Grundlagenstreit e o intuicionismo Brouweriano*

Fernando Ferreira
Universidade de Lisboa

Em memória de Augusto Brandão Correia (1961-2005),
colega e amigo.

1 O episódio *Annalen*

... und Brouwer, das ist die Revolution!
Hermann Weyl

A revista *Mathematische Annalen*, sem dúvida a mais conceituada revista de Matemática da primeira metade do século passado, sofre uma reformulação de monta na passagem do seu número 100 (de 1928) para o número 101 (do ano seguinte). O leitor mais desprevenido poderia ter sido levado a pensar que se tratava duma remodelação editorial normal, como por vezes acontece (tanto mais que ocorre oportunamente na passagem do número 100 para o 101). O corpo editorial é, porém, reduzido substancialmente (de doze para três pessoas) e o nome de Albert Einstein – para falar apenas num nome incontestável – desaparece da capa da revista. Convido o leitor a observar as capas em apenso dos números 100 e 101 da revista *Mathematische Annalen*. Efectivamente, não se tratou duma remodelação normal, sendo a pequena história desta mudança editorial relativamente desconhecida da comunidade matemática ainda que envolva nomes tão conhecidos como David Hilbert, Otto Blumenthal, Constantin

*Este escrito tem origem numa comunicação plenária ao Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática em Junho de 2006. Aos organizadores, deixo aqui um agradecimento pelo honroso convite. O título era ligeiramente diferente ("Em torno do mundo de L. E. J. Brouwer") e, na parte final, tencionava abordar o meu próprio trabalho sobre interpretações funcionais em Teoria da Demonstração. A abordagem foi incipiente, mas foi este trabalho que me levou a reflectir sobre o intuicionismo Brouweriano. Cerca de um ano depois, em Outubro de 2007, a convite de Olga Pombo, dei uma palestra numa sessão do Seminário Permanente de Filosofia das Ciências na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Um mês mais tarde, na Universidade dos Açores, repeti a palestra. Nestas comunicações apenas me dediquei a Brouwer. O meu trabalho sobre interpretações funcionais tem sido publicado em revistas da especialidade e resolvi omiti-lo completamente aqui.

Carathéodory, Richard Courant, Otto Hölder, L. E. J. Brouwer, Ludwig Bieberbach e o mencionado Albert Einstein, entre outros. Os três primeiros eram, conjuntamente com Einstein, os editores principais da revista. Para o que se vai contar, deve ter-se em linha de conta que Brouwer estava de boas relações com todos os protagonistas, mantendo mesmo relações de amizade com alguns deles. A possível excepção – recente – é Hilbert. Mas, mesmo neste caso, a admiração científica era mútua (p. ex., em 1919 Brouwer tinha sido convidado a preencher uma cátedra na Universidade de Göttingen, onde Hilbert era professor).

No dia 27 de Outubro de 1928, um sábado, Brouwer recebe um telegrama vindo de Berlim. Rezava assim: *Professor Brouwer, Laren N. H. Por favor não tome nenhuma medida antes de falar com Carathéodory que o deverá informar de um facto, seu desconhecido, de graves consequências. O assunto é totalmente diferente do que possa pensar pelas cartas recebidas. Carathéodory vai a Amesterdão na segunda-feira. Erhard Schmidt.* Entrementes, duas cartas registadas tinham chegado, uma de Hilbert e outra de Carathéodory, mas Brouwer não as abre. Espera por Carathéodory. Finalmente, abre-as na sua presença. A carta de Hilbert não se perdeu e dizia: *Caro colega. Devido a não me ser possível colaborar consigo, dada a incompatibilidade das nossas opiniões sobre assuntos fundamentais, pedi autorização aos membros da comissão editorial da revista* Mathematische Annalen*, que me foi dada por Blumenthal e Carathéodory, para o informar de que, a partir desta data, renunciamos à sua colaboração na edição da revista* Annalen *e, portanto, eliminamos o seu nome da capa. Aproveito a ocasião para agradecer, em nome dos editores, as suas actividades passadas em prol da nossa revista. Seu, respeitosamente, D. Hilbert.* A iniciativa da carta tinha pertencido a Hilbert, nessa altura muito próximo da reforma, e tanto Blumenthal (primeiro estudante de doutoramento de Hilbert) como Carathéodory foram relutantemente levados a assentir aos desejos de Hilbert por respeito e lealdade. Carathéodory saiu arrasado do encontro com Brouwer e, para este último, as notícias constituiram um grande choque manifestado, inclusive, por consequências somáticas pois desenvolveu uma ponta de febre nos dias a seguir ao encontro. Uma destituição assim raiava o insulto.

