\ v_2,\ v_3,\ \dots,\ v_{k-2},\ v_{k-1},\ v_k), \\ \mathbf{x}_1 &= (w_1,\ v_2,\ v_3,\ \dots,\ v_{k-2},\ v_{k-1},\ v_k), \\ \mathbf{x}_2 &= (w_1,\ w_2,\ v_3,\ \dots,\ v_{k-2},\ v_{k-1},\ v_k), \\ &\ \vdots \\ \mathbf{x}_{k-1} &= (w_1,\ w_2,\ w_3,\ \dots,\ w_{k-2},\ w_{k-1},\ v_k), \\ \mathbf{x}_k &= (w_1,\ w_2,\ w_3,\ \dots,\ w_{k-2},\ w_{k-1},\ w_k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= (\ v_1 - w_1,\ v_2,\ v_3,\ \dots,\ v_{k-2},\ v_{k-1},\ v_k), \\ \mathbf{y}_2 &= (\ w_1,\ v_2 - w_2,\ v_3,\ \dots,\ v_{k-2},\ v_{k-1},\ v_k), \\ &\ \vdots \\ \mathbf{y}_{k-1} &= (\ w_1,\ w_2,\ w_3,\ \dots,\ w_{k-2},\ v_{k-1} - w_{k-1},\ v_k), \\ \mathbf{y}_k &= (\ w_1,\ w_2,\ w_3,\ \dots,\ w_{k-2},\ w_{k-1},\ v_k - w_k). \end{aligned}$$

Seja $j \in \{1, \ldots, k\}$. Como f é multilinear,

$$f(\mathbf{y}_j) = f(\mathbf{x}_{j-1}) - f(\mathbf{x}_j). \tag{4.3}$$

Por (4.1)

$$\|f(\mathbf{y}_j)\| \leq \mu \|w_1\| \cdots \|w_{j-1}\| \|v_j - w_j\| \|v_{j+1}\| \cdots \|v_k\|. \tag{4.4}$$

Pela definição de M

$$\|w_j\| < M. \tag{4.5}$$

Por (4.2)

$$\|v_j\| - \|w_j\| \leq |\|v_j\| - \|w_j\|| \leq \|v_j - w_j\| < \epsilon. \tag{4.6}$$

Donde

$$\|v_j\| < \|w_j\| + \epsilon \leq \|w_j\| + 1 \leq M. \tag{4.7}$$

Tendo em conta (4.2)–(4.7),

$$\begin{aligned}
\|f(v_1, \ldots, v_k) - f(w_1, \ldots, w_k)\| &= \|f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_k)\| \\
&= \| \sum_{j=1}^{k} (f(\mathbf{x}_{j-1}) - f(\mathbf{x}_j))\| = \| \sum_{j=1}^{k} f(\mathbf{y}_j)\| \leq \sum_{j=1}^{k} \|f(\mathbf{y}_j)\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} \mu \|w_1\| \cdots \|w_{j-1}\| \|v_j - w_j\| \|v_{j+1}\| \cdots \|v_k\| < k\mu M^{k-1}\epsilon \leq \delta.
\end{aligned}$$

Logo f é contínua em $(w_1, \ldots, w_k)$. Logo f é contínua. ∎

Corolário 4.8 *Seja V um espaço vetorial normado. O produto escalar*

$$\pi : \mathbb{F} \times V \to V, \quad (a, v) \mapsto \pi(a, v) = av,$$

é uma aplicação bilinear contínua (considerando no espaço vetorial produto $\mathbb{F} \times V$ a topologia produto).

Demonstração. Resulta trivialmente, dos axiomas de espaço vetorial, que π é bilinear. Qualquer que seja $(a, v) \in \mathbb{F} \times V$, $\|\pi(a, v)\| = \|av\| = |a| \|v\|$. Pela proposição 4.7, π é contínua. ∎

4.2 Espaços normados de dimensão finita

As duas propriedades seguintes dos números reais são conhecidas das disciplinas de Análise Matemática e não serão demonstradas neste curso.

Proposição 4.9 [Heine–Borel] *Seja K um subconjunto de $\mathbb{R}^k$. Com a métrica usual, K é compacto se e só se K for fechado e limitado.*

Proposição 4.10 *Seja K um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$. Com a métrica usual, se K for compacto, então K tem máximo e mínimo.*

Observação 4.11 Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão finita. Restringindo o domínio do produto escalar $\mathbb{C}\times V \to V$ a $\mathbb{R}\times V$, obtemos um espaço vetorial real. É fácil mostrar que, se $(w_1, \ldots, w_l)$ for uma base de V, como espaço vetorial complexo, então $(w_1, iw_1, \ldots, w_l, iw_l)$ é uma base de V, como espaço vetorial real. Assim $\dim_{\mathbb{R}} V = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$.

Além disso, se $\| \; \|$ for uma norma no espaço complexo V, então $\| \; \|$ também é uma norma no espaço real V.

A partir de agora, seja $(V, \| \; \|)$ um espaço vetorial normado, real ou complexo, de dimensão finita. Em qualquer caso, fixemos uma base $(v_1, \ldots, v_k)$ de V como espaço vetorial real. Então

$$f : \mathbb{R}^k \to V, \quad a = (a_1, \ldots, a_k) \mapsto a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k,$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais reais. Para cada $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$,

$$\|f(a)\| = \|\sum_{j=1}^{k} a_j v_j\| \leq \sum_{j=1}^{k} \|a_j v_j\| = \sum_{j=1}^{k} |a_j| \|v_j\|.$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz (cf. exemplos 1.37),

$$\|f(a)\| \leq \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{k} |a_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{k} \|v_j\|^2\right)} = \mu \|a\|_2, \quad \text{onde} \quad \mu = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \|v_j\|^2} \in \mathbb{R}^+. \tag{4.8}$$

Pela proposição 4.7, a aplicação

$$h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, \quad a \mapsto \|f(a)\|,$$

é contínua relativamente às métricas usuais.

Relativamente à métrica usual,

$$C = \{a \in \mathbb{R}^k : \|a\|_2 = 1\}$$

é fechado ([1]) e limitado. Pela proposição 4.9, C é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^k$. Como h é contínua, $h(C)$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Pela proposição 4.10, $h(C)$ tem um mínimo. Seja $\nu = \min(h(C))$. Seja $a_0 \in C$ tal que $\nu = h(a_0)$. Como $\|a_0\|_2 = 1 \neq 0$, $a_0 \neq 0$. Como f é um isomorfismo linear, $f(a_0) \neq 0$. Portanto, $\nu = h(a_0) = \|f(a_0)\| \in \mathbb{R}^+$.

Seja $a \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Então $\|a\|_2^{-1} a \in C$ e

$$\nu = h(a_0) \leq h(\|a\|_2^{-1} a) = \|f(\|a\|_2^{-1} a)\| = \|\|a\|_2^{-1} f(a)\| = \|a\|_2^{-1} \|f(a)\|.$$

[1]Porque C é a imagem inversa do fechado $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ pela aplicação contínua $\| \; \|_2$.

Donde

$$\nu\|a\|_2 \leq \|f(a)\|. \tag{4.9}$$

Note-se que a desigualdade (4.9) também é verdadeira quando $a = 0$.

Como f é bijetiva, de (4.8) e (4.9), deduzimos o lema seguinte.

Lema 4.12 *Com a notação anterior, existem $\mu, \nu \in \mathbb{R}^+$ tais que, qualquer que seja $v \in V$,*

$$\|v\| \leq \mu\|f^{-1}(v)\|_2, \quad \nu\|f^{-1}(v)\|_2 \leq \|v\|.$$

Exercício 4.13 Com a notação anterior, mostre que:

1. A aplicação $f : (\mathbb{R}^k, \| \|_2) \to (V, \| \|)$ é um homeomorfismo.
2. Um subconjunto Y de V é compacto se e só se Y é fechado e limitado.
3. O conjunto $\{v \in V : \|v\| = 1\}$ é compacto.

Proposição 4.14 *Seja V um espaço vetorial, real ou complexo, de dimensão finita. Quaisquer duas normas definidas em V são equivalentes.*

Demonstração. Se $V = \{0\}$, o resultado é trivial, pois existe uma única norma definida em V. Suponhamos que $V \neq \{0\}$. Sejam $\| \|$, $\| \|'$ normas definidas em V. Pelo lema 4.12, existem $\mu, \nu \in \mathbb{R}^+$ tais que, qualquer que seja $v \in V$,

$$\|v\| \leq \mu\|f^{-1}(v)\|_2, \quad \nu\|f^{-1}(v)\|_2 \leq \|v\|;$$

e existem $\mu', \nu' \in \mathbb{R}^+$ tais que, qualquer que seja $v \in V$,

$$\|v\|' \leq \mu'\|f^{-1}(v)\|_2, \quad \nu'\|f^{-1}(v)\|_2 \leq \|v\|'.$$

Donde, qualquer que seja $v \in V$,

$$\|v\| \leq \mu\|f^{-1}(v)\|_2 \leq (\mu/\nu')\|v\|', \quad \|v\|' \leq \mu'\|f^{-1}(v)\|_2 \leq (\mu'/\nu)\|v\|,$$

o que mostra que $\| \|$ e $\| \|'$ são equivalentes. ∎

Lema 4.15 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com dimensão $k \in \mathbb{N}$. Seja $\{v_1, \ldots, v_k\}$ uma base de V. Considere-se a norma*

$$\| \|_2 : V \to \mathbb{F}, \quad a_1v_1 + \cdots + a_kv_k \mapsto \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |a_j|^2},$$

onde $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{F}$ ([2]). O espaço normado $(V, \| \|_2)$ é completo.