A visita de Carathéodory foi uma tentativa vã de dar explicações a Brouwer e de circunscrever os danos causados pela missiva de Hilbert. Carathéodory viu-se apanhado entre a lealdade a Hilbert e um tratamento justo devido a Brouwer. Tentou por todos os meios chegar a um entendimento mas, para além do assunto estar fora do seu controle, foi também um pouco inábil. Sugere a Brouwer que resigne da sua posição da revista sem resistência tendo em conta que o estado de saúde de Hilbert não lhe permitia ser completamente responsável pelos seus próprios actos (Hilbert andava adoentado e enfraquecido com uma anemia séria, potencialmente mortal à época). Brouwer, contudo, não aceita tranquilamente a sua demissão. Envia cartas a Carathéodory e a Blumenthal nos seguintes termos: *Caro colega. Depois de considerar a situação com cuidado e de me ter aconselhado devo afirmar que o seu pedido, de tratar Hilbert como mentalmente incapaz, apenas pode ser atendido caso essa informação chegue a mim por escrito da Sra. Hilbert e do médico de Hilbert. Seu, L. E. J. Brouwer.* Era uma condição totalmente inaceitável. Hilbert estava doente, mas não mentalmente

15

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN

UNTER MITWIRKUNG

VON

LUDWIG BIEBERBACH, HARALD BOHR, L. E. J. BROUWER,
RICHARD COURANT, WALTHER V. DYCK, OTTO HÖLDER,
THEODOR V. KÁRMÁN, ARNOLD SOMMERFELD

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DAVID HILBERT
IN GÖTTINGEN

ALBERT EINSTEIN
IN BERLIN

OTTO BLUMENTHAL
IN AACHEN

CONSTANTIN CARATHÉODORY
IN MÜNCHEN

100. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1928

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DAVID HILBERT
IN GÖTTINGEN

UNTER MITWIRKUNG VON

OTTO BLUMENTHAL
IN AACHEN

ERICH HECKE
IN HAMBURG

101. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1929

incapacitado. No turbulento debate que se seguiu, uns tomaram o partido de Hilbert, outros o de Brouwer e outros ainda afastaram-se da contenda. Este último é o caso de Albert Einstein (NB Einstein não é mencionado na carta de Hilbert) que classifica o episódio como uma *batalha de sapos e ratos* (Einstein refere-se a uma paródia da Antiguidade Clássica à Ilíada de Homero). O volume 101 da revista *Mathematische Annalen* sai a público com novos editores. Hilbert desencadeia a contenda mas não mais participará dela. Por causa do seu estado de saúde, os seus colaboradores resguardaram-no da polémica que se seguiu.

Que razões levaram Hilbert a demitir Brouwer? Sejam quais elas tenham sido, o episódio tirou o ânimo a Brouwer já que este deixa de defender com o vigor anterior as suas ideias intuicionistas. No resto do artigo, vamos descrever brevemente esta contenda e as ideias principais do intuicionismo Brouweriano.

2 O clima intelectual

Estou muito surpreendido pelo facto de que até em círculos matemáticos
o poder de sugestão de um único homem,
mesmo que muito temperamental e imaginativo,
seja capaz de exercer as mais improváveis e excêntricas influências.
David Hilbert

Se a matemática retrocedesse seriamente para este estatuto de puro jogo
por causa da sua consistência, deixaria de ser um factor determinante na
história do pensamento.
Hermann Weyl

No início de século passado, o paradoxo de Russell causa alguma comoção entre os matemáticos, explicada em parte porque nessa época se travava uma batalha surda entre tradicionalistas e modernos. Os tradicionalistas, representados por Kronecker, Poincaré e outros, entendiam a matemática como uma construção mental baseada na intuição, fundada nos números naturais vistos como uma sucessão potencialmente infinita, nos objectos matemáticos mediados através das suas representações (p. ex., via expressões para os calcular), assim como na repulsa em considerar o infinito actual. (O *continuum* real é o calcanhar de Aquiles da visão tradicionalista que, não o podendo ignorar, refugia-se num nevoeiro de misturas de intuições espaciais geométricas e, também, da mecânica.) Os modernos, por sua vez, abraçam os novos métodos abstractos, onde a tónica deixa de estar nos cálculos explícitos e nas representações dos objectos matemáticos para estar em questões mais conceptuais e onde, concomitantemente, se aceita o infinito actual (Karl Weierstrass, Richard Dedekind, Georg Cantor *et al.*). O paradoxo de Russell é entendido pelos tradicionalistas como a prova de que os métodos abstractos modernos são espúrios, por estarem demasiado afastados das fontes da intuição. Poincaré, às tantas, comenta a propósito do paradoxo: *La logistique n'est plus stérile, elle engendre l'antinomie!* (há, realmente, frases assassinas). Os modernos, por sua vez, afanaram-se em consertar os paradoxos.

Nos anos vinte, Hilbert – um moderno – avança com um programa fundacional cujo objectivo é o de justificar a matemática infinitária por métodos que nem o mais radical construtivista poria em causa. Como veremos, trata-se em larga medida de uma reacção às propostas mais radicais do campo construtivista: o intuicionismo de Brouwer. As opiniões de Hilbert são expressas contundentemente nas mais prestigiadas revistas da época. (NB hoje, o tom dificilmente seria aceitável.) Por exemplo, em 1926 Hilbert escreve na revista *Mathematische Annalen*: "Porém há uma forma completamente satisfatória de escapar aos paradoxos sem cometer traição contra a nossa ciência" e "Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós" (o paraíso, claro está, é a teoria dos conjuntos). Dois anos mais tarde, noutra publicação, escreve: "Tirar o princípio do terceiro excluído ao matemático seria o mesmo que tirar o telescópio ao astrónomo ou o uso dos punhos ao pugilista". O Programa de Hilbert é eminentemente matemático. Hilbert compara o seu programa com alguns episódios da matemática: com a extensão dos números naturais pelos inteiros e a dos números reais pelos complexos. Também com a noção de ideal em teoria de anéis (a noção de ideal em Álgebra tem origem na falha da unicidade de factorização em certos anéis de inteiros algébricos e na tentativa de restaurar esta unicidade por meio da adjunção destes "elementos ideais"). Nestes exemplos há algo em comum: a extensão duma estrutura para melhor a estudar.