[2] É a norma associada ao produto interno referido no exemplo 1.30.

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy de elementos de V. Para cada $n \in \mathbb{N}$, suponhamos que $x_n = a_{n,1}v_1 + \cdots + a_{n,k}v_k$, onde $a_{n,1}, \ldots, a_{n,k} \in \mathbb{F}$.

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, quaisquer que sejam $m \geq n \geq p$,

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{k} |a_{m,j} - a_{n,j}|^2} = \|x_m - x_n\|_2 < \delta.$$

Seja $j \in \{1, \ldots, k\}$. Então, quaisquer que sejam $m \geq n \geq p$,

$$|a_{m,j} - a_{n,j}| \leq \|x_m - x_n\|_2 < \delta.$$

Assim $(a_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy de elementos de $\mathbb{F}$. Como $\mathbb{F}$ é completo, $(a_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um limite $a_j \in \mathbb{F}$.

Seja $x = a_1v_1 + \cdots + a_kv_k \in V$. Vejamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, como $(a_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a_j, existe $q_j \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq q_j$,

$$|a_{n,j} - a_j| < \delta/\sqrt{k}.$$

Seja $q = \max\{q_1, \ldots, q_k\}$. Então, qualquer que seja $n \geq q$,

$$\|x_n - x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |a_{n,j} - a_j|^2} < \sqrt{k(\delta/\sqrt{k})^2} = \delta.$$

Logo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x. Logo $(V, \| \, \|_2)$ é completo. ∎

Lema 4.16 *Seja V um espaço vetorial real ou complexo. Sejam $\| \, \|$ e $\| \, \|'$ normas equivalentes em V. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um sucessão de elementos de V e $x \in V$. Então:*

(a) *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x em $(V, \| \, \|)$ se e só se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergir para x em $(V, \| \, \|')$.*

(b) *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy em $(V, \| \, \|)$ se e só se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sucessão de Cauchy em $(V, \| \, \|')$.*

(c) *$(V, \| \, \|)$ é completo se e só se $(V, \| \, \|')$ for completo.*

Demonstração. Exercício. ∎

Proposição 4.17 *Qualquer espaço vetorial normado $(V, \| \, \|)$ com dimensão finita é completo.*

Demonstração. Se $V = \{0\}$, o resultado é trivial. Suponhamos que $V \neq \{0\}$. Pelo lema 4.15, $(V, \| \, \|_2)$ é completo. Pelo proposição 4.14, as normas $\| \, \|$ e $\| \, \|_2$ são equivalentes. Pelo lema 4.16, $(V, \| \, \|)$ é completo. ∎

Corolário 4.18 *Seja $(V, \| \|)$ um espaço vetorial normado, real ou complexo. Se U for um subespaço vetorial de V com dimensão finita, então U é um subconjunto fechado de V.*

Demonstração. Pelo teorema 4.17, $(U, \| \|_{|U})$ é completo. Pela proposição 2.67, U é um subconjunto fechado de V. ■

Proposição 4.19 *Seja $f : V \to U$ uma aplicação linear, onde $(V, \| \|)$ e $(U, \| \|')$ são espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{F}$. Se V tiver dimensão finita, então f é contínua.*

Demonstração. O caso $V = \{0\}$ é trivial. Suponhamos que V tem dimensão $k \in \mathbb{N}$. Seja $(v_1, \ldots, v_k)$ uma base de V. É fácil mostrar que a aplicação

$$\| \|_1 : V \to \mathbb{R}, \quad x = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k \mapsto |a_1| + \cdots + |a_k|,$$

onde $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{F}$, é uma norma em V. Pela proposição 4.14, $\| \|_1$ e $\| \|$ são equivalentes. Seja $\mu \in \mathbb{R}^+$ tal que, qualquer que seja $x \in V$, $\|x\|_1 \leq \mu \|x\|$. Seja

$$M = \max_{j \in \{1,\ldots,k\}} \|f(v_j)\|' + 1 \in \mathbb{R}^+.$$

Então, qualquer que seja $x = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k \in V$, onde $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{F}$,

$$\begin{aligned}
\|f(x)\|' &= \|f(\sum_{j=1}^{k} a_j v_j)\|' = \|\sum_{j=1}^{k} a_j f(v_j)\|' \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} |a_j| \|f(v_j)\|' \leq \sum_{j=1}^{k} |a_j| M = \|x\|_1 M \leq \mu M \|x\|.
\end{aligned}$$

Pela proposição 4.3, f é contínua. ■

4.3 Espaços de Banach

Definição 4.20 Chamamos espaço de Banach a qualquer espaço vetorial normado, real ou complexo, completo.

Já vimos que todos os espaços vetoriais normados de dimensão finita são completos e, portanto, são espaços de Banach.

Exemplo 4.21 Seja X um conjunto não vazio. Seja $B(X)$ o espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ formado por todas as aplicações limitadas $f : X \to \mathbb{F}$ (cf. exemplo 1.50). Neste exemplo, veremos que $(B(X), \| \|_\infty)$ é de Banach. Assim, em particular, $(\ell^\infty, \| \|_\infty)$ é de Banach.

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy de elementos de $B(X)$. Para cada $\delta \in \mathbb{R}^+$, existe $p_\delta \in \mathbb{N}$ tal que, quaisquer que sejam $m \geq n \geq p_\delta$,

$$\sup_{x\in X} |f_m(x) - f_n(x)| = \|f_m - f_n\|_\infty < \delta. \tag{4.10}$$

Seja $x \in X$. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Por (4.10), quaisquer que sejam $m \geq n \geq p_\delta$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \delta.$$

Portanto $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy de elementos de $\mathbb{F}$. Como $\mathbb{F}$ é completo, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um limite $f(x) \in \mathbb{F}$. Assim, qualquer que seja $\delta \in \mathbb{R}^+$, existe $q_{x,\delta} \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq q_{x,\delta}$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \delta.$$

Consideremos a aplicação $f : X \to \mathbb{F}$, que a cada $x \in X$ faz corresponder $f(x)$. Vejamos que $f \in B(X)$. Seja $x \in X$. Seja $r = \max\{p_1, q_{x,1}\}$. Então

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_r(x)| + |f_r(x) - f_{p_1}(x)| + |f_{p_1}(x)| < 1 + 1 + \|f_{p_1}\|_\infty.$$

Portanto $\{f(x) : x \in X\}$ é um conjunto limitado, ou seja, $f \in B(X)$.

Vejamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Seja $x \in X$. Seja $s = \max\{p_{\delta/4}, q_{x,\delta/4}\}$. Então, qualquer que seja $n \geq p_{\delta/4}$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_s(x)| + |f_s(x) - f(x)| < \delta/4 + \delta/4 = \delta/2.$$

Donde, qualquer que seja $n \geq p_{\delta/4}$,

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \delta/2 < \delta.$$

Logo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f.

Logo $(B(X), \|\ \|_\infty)$ é completo, ou seja, é um espaço de Banach.

Exemplo 4.22 Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Neste exemplo, veremos que $C[a, b]$ é um subespaço fechado de $(B[a, b], \|\ \|_\infty)$. Consequentemente, tendo em conta a proposição 2.68 e o exemplo anterior, deduzimos que o espaço $(C[a, b], \|\ \|_\infty)$ é de Banach.

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de $C[a, b]$ que converge para um limite $f \in B[a, b]$. Para cada $\delta \in \mathbb{R}^+$, existe $p_\delta \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq p_\delta$,

$$\sup_{t\in[a,b]} |f_n(t) - f(t)| = \|f_n - f\|_\infty < \delta.$$

Vejamos que f é contínua. Seja $t_0 \in [a, b]$. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Seja $n = p_{\delta/3}$. Como f_n é contínua, existe $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que, qualquer que seja $t \in [a, b]$, se $|t - t_0| < \epsilon$, então

$$|f_n(t) - f_n(t_0)| < \delta/3.$$

Seja $t \in [a,b]$ tal que $|t - t_0| < \epsilon$. Então

$$|f(t) - f(t_0)| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - f_n(t_0)| + |f_n(t_0) - f(t_0)| < \delta.$$

Logo f é contínua em t_0. Logo $f \in C[a,b]$. Pela proposição 2.41, $C[a,b]$ é um subconjunto fechado de $B[a,b]$.

Exemplo 4.23 O conjunto ℓ^0, de todas as sucessões $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{F}$ tais que $\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\}$ é finito, é um subespaço vetorial de ℓ^∞. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$\mathbf{x}_n = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots) \in \ell^0.$$

Seja

$$\mathbf{x} = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots) \in \ell^\infty \setminus \ell^0.$$

Claramente

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_\infty = \|(0, \dots, 0, \frac{-1}{n+1}, \frac{-1}{n+2}, \dots)\|_\infty = \frac{1}{n+1} \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Logo $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\mathbf{x}$, relativamente à norma $\| \ \|_\infty$. Como $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de elementos de ℓ^0 que converge para um limite que pertence a $\ell^\infty \setminus \ell^0$, ℓ^0 não é fechado em ℓ^∞. Pela proposição 2.67, $(\ell^0, \| \ \|_\infty)$ não é completo, ou seja, não é um espaço de Banach.

Exemplo 4.24 Os espaços $(\ell^2, \| \ \|_2)$ e $(\ell^1, \| \ \|_1)$ são de Banach. A seguir, prova-se que $(\ell^2, \| \ \|_2)$ é de Banach. O leitor poderá, como exercício, adaptar o argumento de modo a provar que $(\ell^1, \| \ \|_1)$ é de Banach.

Seja $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy de elementos de ℓ^2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, suponhamos que $\mathbf{x}_n = (a_{n,1}, a_{n,2}, \dots)$. Como $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy, para cada $\delta \in \mathbb{R}^+$, existe $p_\delta \in \mathbb{N}$ tal que, quaisquer que sejam $m \geq n \geq p_\delta$,

$$\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_{m,k} - a_{n,k}|^2} = \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n\|_2 < \delta. \tag{4.11}$$

Seja $k \in \mathbb{N}$. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. De (4.11) resulta que, quaisquer que sejam $m \geq n \geq p_\delta$,

$$|a_{m,k} - a_{n,k}| < \delta.$$

Portanto $(a_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy de elementos de $\mathbb{F}$. Como $\mathbb{F}$ é completo, $(a_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um limite $a_k \in \mathbb{F}$. Assim, qualquer que seja $\delta \in \mathbb{R}^+$, existe $q_{k,\delta} \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq q_{k,\delta}$,

$$|a_{n,k} - a_k| < \delta.$$

Vejamos que $\mathbf{x} = (a_1, a_2, \dots) \in \ell^2$. Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, sejam

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{n,k} &= (a_{n,1}, \dots, a_{n,k}) \in \mathbb{F}^k\\ \mathbf{y}_k &= (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{F}^k.\end{aligned}$$

Seja

$$r = \max\{p_1, q_{1,1/\sqrt{k}}, \dots, q_{k,1/\sqrt{k}}\}.$$

Então

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y}_k\|_2 &\leq \|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{r,k}\|_2 + \|\mathbf{y}_{r,k} - \mathbf{y}_{p_1,k}\|_2 + \|\mathbf{y}_{p_1,k}\|_2\\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |a_j - a_{r,j}|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |a_{r,j} - a_{p_1,j}|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |a_{p_1,j}|^2}\\ &< \sqrt{k\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2} + \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_{r,k} - a_{p_1,k}|^2} + \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_{p_1,k}|^2}\\ &= 1 + \|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_{p_1}\|_2 + \|\mathbf{x}_{p_1}\|_2 < 2 + \|\mathbf{x}_{p_1}\|_2.\end{aligned}$$

Assim a sucessão $(\|\mathbf{y}_k\|_2^2)_{k\in\mathbb{N}}$ é crescente e limitada superiormente por $(2 + \|\mathbf{x}_{p_1}\|_2)^2$. Portanto $(\|\mathbf{y}_k\|_2^2)_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente e

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|^2 = \lim_{k\to\infty} \|\mathbf{y}_k\|_2^2 \leq (2 + \|\mathbf{x}_{p_1}\|_2)^2.$$

Donde $\mathbf{x} \in \ell^2$.

Vejamos que $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\mathbf{x}$. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Seja $k \in \mathbb{N}$. Seja

$$s = \max\{p_{\delta/4}, q_{1,\delta/(2\sqrt{k})}, \dots, q_{k,\delta/(2\sqrt{k})}\}.$$

Qualquer que seja $n \geq p_{\delta/4}$,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y}_{n,k} - \mathbf{y}_k\|_2 &\leq \|\mathbf{y}_{n,k} - \mathbf{y}_{s,k}\|_2 + \|\mathbf{y}_{s,k} - \mathbf{y}_k\|_2\\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |a_{n,j} - a_{s,j}|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{k} |a_{s,j} - a_j|^2}\\ &< \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_{n,k} - a_{s,k}|^2} + \sqrt{k\left(\frac{\delta}{2\sqrt{k}}\right)^2}\\ &= \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_s\|_2 + \frac{\delta}{2} < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2}.\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_2 &= \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_{n,k} - a_k|^2} = \sqrt{\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} |a_{n,j} - a_j|^2}\\ &= \sqrt{\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{y}_{n,k} - \mathbf{y}_k\|_2^2} \leq \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} < \delta.\end{aligned}$$

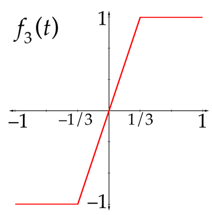
Logo $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\mathbf{x}$.

Logo $(\ell^2, \| \; \|_2)$ é completo, ou seja, é um espaço de Banach.

Exemplo 4.25 Os espaços $(C[-1,1], \| \; \|_2)$ e $(C[-1,1], \| \; \|_1)$ não são de Banach. A seguir, prova-se que $(C[-1,1], \| \; \|_2)$ não é de Banach. O leitor poderá, como exercício, adaptar o argumento para provar que $(C[-1,1], \| \; \|_1)$ também não é de Banach.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n \in C[-1,1]$ a aplicação definida por

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 \le t \le -1/n, \\ nt & \text{se} \quad -1/n \le t \le 1/n, \\ 1 & \text{se} \quad 1/n \le t \le 1. \end{cases}$$



Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Seja $r \in \mathbb{N}$ tal que $2 < r\delta^2$. Quaisquer que sejam $m \ge n \ge r$,

$$\begin{aligned} \|f_m - f_n\|_2^2 &= \int_{-1}^{1} |f_m(t) - f_n(t)|^2 dt = \int_{-1/n}^{1/n} |f_m(t) - f_n(t)|^2 dt \\ &\le \int_{-1/n}^{1/n} 1 dt = \frac{2}{n} \le \frac{2}{r} < \delta^2. \end{aligned}$$

Assim $\|f_m - f_n\|_2 < \delta$. Logo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy de elementos de $C[-1,1]$.

Com vista a uma contradição, suponhamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um limite $f \in C[-1,1]$. Seja $t_0 \in (0,1)$. Vejamos que $f(t_0) = 1$. Suponhamos que $f(t_0) \ne 1$. Seja

$$\delta = |1 - f(t_0)| > 0.$$

Seja $q \in \mathbb{N}$ tal que $1/q < t_0$. Como f é contínua e $t_0 \in (1/q, 1)$, existe $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \subseteq [1/q, 1]$$

e, qualquer que seja $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$,

$$|f(t) - f(t_0)| < \delta/2.$$

Donde, qualquer que seja $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$,

$$|1 - f(t)| \ge \big|\, |1 - f(t_0)| - |f(t_0) - f(t)| \,\big| > \delta/2.$$

Quaisquer que sejam $n \ge q$ e $t \in [1/q, 1]$, $f_n(t) = 1$. Assim, para $n \ge q$,

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_2^2 &= \int_{-1}^{1} |f_n(t) - f(t)|^2 dt \\ &\ge \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} |f_n(t) - f(t)|^2 dt = \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} |1 - f(t)|^2 dt \\ &\ge \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \frac{\delta^2}{4} dt = \frac{\epsilon\delta^2}{2}. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq p$,

$$\|f_n - f\|_2^2 < \frac{\epsilon\delta^2}{2},$$

o que é impossível. Portanto $f(t_0) = 1$.

Com um argumento análogo, mostra-se que, qualquer que seja $t_0 \in (-1, 0)$, $f(t_0) = -1$. Consequentemente, f não é contínua em 0, o que é uma contradição. Logo a sucessão de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente em $(C[-1, 1], \| \|_2)$. Logo $(C[-1, 1], \| \|_2)$ não é de Banach.

4.4 Subespaços fechados de um espaço normado

Vimos que todos os subespaços de dimensão finita de um espaço vetorial normado são fechados. Vimos também que ℓ^0 não é um subespaço fechado em ℓ^∞.

Seja $(V, \| \|)$ um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{F}$. Seja $X \subseteq V$. Sabemos, da Álgebra Linear do primeiro ano, que a intersecção de uma família não vazia de subespaços de V é um subespaço de V. Este facto permite definir o subespaço gerado por X como sendo a intersecção de todos os subespaços de V que contêm X. Assim o subespaço de V gerado por X é o menor subespaço de V que contém X.

Se $X \neq \emptyset$, chamamos combinação linear de elementos de X a qualquer vetor da forma $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k$, onde $k \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{F}$, $x_1, \ldots, x_k \in X$. Se $X \neq \emptyset$, representamos por $\operatorname{span} X$ o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de X. Se $X = \emptyset$, seja $\operatorname{span} X = \{0\}$. É fácil mostrar que $\operatorname{span} X$ é um subespaço vetorial de V, contém X e está contido em qualquer subespaço de V que contém X. Logo $\operatorname{span} X$ é o subespaço vetorial de V gerado por X.

Seja agora $(U_i)_{i\in I}$ uma família não vazia de subespaços fechados de V. Então $\bigcap_{i\in I} U_i$ é um subespaço vetorial de V e é um subconjunto fechado de V. Chamamos *subespaço fechado de V gerado por X* à intersecção de todos os subespaços fechados de V que contêm X. Assim o subespaço fechado de V gerado por X é o menor subespaço fechado que contém X.

Proposição 4.26 *Se U for um subespaço vetorial de um espaço vetorial normado V, então $\overline{U}$ é um subespaço vetorial fechado de V.*

Demonstração. Sabemos que $\emptyset \neq U \subseteq \overline{U}$. Sejam $x, y \in \overline{U}$. Pela proposição 2.47, existem sucessões $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de U que convergem para x e y, respetivamente. Como U é um subespaço vetorial de V, $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de elementos de U. Não é difícil mostrar que $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $x + y$. Pela proposição 2.47, $x + y \in \overline{U}$. Com um argumento análogo, mostra-se que, se $a \in \mathbb{F}$ e $x \in \overline{U}$, então $ax \in \overline{U}$. Logo $\overline{U}$ é um subespaço vetorial de V.