Para Hilbert, tal como para os tradicionalistas, há asserções matemáticas de conteúdo intuitivo, claro e indiscutível (como as igualdades aritméticas) – denominadas de asserções *reais* (não confundir com asserções sobre números reais). Porém, também existem asserções *ideais* – estoutras as asserções da matemática infinitária. De acordo com o Programa de Hilbert, as asserções ideais não carecem de interpretação, sendo apenas encaradas *sintacticamente*, meras sequências finitas de símbolos duma linguagem formal (não interpretada). A manipulação destas sequências finitas de símbolos é regulada por regras formais de dedução. Enfim, a matemática infinitária é mecanizada e vista como um jogo simbólico. (Hilbert maravilha-se com a harmonia pré-estabelecida que, fruto do trabalho logicista anterior – de motivações completamente díspares das do seu Programa – permite exprimir a matemática em sistemas formais). Há, porém, uma condição a que esta expansão da linguagem às asserções ideais tem que obedecer: nas palavras de Hilbert "há apenas uma condição, ainda que absolutamente necessária, a que o método dos elementos ideais está sujeito. Essa condição consiste numa *demonstração de consistência*, pois a expansão do domínio pela adição de elementos ideais só é legítima se essa expansão não causa o aparecimento de contradições no domínio original, mais estrito". O problema da consistência da matemática das asserções "ideais" é, ele próprio, um problema combinatorial finitário (logo, um problema com significado para o tradicionalista). Equivale a dizer que, seguindo certas regras combinatorias de natureza sintáctica, não se pode chegar à configuração sintáctica '$0 = 1$'. A demonstração de consistência deveria ser obtida por meios finitários. Numa célebre comunicação ao Congresso Internacional de Matemática de Bolonha em Setembro de 1928, Hilbert desafia as melhores mentes matemáticas da nova geração a dedicarem-se ao problema da consistência.

Tentou-se descrever, em traços muito largos (e, por ora, sem elaborar o impacto do intuicionismo), o clima intelectual dos anos vinte do século passado no que diz respeito à fundamentação da matemática. As discussões fundacionais estavam na ordem do dia, eram vigorosas e decorriam sob a liderança dos matemáticos de maior envergadura da época. A maioria silenciosa dos matemáticos seguia com interesse e, por vezes, com paixão as discussões fundacionais. Se, por um lado, havia a forte inclinação de ver a matemática como portadora de sentido e guiada pela intuição (o que originava uma simpatia natural por Brouwer – ainda que travada pelas suas ideias mais radicais), por outro lado existia também um fascínio pelos métodos infinitários mas, ao mesmo tempo, uma repulsa instintiva em ver a matemática infinitária como, *au fond*, um mero jogo simbólico. Era este o caminho que Hilbert propunha.

3 Interlúdio I

(... o) formalismo não tem recebido senão favores do intuicionismo
e pode ainda esperar mais benefícios.
L. E. J. Brouwer

Em 1904, no seguimento do paradoxo de Russell e da sua disseminação entre os matemáticos, Hilbert publica o artigo *Sobre os Fundamentos da Lógica e da Aritmética*, onde pela primeira vez apresenta uma demonstração combinatorial de consistência. Hilbert estuda uma teoria muito rudimentar e define uma propriedade sintáctica que é satisfeita pelos axiomas e que é transmitida pelas regras de inferência. Dado que certas fórmulas não têm esta propriedade, a teoria é consistente. Um ano mais tarde, num artigo intitulado *A Matemática e a Lógica*, Henri Poincaré faz uma crítica à qual Hilbert só irá responder quase duas décadas depois. A demonstração de Hilbert usa, ainda que de forma muito simples, o princípio de indução. Há, segundo Poincaré, um *petitio principii* numa demonstração da consistência da aritmética por linhas Hilbertianas: a demonstração usa o princípio de indução; contudo, este é um princípio aritmético. É apenas num artigo de 1922 intitulado *Nova Fundamentação da Matemática. Primeira Comunicação*, que Hilbert elabora a distinção entre asserções com conteúdo (reais ou finitárias) e asserções formais (ou ideais) e, consequentemente, entre o princípio de indução para asserções finitárias e o princípio de indução formal. A primeira forma do princípio pode, segundo Hilbert, ser usada para demonstrar a consistência da aritmética formal. O *petitio* de Poincaré é assim evitado, ainda que à custa de um resíduo aritmético inevitável (Gödel mostrará em 1931 que não se trata de um mero resíduo).