Também já sabemos que $\overline{U}$ é um subconjunto fechado de V. ■

Proposição 4.27 *Seja V um espaço vetorial normado. Se $X \subseteq V$, então $\overline{\operatorname{span} X}$ é o subespaço vetorial fechado de V gerado por X.*

Demonstração. Pela proposição anterior, $\overline{\operatorname{span} X}$ é um subespaço fechado de V. Além disso, $X \subseteq \operatorname{span} X \subseteq \overline{\operatorname{span} X}$. Seja agora U um subespaço fechado de V que contém X. Como $\operatorname{span} X$ é o subespaço de V gerado por X, $\operatorname{span} X \subseteq U$. Como U é fechado, $\overline{\operatorname{span} X} \subseteq U$. Logo $\overline{\operatorname{span} X}$ é o menor subespaço fechado de V que contém X, isto é, $\overline{\operatorname{span} X}$ é o subespaço fechado de V gerado por X. ■

Lema 4.28 *Sejam (M, d) um espaço métrico, $x \in M$ e $W \subseteq M$. Então $d(x, W) = 0$ se e só se $x \in \overline{W}$.*

Lema 4.29 [Riesz] *Seja V um espaço vetorial normado. Seja W um subespaço fechado de V diferente de V.*

Para cada número real $\alpha \in (0, 1)$, existe $x_\alpha \in V$ tal que $\|x_\alpha\| = 1$ e, qualquer que seja $y \in W$, $\|x_\alpha - y\| > \alpha$.

Demonstração. Seja $x \in V \setminus W$. Pelo lema anterior, como $x \notin W = \overline{W}$,

$$d(x, W) = \inf_{w \in W} \|x - w\| > 0.$$

Seja $\delta = d(x, W)$. Seja $\alpha \in (0, 1)$. Como $\delta < \delta\alpha^{-1}$, existe $w \in W$ tal que

$$\delta \leq \|x - w\| < \delta\alpha^{-1}.$$

Seja

$$x_\alpha = \frac{1}{\|x - w\|}(x - w).$$

Claramente $\|x_\alpha\| = 1$. Qualquer que seja $y \in W$, $w + \|x - w\|y \in W$ e

$$\begin{aligned} \|x_\alpha - y\| &= \|\frac{1}{\|x - w\|}(x - w) - y\| = \frac{1}{\|x - w\|}\|x - (w + \|x - w\|y)\| \\ &\geq \frac{1}{\|x - w\|}\delta > \frac{\delta}{\delta\alpha^{-1}} = \alpha. \end{aligned}$$

■

Exemplo 4.30 Seja V um espaço vetorial normado que não é finitamente gerado. O subconjunto

$$C = \{x \in V : \|x\| = 1\}$$

de V é fechado e limitado. Vejamos que C não é compacto.

Recursivamente, escolhemos uma sucessão $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de C tal que, quaisquer que sejam $n, m \in \mathbb{N}$, com $n > m$, $\|x_n - x_m\| > 1/2$ do seguinte modo. Seja $x \in V \setminus \{0\}$ e seja $x_1 = \|x\|^{-1}x \in C$. Suponhamos que $n \geq 2$ e que já escolhemos $x_1, \ldots, x_{n-1}$. O subespaço $W_n = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ é finitamente gerado. Pelo corolário 4.18, W_n é fechado. Pelo lema 4.29, existe $x_n \in C$ tal que, qualquer que seja $y \in W_n$, $\|x_n - y\| > 1/2$. Em particular, qualquer que seja $m \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\|x_n - x_m\| > 1/2$.

Claramente a sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não tem uma subsucessão convergente. Logo C não é compacto.

4.5 Espaços de aplicações lineares

Dados 2 espaços vetoriais normados V e U, representaremos por $\mathcal{L}(V, U)$ o conjunto de todas as aplicações lineares contínuas de V para U.

Proposição 4.31 *Sejam V e U espaços vetoriais normados.*

(a) *$\mathcal{L}(V, U)$ é um subespaço vetorial do espaço $\operatorname{Lin}(V, U)$ de todas as aplicações lineares de V para U.*

(b) *A aplicação de $\mathcal{L}(V, U)$ para $\mathbb{R}$, que a cada $f \in \mathcal{L}(V, U)$ faz corresponder*

$$\|f\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|_V=1}} \|f(v)\|_U = \sup_{v\in V\setminus\{0\}} \frac{\|f(v)\|_U}{\|v\|_V}, \tag{4.12}$$

é uma norma em $\mathcal{L}(V, U)$, que chamaremos norma induzida *pelas normas de V e de U.*

Demonstração. Para simplificar a escrita, omitiremos os índices nos símbolos das normas.

(a) A aplicação que a cada $v \in V$ faz corresponder $0 \in U$ é uma aplicação linear contínua e, portanto, $\mathcal{L}(V, U) \neq \emptyset$. Sejam $f, g \in \mathcal{L}(V, U)$. Pela proposição 4.3, existem $\mu, \nu \in \mathbb{R}^+$ tais que, qualquer que seja $v \in V$,

$$\|f(v)\| \leq \mu\|v\| \quad \text{e} \quad \|g(v)\| \leq \nu\|v\|.$$

Então, qualquer que seja $v \in V$,

$$\|(f+g)(v)\| = \|f(v) + g(v)\| \leq \|f(v)\| + \|g(v)\| = (\mu + \nu)\|v\|.$$

Pela proposição 4.3, a aplicação linear $f + g$ é contínua. Analogamente, mostra-se que, se $f \in \mathcal{L}(V, U)$ e $a \in \mathbb{F}$, então $af \in \mathcal{L}(V, U)$. Logo, $\mathcal{L}(V, U)$ é um subespaço vetorial de $\operatorname{Lin}(V, U)$.

(b) Seja $f \in \mathcal{L}(V, U)$. Pela proposição 4.3, existe $\mu \in \mathbb{R}^+$ tal que, qualquer que seja $v \in V$, $\|f(v)\| \leq \mu\|v\|$. Assim existem

$$s = \sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|=1}} \|f(v)\| \in \mathbb{R}_0^+, \qquad t = \sup_{v\in V\setminus\{0\}} \frac{\|f(v)\|}{\|v\|} \in \mathbb{R}_0^+.$$

Qualquer que seja $v \in V \setminus \{0\}$, o vetor $u = \|v\|^{-1}v$ tem norma 1 e

$$\frac{\|f(v)\|}{\|v\|} = \|v\|^{-1}\|f(v)\| = \|\|v\|^{-1}f(v)\| = \|f(\|v\|^{-1}v)\| = \|f(u)\| \leq s.$$

Donde $t \leq s$. Por outro lado, qualquer que seja $v \in V$, com $\|v\| = 1$,

$$\|f(v)\| = \frac{\|f(v)\|}{\|v\|} \leq t.$$

Donde $s \leq t$. Logo $s = t$.

Falta provar que a aplicação de $\mathcal{L}(V, U)$ para $\mathbb{R}$, que a cada $f \in \mathcal{L}(V, U)$ faz corresponder o real não negativo (4.12), é uma norma. Seguidamente, prova-se a desigualdade triangular. O resto da demonstração é exercício.

Sejam $f, g \in \mathcal{L}(V, U)$. Seja $v \in V$, com $\|v\| = 1$. Então

$$\|(f + g)(v)\| = \|f(v) + g(v)\| \leq \|f(v)\| + \|g(v)\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Donde $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. ∎

Proposição 4.32 *Sejam V e U espaços vetoriais normados. Se U for de Banach, então $\mathcal{L}(V, U)$ é de Banach.*

Demonstração. Suponhamos que U é de Banach. Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy de elementos de $\mathcal{L}(V, U)$. Para cada $\delta \in \mathbb{R}^+$, seja $p_\delta \in \mathbb{N}$ tal que, quaisquer que sejam $m, n \in \mathbb{N}$, com $m \geq n \geq p_\delta$,

$$\|f_m - f_n\| < \delta.$$

Seja $v \in V \setminus \{0\}$. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Então, quaisquer que sejam $m \geq n \geq p_{\delta/\|v\|}$,

$$\|f_m(v) - f_n(v)\| = \|(f_m - f_n)(v)\| \leq \|f_m - f_n\|\|v\| < \delta.$$

Portanto $(f_n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy de elementos de U. Como U é completo, $(f_n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um limite $f(v) \in U$. Por outro lado, todos os termos da sucessão $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ são nulos e, portanto, $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para o limite 0, que representaremos por $f(0)$.

Para cada $v \in V$, como $(f_n(v))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f(v)$, qualquer que seja $\delta \in \mathbb{R}^+$, existe $q_{v,\delta} \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq q_{v,\delta}$,

$$\|f_n(v) - f(v)\| < \delta.$$

Vejamos que a aplicação

$$f : V \to U, \quad v \mapsto f(v).$$

é linear. Sejam $v, v' \in V$. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Qualquer que seja $n \geq \max\{q_{v,\delta/2}, q_{v',\delta/2}\}$,

$$\begin{aligned}\|f_n(v+v') - (f(v)+f(v'))\| &= \|f_n(v) + f_n(v') - f(v) - f(v')\| \\ &\leq \|f_n(v) - f(v)\| + \|f_n(v') - f(v')\| \\ &< \delta/2 + \delta/2 = \delta.\end{aligned}$$

Logo $(f_n(v+v'))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f(v) + f(v')$. Mais acima, tinhamos representado o limite de $(f_n(v+v'))_{n\in\mathbb{N}}$ por $f(v+v')$. Assim $f(v+v') = f(v) + f(v')$. Com um argumento análogo, mostra-se que, quaisquer que sejam $a \in \mathbb{F}$ e $v \in V$, $f(av) = af(v)$. Logo f é linear.