No citado artigo de 1922, Hilbert usa pela primeira vez a expressão "metamatemática" para descrever a parte *real* do raciocínio matemático por meio da qual a consistência da aritmética formal se poderia demonstrar. Em 1928, Brouwer escreve o pequeno artigo *Reflexões Intuicionistas Sobre o Formalismo.* Neste escrito, Brouwer aponta o facto de que muitas ideias do formalismo, nomeadamente a distinção entre matemática formal e metamatemática, tinham sido antecipadas pelo intuicionismo e lamenta que a posição formalista não reconheça explicitamente uma dívida ao intuicionismo. (Brouwer era bastante sensível a respeito de questões de prioridade.) Finalmente, remata-se que o formalismo ainda nada tinha conseguido, pois a demonstração de consistência – apesar das grandes ambições – continuava a primar pela ausência...

4 O primeiro acto do intuicionismo

Luitzen E. J. Brouwer (1881-1966) doutorou-se na Universidade de Amesterdão em 1907, sob a supervisão de Diederik J. Korteweg (o mesmo da equação Korteweg - de Vries) com uma dissertação intitulada *Sobre os Fundamentos da Matemática*. Na dissertação já põe em causa a lei do terceiro excluído, opõe-se à redução do *continuum* real aos cortes de Dedekind, critica o logicismo de Russell, comenta os trabalhos de Cantor, ataca o teorema da boa-ordenação de Zermelo, etc. Apenas o primeiro dos três capítulos contém matemática no sentido estrito, nomeadamente um estudo sobre grupos de Lie sem condições de diferenciabilidade. Korteweg sempre apoiou Brouwer, considerando-o um grande talento, ainda que tenha tentado (e, em parte, conseguido) moderar e omitir certas passagens da sua dissertação de modo a torná-la mais aceitável aos seus colegas. A primeira parte da dissertação de Brouwer já atrai alguma atenção na comunidade matemática internacional. A sua reputação matemática estabelece-se firmemente em três anos, entre 1910 e 1913, durante os quais demonstra o seu célebre teorema do ponto fixo, introduz conceitos básicos da topologia algébrica, estabelece a invariância da dimensão (encetando a este respeito uma polémica com Henri Lebesgue sobre a prioridade do resultado, de que sai vitorioso), etc. Em 1913 Korteweg, com 65 anos, vai ao ponto de trocar, por sua própria iniciativa, a sua posição de catedrático pela posição de extraordinário de Brouwer para assegurar que este se mantivesse em Amesterdão. No ano seguinte, Brouwer é convidado por Félix Klein para ser editor da revista *Mathematische Annalen*, como responsável pelos artigos de topologia, aceitando.

O intuicionismo Brouweriano divide-se em duas fases, conhecidas por primeiro e segundo acto do intuicionismo. O primeiro acto do intuicionismo tem origem na dissertação de Brouwer e caracteriza-se por uma defesa da matemática construtiva e pelo repúdio da lei do terceiro excluído. Nesta fase, a matemática intuicionista pode ser vista como um sub-sistema da matemática clássica, no sentido em que todo o teorema intuicionista é ele próprio um teorema clássico. A diferença está na rejeição, por parte do intuicionista, de determinados argumentos clássicos. Numa má descrição filosófica, mas pragmaticamente ilustrativa, o intuicionista do primeiro acto é um matemático clássico que trabalha com as mãos atadas atrás das costas.

Na visão platónica (ou realista) da matemática, as asserções da matemática são acerca duma realidade objectiva, independente do homem. As asserções da matemática são *descrições* dessa realidade e, se estas estão correctas, aquelas são verdadeiras. Caso contrário, são falsas. Por outro lado, na visão intuicionista, a realidade matemática é uma construção mental humana, ainda que não uma construção arbitrária. Esta posição tem consequências. A tónica já não está na *descrição* correcta duma realidade independente, mas sim na *construção* mental duma realidade e na *justificação* das propriedades dessa construção. P. ex., para um intuicionista a demonstração duma asserção existencial demanda que se construa um objecto que a testemunhe. O mero facto de que se chega a uma contradição caso se admita que não existam testemunhas não é, para o intuicionista, uma justificação válida de que exista uma testemunha. De modo semelhante, a justificação duma disjunção demanda que se demonstre uma das alternativas. Ora, visto que *em geral* (perante $P \vee \neg P$) não há forma de justificar nem P nem $\neg P$, o intuicionista não aceita a lei do terceiro excluído. O intuicionista do primeiro acto *abstém-se* de a invocar. Mas é claro que pode aceitar como correctas certas asserções da forma $P \vee \neg P$: basta que esteja na posse duma justificação para P ou para $\neg P$. Ao invés, o platonista aceita imediatamente a lei do terceiro excluído, pois esta afirma meramente que, dada uma asserção, ou ela descreve correctamente a realidade ou, então, é a sua negação que o faz.

Considere-se o seguinte resultado e demonstração subsequente:

Teorema. *Existem números irracionais positivos a e b tais que a^b é um número racional.*

Demonstração. Se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é um número racional, basta tomar $a = b = \sqrt{2}$. Caso contrário, tome-se $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $b = \sqrt{2}$. Note-se que neste último caso $a^b = 2$. □

Esta demonstração não é aceite pelo intuicionista pois utiliza a alternativa "$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é, ou não, um número racional" sem apresentar um argumento que decida qual destes é o caso. O demonstração acima é, nisso, totalmente omissa. Como discutimos há pouco, o intuicionista não aceita uma disjunção a menos que se argumente qual das asserções postas em alternativa é verdadeira. Por conseguinte, o intuicionista não aceita o teorema atrás *baseado* na demonstração apresentada. De facto, o teorema é intuicionisticamente válido mas isso deve-se à existência de um argumento (construtivo) de Gelfond que mostra que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é um número irracional.

Brouwer forneceu exemplos, hoje conhecidos por *contra-exemplos fracos*, à lei do terceiro excluído. Não se tratam (nem se podiam tratar) de genuínos contra-exemplos. Neles mostra-se que se se aceitarem determinados resultados (tipicamente argumentados classicamente com recurso à lei do terceiro excluído), então decidir-se-iam conjecturas em aberto da forma $\forall n \in \mathbb{N}\, R(n)$ onde, para cada número natural n, a alternativa entre $R(n)$ e a sua negação se pode averiguar ao fim de um número finito de passos computacionais. As conjecturas particulares que se tomam não são importantes. Vamos aqui dar um exemplo com a *conjectura de Goldbach*, segundo a qual todo o número natural par não inferior a 4 é soma de dois números primos. Aceitando o número 0 como número natural, a conjectura pode reformular-se assim:

$$\forall n \in \mathbb{N}\, (2n + 4 \text{ é soma de dois números primos}).$$

Esta conjectura é da forma $\forall n \in \mathbb{N}\, R(n)$, como acima descrito. Defina-se agora a seguinte sucessão:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & \text{se } \forall i \leq n\, R(i) \\ \\ \dfrac{1}{2^k} & \text{se } k \leq n,\ \neg R(k) \text{ e } \forall i < k\, R(i) \end{cases}$$

Dito de outro modo, a_n é $\frac{1}{2^n}$ se até à altura n não aparecer um contra-exemplo à conjectura de Goldbach (o que se pode decidir ao fim dum número finito de passos); caso contrário, o valor é $\frac{1}{2^k}$ onde k é o primeiro número (inferior ou igual a n) tal que $2k+4$ não é soma de dois números primos. Ora, para todo número natural n, $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Logo, a sucessão (a_n) converge para um certo número real x_G. O intuicionista facilmente argumenta as duas implicações $x_G = 0 \rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, R(n)$ e $x_G \neq 0 \rightarrow \exists n \in \mathbb{N}\, \neg R(n)$.

Assim, caso se aceite a disjunção $x_G = 0 \vee x_G \neq 0$ para este número real particular x_G (denominado de pendular), então decide-se a conjectura de Goldbach. A conclusão é a de que o intuicionista não tem razões para aceitar a disjunção $x_G = 0 \vee x_G \neq 0$. Por maioria de razão, o intuicionista não aceita a generalização $\forall x \in \mathbb{R}\, (x = 0 \vee x \neq 0)$.