Vejamos que f é contínua. Tendo em conta a proposição 4.3, basta mostrar que f é contínua em 0. Qualquer que seja $n \geq p_1$,

$$\|f_n\| \leq \|f_n - f_{p_1}\| + \|f_{p_1}\| < \mu, \quad \text{onde} \quad \mu = 1 + \|f_{p_1}\| \in \mathbb{R}^+.$$

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Seja $v \in V$ tal que

$$\|v - 0\| = \|v\| < \frac{\delta}{2\mu}.$$

Seja $r = \max\{p_1, q_{v,\delta/2}\}$. Então

$$\begin{aligned}\|f(v) - f(0)\| = \|f(v)\| &\leq \|f(v) - f_r(v)\| + \|f_r(v)\| \\ &\leq \|f(v) - f_r(v)\| + \|f_r\|\|v\| < \frac{\delta}{2} + \mu\frac{\delta}{2\mu} = \delta.\end{aligned}$$

Logo f é contínua em 0. Logo f é contínua.

Finalmente, vejamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f. Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Seja $n \geq p_{\delta/4}$. Seja $v \in V$, com $\|v\| = 1$. Seja $s = \max\{p_{\delta/4}, q_{v,\delta/4}\}$. Então

$$\begin{aligned}\|f_n(v) - f(v)\| &\leq \|f_n(v) - f_s(v)\| + \|f_s(v) - f(v)\| \\ &\leq \|f_n - f_s\| + \|f_s(v) - f(v)\| < \delta/2.\end{aligned}$$

Donde

$$\|f_n - f\| = \sup_{\substack{v\in V \\ \|v\|=1}} \|f_n(v) - f(v)\| \leq \delta/2 < \delta.$$

Logo $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para f.

Logo $\mathcal{L}(V, U)$ é completo. ∎

Chamamos *espaço dual* de um espaço vetorial normado V ao espaço vetorial normado $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$, formado pelos funcionais lineares contínuos definidos em V. Como $\mathbb{F}$ é completo, $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ é um espaço de Banach.

Capítulo 5

Espaços de Hilbert

5.1 Definição e exemplos

Definição 5.1 Chamamos espaço de Hilbert a qualquer espaço vetorial, real ou complexo, onde está definido um produto interno, completo relativamente à métrica associada a este produto interno.

Claramente, todos os espaços de Hilbert são espaços de Banach com a norma associada ao produto interno.

Exemplo 5.2 Qualquer espaço vetorial, com produto interno, de dimensão finita, é de Hilbert.

Exemplo 5.3 O espaço ℓ^2, com o produto interno

$$\ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{F}, \quad ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \overline{y_n},$$

(cf. exemplo 1.32) é um espaço de Hilbert. De facto, este produto interno tem associada a norma $\| \|_2$ e já vimos que o espaço normado $(\ell^2, \| \|_2)$ é completo (cf. exemplo 4.24).

Exemplo 5.4 O espaço $C[-1,1]$, com o produto interno

$$C[-1,1] \times C[-1,1] \to \mathbb{F}, \quad (f,g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt,$$

(cf. exemplo 1.33) não é um espaço de Hilbert. De facto, este produto interno tem associada a norma $\| \|_2$ e já vimos que o espaço normado $(C[-1,1], \| \|_2)$ não é completo (cf. exemplo 4.25).

5.2 Ortogonalidade

Definição 5.5 Seja V um espaço vetorial, real ou complexo, onde está definido um produto interno.

Diz-se que dois vetores $x, y \in V$ são *ortogonais* se $\langle x, y\rangle = 0$.

Diz-se que uma família $(x_i)_{i\in I}$ de vetores de V é *ortogonal* se, para quaisquer $i, j \in I$, com $i \neq j$, x_i e x_j forem ortogonais.

Diz-se que uma família ortogonal $(x_i)_{i\in I}$ de vetores de V é *ortonormal* se, para cada $i \in I$, $\|x_i\| = 1$.

A uma família ortonormal $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dá-se o nome de *sucessão ortonormal.*

Exemplo 5.6 Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $e_n \in \ell^2$ a sucessão cujo n-ésimo elemento é igual a 1 e os restantes são nulos. A sucessão $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é ortonormal.

Exemplo 5.7 Considere-se o espaço vetorial real $C[-\pi, \pi]$, das aplicações contínuas $[-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, munido com o produto interno introduzido no exemplo 1.33. Considerem-se as aplicações $f_0, f_n, g_n \in C[-\pi, \pi]$, onde $n \in \mathbb{N}$, definidas do seguinte modo: qualquer que seja $t \in [-\pi, \pi]$,

$$f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nt), \qquad g_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen}(nt).$$

A sucessão $(f_0, f_1, g_1, f_2, g_2, \dots)$ é ortonormal. De facto, quaisquer que sejam $0 \neq n \neq p \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\|f_0\|_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} dt = 1, \\
\|f_n\|_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi}\cos^2(nt)dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2nt)}{4n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 1, \\
\|g_n\|_2^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}^2(nt)dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2nt)}{4n})\right]_{-\pi}^{\pi} = 1, \\
\langle f_0, f_n\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos(nt)dt = \left[\frac{\operatorname{sen}(nt)}{\sqrt{2\pi}n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \\
\langle f_n, f_p\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi}\cos(nt)\cos(pt)dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}((n-p)t)}{2(n-p)} + \frac{\operatorname{sen}((n+p)t)}{2(n+p)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \\
\langle g_n, g_p\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi}\operatorname{sen}(nt)\operatorname{sen}(pt)dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen}((n-p)t)}{2(n-p)} - \frac{\operatorname{sen}((n+p)t)}{2(n+p)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \\
\langle f_0, g_n\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\operatorname{sen}(nt)dt = \left[-\frac{\cos(nt)}{\sqrt{2\pi}n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \\
\langle f_n, g_n\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi}\cos(nt)\operatorname{sen}(nt)dt = \left[-\frac{\cos^2(nt)}{2\pi n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \\
\langle f_n, g_p\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi}\cos(nt)\operatorname{sen}(pt)dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos((n-p)t)}{2(n-p)} - \frac{\cos((n+p)t)}{2(n+p)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Proposição 5.8 [Teorema de Pitágoras] *Seja $(x_1, \ldots, x_k)$ uma família ortogonal de vetores de um espaço vetorial V com produto interno. Então*

$$\|x_1 + \cdots + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_k\|^2.$$

Demonstração. $\|x_1 + \cdots + x_k\|^2 = \langle x_1 + \cdots + x_k, x_1 + \cdots + x_k\rangle = \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \langle x_j, x_l\rangle = \sum_{j=1}^k \langle x_j, x_j\rangle = \sum_{j=1}^k \|x_j\|^2$. ■

Proposição 5.9 *Seja $(x_1, \ldots, x_k)$ uma família ortogonal de vetores não nulos de um espaço vetorial V com produto interno. Então $(x_1, \ldots, x_k)$ é linearmente independente.*

Demonstração. Suponhamos que $c_1x_1 + \cdots + c_kx_k = 0$, onde $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{F}$. Seja $i \in \{1, \ldots, k\}$. Então

$$0 = \langle 0, x_i\rangle = \langle \sum_{j=1}^k c_jx_j, x_i\rangle = \sum_{j=1}^k c_j\langle x_j, x_i\rangle = c_i\langle x_i, x_i\rangle,$$

o que implica que $c_i = 0$. ■

Proposição 5.10 *Seja $(x_1, \ldots, x_k)$ uma família ortonormal de vetores de um espaço vetorial V com produto interno. Se $x \in V$ for combinação linear de $x_1, \ldots, x_k$, então*

$$x = \sum_{j=1}^k \langle x, x_j\rangle x_j, \tag{5.1}$$

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^k |\langle x, x_j\rangle|^2. \tag{5.2}$$

Demonstração. Suponhamos que $x = c_1x_1 + \cdots + c_kx_k$, onde $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{F}$. Então, qualquer que seja $j \in \{1, \ldots, k\}$,

$$\langle x, x_j\rangle = \langle \sum_{l=1}^k c_lx_l, x_j\rangle = \sum_{l=1}^k c_l\langle x_l, x_j\rangle = c_j\langle x_j, x_j\rangle = c_j.$$

Donde resulta (5.1). Aplicando o teorema de Pitágoras,

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^k \|c_jx_j\|^2 = \sum_{j=1}^k \|\langle x, x_j\rangle x_j\|^2 = \sum_{j=1}^k |\langle x, x_j\rangle|^2\|x_j\|^2 = \sum_{j=1}^k |\langle x, x_j\rangle|^2.$$

■

Observação 5.11 Seja V um espaço vetorial com produto interno e dimensão finita k. Seja $(x_1, \ldots, x_k)$ é uma família ortogonal de vetores não nulos de V. Então $(x_1, \ldots, x_k)$ é linearmente independente. Sabemos, da

Álgebra Linear do primeiro ano, que qualquer família linearmente independente com k vetores é uma base de V. Assim, qualquer que seja $x \in V$, as igualdades (5.1) e (5.2) são satisfeitas.