5 O segundo acto do intuicionismo

Há dois famosos labirintos onde a razão muitas vezes se perde:
um concerne a questão do livre e do necessário (...);
o outro consiste na discussão da continuidade e dos indivisíveis (...)
Leibniz

O tratamento intuicionista do contínuo real constitui, numa primeira fase, um problema. Para o intuicionista da época do primeiro acto, os números reais são dados por meio de sucessões de Cauchy de números racionais. Ora, estas sucessões tinham que ser dadas construtivamente, i.e., através duma regra computacional. Tratar-se-ia, portanto, dum contínuo *reduzido* pois, como existe apenas um número numerável de regras computacionais, então os reais seriam em número numerável. Isto é inaceitável para Brouwer: em particular, a recta real teria medida nula! Já na sua tese de doutoramento, Brouwer expõe uma visão do contínuo não redutível ao discreto. Estas palavras, retiradas da sua dissertação, falam por si: "o contínuo e o discreto surgem como complementos inseparáveis, ambos com os mesmos direitos e ambos igualmente claros, sendo impossível evitar qualquer um deles como entidade primitiva, tentando construir um à custa do outro, com este último como auto-suficiente". O *continuum* é, pois, tomado como um conceito primitivo e não analisável.

O segundo acto do intuicionismo inicia-se em 1917/18, com a análise intuicionista do contínuo real. Brouwer introduz a noção intuicionista de *sucessão indefinidamente procedente* (ou "sucessão de escolhas", mas prefiro a primeira designação) de números naturais. Trata-se duma noção primitiva e informal. A ideia é a de que não se aceitam somente sucessões dadas por regras computacionais, mas também sucessões não totalmente acabadas, *em desenvolvimento* (e sobre as quais é sempre possível inquirir por um dado número *finito* de valores e obter uma resposta determinada), desde que a sua continuação seja sempre possível. Dada uma sucessão indefinidamente procedente a pergunta "O número 6 ocorre no quarto lugar?" tem uma resposta determinada, mas as perguntas "O número 6 ocorre na sucessão?" ou "O número 6 aparece um número infinito de vezes?" já podem não ter. A continuação duma sequência pode ser totalmente livre ou, pelo contrário, previamente especificada por uma regra computacional. Também pode ser uma mistura entre liberdade e determinação: p. ex., a sucessão é sempre 1 nas entradas ímpares, mas é deixada livre nas entradas pares. A noção de sucessão indefinidamente procedente seria apenas uma mera curiosidade intelectual, sem interesse matemático, não fosse a adopção de um princípio fundamental. Vamos estabelecer a seguinte notação: denotamos por $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ o conjunto de todas as sucessões de números naturais e chamamos a este conjunto o espaço de Baire; dado $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e $n \in \mathbb{N}$, abreviamos por $\overline{f}(n)$ a sequência finita $\langle f(0), f(1), \ldots, f(n-1) \rangle$. De acordo com Brouwer, qualquer função total $\Phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathbb{N}$ é tal que, para cada $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, o valor $\Phi(f)$ apenas depende dum segmento inicial finito de f. Brouwer simplesmente aceita este princípio, não aduzindo explicitamente razões:

Princípio da Continuidade. *Para toda a função* $\Phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathbb{N}$ *tem-se*

$$\forall f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\, \exists n \in \mathbb{N}\, \forall g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\, (\overline{f}(n) = \overline{g}(n) \to \Phi(f) = \Phi(g)).$$