Recorde-se que uma base ortonormal de V é uma base $(u_1, \ldots, u_k)$ de V que é uma família ortonormal. Seja $(v_1, \ldots, v_k)$ uma base de V. Sabemos, da Álgebra Linear do primeiro ano, que é possível obter uma base $(w_1, \ldots, w_k)$ de V, formada por vetores ortogonais, utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_i &= v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle v_i, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j, \qquad i \in \{2, \ldots, k\}. \end{aligned}$$

Dividindo cada um dos vetores da base $(w_1, \ldots, w_k)$ pela sua norma, obtemos uma base ortonormal de V.

5.3 Séries de Fourier

Definição 5.12 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ onde está definido um produto interno. Uma *série* de elementos de V é um par de sucessões de elementos de V, $((y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_N)_{N\in\mathbb{N}})$, onde

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} y_n, \qquad N \in \mathbb{N}.$$

Diz-se que $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ é a sucessão das somas parciais da série. Usualmente, a série anterior representa-se por

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n \qquad \text{ou por} \qquad \sum y_n.$$

Diz-se que uma série $\sum y_n$ é *convergente* se a sucessão das suas somas parciais for convergente. Neste caso, o limite da sucessão das somas parciais chama-se *soma da série* e também se representa por

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n.$$

Definição 5.13 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ onde está definido um produto interno. Chama-se *série de Fourier* de um vetor $x \in V$, relativamente a uma sucessão ortonormal de vetores $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, x_n \rangle x_n.$$

Nesta secção, estudaremos a convergência das séries de Fourier.

Proposição 5.14 [Desigualdade de Bessel] *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão ortonormal de vetores de V. Qualquer que seja $x \in V$, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, x_n\rangle|^2$ converge e*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2. \tag{5.3}$$

Demonstração. Seja $x \in V$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a soma parcial da série de Fourier

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \langle x, x_n\rangle x_n.$$

Pela proposição 5.10,

$$\|S_N\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle x, x_n\rangle|^2.$$

Além disso,

$$\|S_N - x\|^2 = \langle S_N - x, S_N - x\rangle = \|S_N\|^2 - \langle S_N, x\rangle - \langle x, S_N\rangle + \|x\|^2,$$

$$\langle S_N, x\rangle = \langle \sum_{n=1}^{N} \langle x, x_n\rangle x_n, x\rangle = \sum_{n=1}^{N} \langle x, x_n\rangle \langle x_n, x\rangle = \sum_{n=1}^{N} |\langle x, x_n\rangle|^2 = \|S_N\|^2.$$

Assim $\langle x, S_N\rangle = \overline{\langle S_N, x\rangle} = \|S_N\|^2$. Donde $\|S_N - x\|^2 = -\|S_N\|^2 + \|x\|^2$. Donde

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle x, x_n\rangle|^2 = \|S_N\|^2 = \|x\|^2 - \|S_N - x\|^2 \leq \|x\|^2.$$

A sucessão de números reais $(\sum_{n=1}^{N} |\langle x, x_n\rangle|^2)_{N\in\mathbb{N}}$ é crescente e limitada superiormente por $\|x\|^2$. Assim esta sucessão converge e o seu limite não excede $\|x\|^2$, isto é, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, x_n\rangle|^2$ converge e a desigualdade (5.3) é satisfeita. ■

Lema 5.15 *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Para cada $y \in V$, a aplicação*

$$f_y : V \to \mathbb{F}, \quad x \mapsto \langle x, y\rangle, \tag{5.4}$$

é contínua.

Demonstração. Tendo em conta a definição de produto interno, a aplicação f_y é linear. Qualquer que seja $x \in V$,

$$|f_y(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Pela proposição 4.3, f_y é contínua. ■

Proposição 5.16 *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão ortonormal de vetores de V. Seja $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de $\mathbb{F}$. Se a série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda_n x_n$ for convergente e*

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n x_n,$$

então, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = \langle x, x_n\rangle$.

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}$. Consideremos a aplicação contínua $f_{x_n} : V \to \mathbb{F}$, $x \to \langle x, x_n\rangle$. Seja $N \in \mathbb{N}$. Seja $S_N = \sum_{k=1}^N \lambda_k x_k$. Então

$$f_{x_n}(S_N) = \langle S_N, x_n\rangle = \sum_{k=1}^N \lambda_k\langle x_k, x_n\rangle = \begin{cases} \lambda_n, & \text{se } N \geq n, \\ 0, & \text{se } N < n. \end{cases}$$

Assim

$$\lambda_n = \lim_{N\to\infty} f_{x_n}(S_N) = f_{x_n}(\lim_{N\to\infty} S_N) = f_{x_n}(x) = \langle x, x_n\rangle.$$

(A segunda igualdade resulta da continuidade de f_{x_n}.) Logo $\lambda_n = \langle x, x_n\rangle$. ∎

Proposição 5.17 *Sejam V um espaço de Hilbert e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão ortonormal de vetores de V. Seja $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de $\mathbb{F}$. A série*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n x_n \tag{5.5}$$

é convergente se e só se $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$.

Demonstração. Suponhamos que (5.5) converge e seja

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n x_n.$$

Seja $n \in \mathbb{N}$. Pela proposição 5.16, $\lambda_n = \langle x, x_n\rangle$. Pela proposição 5.14, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^2$ é convergente, isto é, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$.

Reciprocamente, suponhamos que $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. Para cada $N \in \mathbb{N}$, seja

$$S_N = \sum_{n=1}^N \lambda_n x_n.$$

Vejamos que a sucessão $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy.

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Como $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, a sucessão $(\sum_{n=1}^N |\lambda_n|^2)_{N\in\mathbb{N}}$ é convergente. Portanto, é de Cauchy e existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, quaisquer que sejam $M \geq N \geq p$,

$$\sum_{n=1}^M |\lambda_n|^2 - \sum_{n=1}^N |\lambda_n|^2 < \delta^2.$$

Donde

$$\sum_{n=N+1}^{M} \|\lambda_n x_n\|^2 = \sum_{n=N+1}^{M} |\lambda_n|^2 \|x_n\|^2 = \sum_{n=N+1}^{M} |\lambda_n|^2 < \delta^2.$$

Utilizando o teorema de Pitágoras,

$$\|S_M - S_N\|^2 = \| \sum_{n=N+1}^{M} \lambda_n x_n\|^2 = \sum_{n=N+1}^{M} \|\lambda_n x_n\|^2 < \delta^2.$$

Donde $\|S_M - S_N\| < \delta$. Logo $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Como V é completo, $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ é convergente, isto é, a série (5.5) converge. ∎

Corolário 5.18 *Sejam V um espaço de Hilbert e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão ortonormal de vetores de V. Qualquer que seja $x \in V$, a série de Fourier*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, x_n\rangle x_n \tag{5.6}$$

é convergente.

Demonstração. Pela proposição 5.14, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, x_n\rangle|^2$ converge. Pela proposição 5.17, a série de Fourier (5.6) converge. ∎

Definição 5.19 Seja V um espaço de Hilbert. Diz-se que uma sucessão ortonormal $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma *base ortonormal* de V se não existir $x \in V \setminus \{0\}$ ortogonal a todos os vetores x_n.

Exemplo 5.20 Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $e_n \in \ell^2$ a sucessão cujo n-ésimo elemento é igual a 1 e os restantes são nulos. A sucessão $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base ortonormal de ℓ^2.

Proposição 5.21 *Sejam V um espaço de Hilbert e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base ortonormal de V. Qualquer que seja $x \in V$,*

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, x_n\rangle x_n, \tag{5.7}$$

$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, x_n\rangle|^2. \tag{5.8}$$

Demonstração. Seja $x \in V$. Já vimos que as séries em (5.7) e (5.8) são convergentes (cf. corolário 5.18 e proposição 5.14). Seja

$$y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, x_n\rangle x_n.$$

Seja $n \in \mathbb{N}$. Pela proposição 5.16, $\langle x, x_n \rangle = \langle y, x_n \rangle$. Assim

$$\langle x - y, x_n \rangle = \langle x, x_n \rangle - \langle y, x_n \rangle = 0.$$

Pela definição de base ortonormal, $x - y = 0$ e $x = y$, o que prova (5.7).

Seja $N \in \mathbb{N}$. Seja

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \langle x, x_n \rangle x_n.$$

Consideremos a aplicação contínua $f_x : V \to \mathbb{F}$, $y \mapsto \langle y, x \rangle$. Então

$$f_x(S_N) = \langle S_N, x \rangle = \sum_{n=1}^{N} \langle x, x_n \rangle \langle x_n, x \rangle = \sum_{n=1}^{N} |\langle x, x_n \rangle|^2.$$

Como f_x é contínua,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \langle x, x \rangle = f_x(x) = f_x(\lim_{N \to \infty} S_N) = \lim_{N \to \infty} f_x(S_N) \\ &= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} |\langle x, x_n \rangle|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, x_n \rangle|^2. \end{aligned}$$

■

Proposição 5.22 *Sejam V um espaço de Hilbert e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão ortonormada de elementos de V. São equivalentes:*

(a) *$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base ortonormal de V.*

(b) $\overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = V$.

(c) *Qualquer que seja $x \in V$, $\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, x_n \rangle|^2$.*

Demonstração. Pela proposição anterior, (a) $\Rightarrow$ (c).

(c) $\Rightarrow$ (a) Seja $x \in V$ tal que $\langle x, x_n \rangle = 0$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, x_n \rangle|^2 = 0$$

Donde $x = 0$. Logo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base ortonormal de V.

(a) $\Rightarrow$ (b) Pela proposição anterior, qualquer que seja $x \in V$,

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, x_n \rangle x_n = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \langle x, x_n \rangle x_n.$$

Assim todo o vetor $x \in V$ é limite de uma sucessão de elementos de $\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Logo (b) é satisfeita.

(b) $\Rightarrow$ (a) Seja $y \in V$ tal que $\langle y, x_n \rangle = 0$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Seja

$$S_y = \{x \in V : \langle x, y \rangle = 0\}.$$

É fácil verificar que S_y é um subespaço de V. Como $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq S_y$,

$$\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq S_y$$

Vejamos que S_y é fechado. Seja $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de S_y que converge para um limite $z \in V$. Consideremos a função contínua $f_y : V \to \mathbb{F}$, $x \mapsto \langle x, y\rangle$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $f_y(z_k) = \langle z_k, y\rangle = 0$. Assim

$$0 = \lim_{k\to\infty} f_y(z_k) = f_y(\lim_{k\to\infty} z_k) = f_y(z) = \langle z, y\rangle.$$

Donde $z \in S_y$. Logo S_y é fechado. Logo

$$\overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} \subseteq S_y.$$

Por (b), $V = S_y$. Donde $y \in S_y$. Donde $\|y\|^2 = \langle y, y\rangle = 0$. Donde $y = 0$. Logo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base ortonormal de V. ■

Definição 5.23 Sejam V e U espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$ onde estão definidos produtos internos. Diz-se que uma aplicação $f : V \to U$ é uma *isometria linear* se f for um isomorfismo linear e, para quaisquer $x, y \in V$,

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle \tag{5.9}$$

Lema 5.24 *Sejam V e U espaços vetoriais sobre $\mathbb{F}$ onde estão definidos produtos internos. Se $f : V \to U$ for uma aplicação linear sobrejetiva tal que, qualquer que seja $x \in V$,*

$$\|f(x)\| = \|x\|, \tag{5.10}$$

então f é uma isometria linear.

Demonstração. Exercício. Para demonstrar (5.9), prove primeiro as seguintes igualdades (chamadas identidades de polarização):

- Se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, então, quaisquer que sejam $x, y \in V$,

$$4\langle x, y\rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2.$$

- Se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, então, quaisquer que sejam $x, y \in V$,

$$4\langle x, y\rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2.$$

Proposição 5.25 *Seja V um espaço de Hilbert. Se V tiver uma base ortonormal $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então existe uma isometria linear $f : V \to \ell^2$.*

Demonstração. Suponhamos que V tem uma base ortonormal de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Seja $x \in V$. Pela proposição 5.21,

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, x_n\rangle x_n.$$

Pela proposição 5.17, $f(x) = (\langle x, x_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$.

Vejamos que a aplicação

$$f : V \to \ell^2, \quad x \mapsto f(x),$$

é uma isometria linear. Sejam $x, y \in V$. Então

$$\begin{aligned} f(x+y) &= (\langle x+y, x_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}} = (\langle x, x_n \rangle + \langle y, x_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (\langle x, x_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}} + (\langle y, x_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}} = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Com um argumento análogo, mostra-se que, quaisquer que sejam $a \in \mathbb{F}$, $x \in V$, $f(ax) = af(x)$. Logo f é uma aplicação linear.

Vejamos que f é sobrejetiva. Seja $\lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. Pela proposição 5.17, a série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n x_n$$

converge para um vetor $x \in V$. Pela proposição 5.16, $\lambda_n = \langle x, x_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Claramente $f(x) = \lambda$.

Seja $x \in V$. Pela proposição 5.21, $\|x\| = \|f(x)\|_2$.

Pelo lema 5.24, f é uma isometria linear. ■

Exercício 5.26 Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com produto interno e dimensão finita k. Mostre que existe uma isometria linear $f : V \to \mathbb{F}^k$, considerando em $\mathbb{F}^k$ o produto interno usual (cf. exemplo 1.29).

5.4 Conjuntos convexos

Definição 5.27 Um subconjunto A de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{F}$ diz-se *convexo* se, quaisquer que sejam $a, b \in A$, o segmento de reta

$$\{\lambda a + (1-\lambda)b : \lambda \in [0, 1]\}$$

estiver contido em A.

Lema 5.28 *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Quaisquer que sejam $a, b, x \in V$,*

$$\|a - b\|^2 = 2\|x - a\|^2 + 2\|x - b\|^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(a + b)\|^2. \tag{5.11}$$

Demonstração. Pela lei do paralelogramo (cf. proposição 1.39),

$$\begin{aligned} 2\|x-a\|^2 + 2\|x-b\|^2 &= \|(x-a)+(x-b)\|^2 + \|(x-a)-(x-b)\|^2 \\ &= 4\|x - \frac{1}{2}(a+b)\|^2 + \|a-b\|^2. \end{aligned}$$

Donde resulta (5.11). ■

Proposição 5.29 *Seja V um espaço de Hilbert. Seja A um subconjunto fechado e convexo de V. Então, qualquer que seja $x \in V$, existe um único $a \in A$ tal que*

$$\|x - a\| = \inf_{b \in A} \|x - b\|.$$

Demonstração. Seja $x \in V$. Seja

$$\nu = \inf_{b \in A} \|x - b\|.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha-se $b_n \in A$ tal que

$$\|x - b_n\| < \nu + \frac{1}{n}. \tag{5.12}$$

Vejamos que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Pelo lema anterior,

$$\|b_m - b_n\|^2 = 2\|x - b_m\|^2 + 2\|x - b_n\|^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(b_m + b_n)\|^2. \tag{5.13}$$

Como A é convexo, $(1/2)(b_m + b_n) \in A$. Portanto

$$\|x - \frac{1}{2}(b_m + b_n)\| \geq \nu. \tag{5.14}$$

Utilizando (5.12), (5.13) e (5.14), deduz-se que

$$\begin{aligned} \|b_m - b_n\|^2 &< 2\left(\nu + \frac{1}{m}\right)^2 + 2\left(\nu + \frac{1}{n}\right)^2 - 4\nu^2 \\ &= \frac{4\nu}{m} + \frac{4\nu}{n} + \frac{2}{m^2} + \frac{2}{n^2}. \end{aligned}$$

Seja $\delta \in \mathbb{R}^+$. Como

$$\lim_{n \to \infty} \frac{8\nu}{n} + \frac{4}{n^2} = 0,$$

existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, qualquer que seja $n \geq p$,

$$\frac{8\nu}{n} + \frac{4}{n^2} < \delta^2.$$

Assim, quaisquer que sejam $m \geq n \geq p$, $\|b_m - b_n\|^2 < \delta^2$, ou seja, $\|b_m - b_n\| < \delta$. Logo $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de Cauchy. Como V é completo, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para um limite $a \in V$. Como A é fechado, $a \in A$. Assim $\nu \leq \|x - a\|$. Utilizando (5.12), qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \|x - a\| - \nu < \|x - a\| - \|x - b_n\| + \frac{1}{n}.$$

Donde, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \|x-a\| - \nu < \|(x-a)-(x-b_n)\| + \frac{1}{n} = \|b_n - a\| + \frac{1}{n}.$$

Como a sucessão $(\|b_n - a\| + 1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 0, $\|x-a\| = \nu$.

Para provar a unicidade, suponhamos que $b \in A$ satisfaz $\|x-b\| = \nu$. Como A é convexo, $(1/2)(a+b) \in A$. Assim

$$\|x - \frac{1}{2}(a+b)\| \geq \nu.$$

Utilizando o lema anterior,

$$\|a-b\|^2 = 2\|x-a\|^2 + 2\|x-b\|^2 - 4\|x - \frac{1}{2}(a+b)\|^2 \leq 0.$$

Donde $\|a-b\| = 0$. Donde $a = b$. ■

5.5 Complemento ortogonal

Seja V um espaço vetorial e sejam U e W subespaços de V. Diz-se que V é soma direta de U e W (e escreve-se $V = U \oplus W$) se, para qualquer $v \in V$, existirem vetores únicos $u \in U$ e $w \in W$ tais que $v = u + w$. É fácil provar que $V = U \oplus W$ se e só se $V = U + W$ e $U \cap W = \{0\}$.

Definição 5.30 Seja X um subconjunto do espaço vetorial V com produto interno. Chama-se *complemento ortogonal* de X ao conjunto

$$X^\perp = \{v \in V : \forall x \in X, \langle v, x\rangle = 0\}.$$

Proposição 5.31 *Se X for um subconjunto do espaço vetorial V com produto interno, então $X^\perp$ é um subespaço fechado de V.*

Demonstração. Claramente, $0 \in X^\perp$. Sejam $v, v' \in X^\perp$. Seja $x \in X$. Então $\langle v, x\rangle = \langle v', x\rangle = 0$. Donde $\langle v + v', x\rangle = \langle v, x\rangle + \langle v', x\rangle = 0$. Donde $v+v' \in X^\perp$. Com um argumento análogo, mostra-se que, se $a \in \mathbb{F}$ e $v \in X^\perp$, então $av \in X^\perp$. Logo $X^\perp$ é um subespaço de V.

Seja $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de elementos de $X^\perp$ que converge para um limite $v \in V$. Seja $y \in X$. Consideremos a função contínua $f_y : V \to \mathbb{F}$, $x \mapsto \langle x, y\rangle$. Qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $f_y(v_n) = \langle v_n, y\rangle = 0$. Como f_y é contínua e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para v,

$$0 = \lim_{n\to\infty} f_y(v_n) = f_y(\lim_{n\to\infty} v_n) = f_y(v) = \langle v, y\rangle.$$

Logo $v \in X^\perp$. Logo $X^\perp$ é fechado. ■

Proposição 5.32 *Sejam V um espaço de Hilbert e U um subespaço fechado de V. Então $V = U \oplus U^\perp$.*

Demonstração. Se $u \in U \cap U^\perp$, então $0 = \langle u, u \rangle = \|u\|^2$; donde $u = 0$. Logo $U \cap U^\perp = \{0\}$. Vejamos agora que $V = U + U^\perp$. Seja $v \in V$. Como U é um subespaço de V, U é um conjunto convexo. Pela proposição 5.29, existe um único $u \in U$ tal que,

$$\|v - u\| = \inf_{w \in U} \|v - w\|. \tag{5.15}$$

Vejamos que $v - u \in U^\perp$. Seja $w \in U$, com vista a provar que $\langle v - u, w \rangle = 0$. Como esta igualdade é trivial quando $w = 0$, suponhamos que $w \neq 0$. Seja $a \in \mathbb{F}$. De (5.15), $\|v - u\| \leq \|v - u - aw\|$. Donde

$$\begin{aligned} \|v - u\|^2 \leq \|v - u - aw\|^2 &= \langle v - u - aw, v - u - aw \rangle \\ &= \|v - u\|^2 - \langle v - u, aw \rangle - \langle aw, v - u \rangle + \|aw\|^2. \end{aligned}$$

Donde

$$2\,\mathrm{R}(a\langle w, v - u \rangle) \leq |a|^2 \|w\|^2.$$

Em particular, tomando

$$a = \frac{\langle v - u, w \rangle}{\|w\|^2},$$

deduz-se que $|\langle v - u, w \rangle|^2 \leq 0$. Donde $\langle v - u, w \rangle = 0$. Logo $v - u \in U^\perp$. Logo $v = u + (v - u)$, onde $u \in U$ e $v - u \in U^\perp$. Logo $V = U + U^\perp$. ■

Proposição 5.33 *Sejam V um espaço de Hilbert e U um subespaço fechado de V. Então $U = (U^\perp)^\perp$.*

Demonstração. Utilizando a definição de complemento ortogonal, deduz-se facilmente que $U \subseteq (U^\perp)^\perp$.

Seja agora $x \in (U^\perp)^\perp$. Como $V = U \oplus U^\perp$, existem $u \in U$, $w \in U^\perp$ tais que $x = u + w$. Como $u \in U \subseteq (U^\perp)^\perp$ e $V = U^\perp \oplus (U^\perp)^\perp$, vem que $w = x - u \in U^\perp \cap (U^\perp)^\perp = \{0\}$. Donde $x = u \in U$. Logo $(U^\perp)^\perp \subseteq U$. Logo $U = (U^\perp)^\perp$. ■

5.6 Representação de Riesz-Fréchet

Lema 5.34 *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Sejam $v, v' \in V$. Se, para qualquer $x \in V$, $\langle x, v \rangle = \langle x, v' \rangle$, então $v = v'$.*

Demonstração. Suponhamos que, para qualquer $x \in V$, $\langle x, v \rangle = \langle x, v' \rangle$. Tomemos $x = v - v'$. Então, $\langle x, v \rangle = \langle x, v' \rangle \Rightarrow \langle x, v \rangle - \langle x, v' \rangle = 0 \Rightarrow \langle x, v - v' \rangle = 0 \Rightarrow \|v - v'\|^2 = 0 \Rightarrow v - v' = 0 \Rightarrow v = v'$. ■

Proposição 5.35 [Riesz-Fréchet] *Seja V um espaço de Hilbert. Para cada $f \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$, existe um único vetor $v_0 \in V$ tal que $\|f\| = \|v_0\|$ e, qualquer que seja $v \in V$,*

$$f(v) = \langle v, v_0 \rangle. \tag{5.16}$$

Demonstração. A unicidade resulta do lema anterior.

Provemos agora a existência. Se f for a aplicação nula, então, tomando $v_0 = 0$, temos $\|f\| = 0 = \|v_0\|$ e, qualquer que seja $v \in V$, (5.16) é satisfeita. Suponhamos agora que f não é a aplicação nula. Então

$$W = \ker f = \{v \in V : f(v) = 0\}$$

é um subespaço de V diferente de V. Como f é contínua e $\{0\}$ é fechado, $W = f^{-1}(\{0\})$ é fechado. Pela proposição 5.32, $V = W \oplus W^\perp$. Como $V \neq W$, $W^\perp \neq \{0\}$. Seja $z \in W^\perp \setminus \{0\}$. Como $W \cap W^\perp = \{0\}$, $z \notin W$ e, portanto, $f(z) \neq 0$. Seja

$$v_0 = \frac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2} z \in W^\perp.$$

Seja $v \in V$. Então

$$f\left(v - \frac{f(v)}{f(z)} z\right) = f(v) - \frac{f(v)}{f(z)} f(z) = 0.$$

Portanto

$$v - \frac{f(v)}{f(z)} z \in W.$$

Donde

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v - \frac{f(v)}{f(z)} z, v_0 \rangle = \langle v, v_0 \rangle - \frac{f(v)}{f(z)} \langle z, v_0 \rangle = \langle v, v_0 \rangle - \frac{f(v)}{f(z)} \frac{f(z)}{\|z\|^2} \langle z, z \rangle \\ &= \langle v, v_0 \rangle - f(v). \end{aligned}$$

Donde (5.16) é satisfeita. Qualquer que seja $v \in V$,

$$|f(v)| = |\langle v, v_0 \rangle| \leq \|v\| \|v_0\|.$$

Donde

$$\|f\| = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|f(v)|}{\|v\|} \leq \|v_0\|.$$

Por outro lado, como $f(v_0) = \langle v_0, v_0 \rangle = \|v_0\|^2$, vem que

$$\|f\| \geq \frac{|f(v_0)|}{\|v_0\|} = \|v_0\|.$$

Logo $\|f\| = \|v_0\|$. ■

Proposição 5.36 *Sejam V e U espaços de Hilbert sobre $\mathbb{F}$. Para cada $f \in \mathcal{L}(V, U)$, existe uma única aplicação $f^* \in \mathcal{L}(U, V)$ tal que, quaisquer que sejam $v \in V$, $u \in U$,*

$$\langle f(v), u \rangle = \langle v, f^*(u) \rangle.$$

Demonstração. A unicidade resulta facilmente do lema 5.34. Provemos agora a existência. Seja $u \in U$. Seja

$$g_u : V \to \mathbb{F}, \quad v \mapsto \langle f(v), u \rangle.$$

É fácil verificar que g_u é uma aplicação linear. Qualquer que seja $v \in V$,

$$|g_u(v)| = |\langle f(v), u \rangle| \leq \|f(v)\|\|u\| \leq \|v\|\|f\|\|u\|.$$

Pela proposição 4.3, g_u é contínua. Pela proposição 5.35, existe um único vetor $f^*(u) \in V$ tal que $\|g_u\| = \|f^*(u)\|$ e, qualquer que seja $v \in V$,

$$g_u(v) = \langle v, f^*(u) \rangle.$$

Assim, qualquer que seja $v \in V$,

$$\langle f(v), u \rangle = \langle v, f^*(u) \rangle.$$

Para completar a demonstração, falta provar que a aplicação

$$f^* : U \to V, \quad u \mapsto f^*(u),$$

pertence a $\mathcal{L}(U, V)$. Sejam $u, u' \in U$. Qualquer que seja $v \in V$,

$$\begin{aligned} \langle v, f^*(u + u') \rangle &= \langle f(v), u + u' \rangle = \langle f(v), u \rangle + \langle f(v), u' \rangle \\ &= \langle v, f^*(u) \rangle + \langle v, f^*(u') \rangle = \langle v, f^*(u) + f^*(u') \rangle. \end{aligned}$$

Pelo lema 5.34, $f^*(u + u') = f^*(u) + f^*(u')$. Sejam $a \in \mathbb{F}$, $u \in U$. Qualquer que seja $v \in V$,

$$\langle v, f^*(au) \rangle = \langle f(v), au \rangle = \overline{a}\langle f(v), u \rangle = \overline{a}\langle v, f^*(u) \rangle = \langle v, af^*(u) \rangle.$$

Pelo lema 5.34, $f^*(au) = af^*(u)$. Logo f^* é linear. Qualquer que seja $u \in U$,

$$\begin{aligned} \|f^*(u)\|^2 &= \langle f^*(u), f^*(u) \rangle = \langle f(f^*(u)), u \rangle \leq \|f(f^*(u))\|\|u\| \\ &\leq \|f\|\|f^*(u)\|\|u\|. \end{aligned}$$

Donde, qualquer que seja $u \in U$, $\|f^*(u)\| \leq \|f\|\|u\|$. Pela proposição 4.3, f^* é contínua. ■

Definição 5.37 Sejam V e U espaços de Hilbert e $f \in \mathcal{L}(V, U)$. A única aplicação $f^* \in \mathcal{L}(U, V)$ referida na proposição anterior chama-se *adjunta* de f. Se $V = U$ e $f = f^*$, diz-se que a aplicação f é *auto-adjunta* ou *hermítica.*