O nome deste princípio justifica-se porque é equivalente a dizer que toda a função do espaço de Baire para o espaço discreto $\mathbb{N}$ é contínua. Aqui, o espaço de Baire está munido da métrica que especifica a distância entre dois elementos distintos $g, h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ como sendo $\frac{1}{2^k}$, onde k é o menor natural tal que $g(k) \neq h(k)$. Uma tentativa de justificar o Princípio de Continuidade é a seguinte: dado que as sucessões indefinidamentes procedentes podem não estar acabadas, apenas se podendo determinar segmentos iniciais finitos, os quais podem ser continuados *livremente*, o valor de Φ numa sucessão apenas pode depender dum seu segmento inicial finito. Não obstante, este argumento não colhe por si só. Entre as sucessões indefinidamentes procedentes também se encontram aquelas dadas por regras computacionais (ou parcialmente dadas por elas) e, intuicionisticamente, o valor de Φ numa delas também poderia depender dessas regras (diz-se que Φ dependeria de informação *intensional*). Mas, para Brouwer, se Φ está definida em *todo* o espaço de Baire, Φ necessariamente verifica o Princípio de Continuidade (e, portanto, não depende de informação intensional). Hoje continua a ser debatida filosoficamente a justificação deste princípio.

Aceite o Princípio de Continuidade e formalizando convenientemente a noção de número real (através de sucessões indefinidamente procedentes que "codificam" sucessões encaixadas de intervalos de extremos racionais cujos comprimentos tendem para zero), demonstra-se o seguinte teorema: *Toda* a função de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ é contínua. Trata-se dum resultado incompatível com a matemática clássica. O leitor poderá revoltar-se contra este "teorema" intuicionista exibindo, para isso, uma função não contínua. Por exemplo, a função que toma o valor 0 para os números reais não nulos e o valor 1 para o número 0. Porém, tal função só estaria bem definida para o intuicionista se se demonstrasse $\forall x \in \mathbb{R}\,(x = 0 \vee x \neq 0)$, o que não é por eles aceite. Como corolário, demonstra-se o teorema da *indecomponibilidade do contínuo*:

Teorema. *Se $\mathbb{R} = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$, então $A = \mathbb{R}$ ou $B = \mathbb{R}$.*

Demonstração. Considere-se a função real de variável real F definida do seguinte modo:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in A \\ 1 & \text{se } x \in B \end{cases}$$

Como discutimos, esta função é contínua. Mas então terá que ser constante. Logo, $A = \mathbb{R}$ ou $B = \mathbb{R}$. $\square$

Em 1921, Hermann Weyl descreve este resultado nos seguintes termos: "Se isto parece ofensivo para o matemático de hoje, com os seus hábitos atomísticos, em tempos idos era uma visão compartilhada por todos. (...) O ponto é que um *contínuo genuíno* é uma coisa conexa em si e *não pode ser dividido em fragmentos separados*".

Corolário. $\neg\forall x \in \mathbb{R}\,(x = 0 \vee x \neq 0)$.

Demonstração. Se se tivesse $\forall x \in \mathbb{R}\,(x = 0 \vee x \neq 0)$ poderíamos formar intuicionisticamente os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : x = 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$, o que contradiz o teorema da indecomponibilidade do contínuo. $\square$

Este corolário é um contra-exemplo *forte* a uma forma da lei do terceiro excluído. Os *contra-exemplos fortes* apenas são possíveis por causa da aceitação do Princípio da Continuidade, sendo este à vez aceite por causa da noção intuicionista de sucessão indefinidamente procedente. Não se trata meramente de recusar a aceitar $\forall x \in \mathbb{R}\,(x = 0 \vee x \neq 0)$, como na primeira fase do intuicionismo, mas de *refutar* $\forall x \in \mathbb{R}\,(x = 0 \vee x \neq 0)$. São contra-exemplos da segunda fase do intuicionismo. Findamos esta secção com outro contra-exemplo forte, este formulado directamente no espaço de Baire:

Teorema. *O intuicionismo Brouweriano refuta a* Lei da Omnisciência Limitada*:*

$$\forall f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\,(\forall n \in \mathbb{N}\,(f(n) = 0) \vee \exists n \in \mathbb{N}\,(f(n) \neq 0)).$$

Demonstração. Se se tivesse a lei da omnisciência limitada poderíamos definir a seguinte função $\Phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathbb{N}$:

$$\Phi(f) = \begin{cases} 0 & \text{se } \forall n \in \mathbb{N}\,(f(n) = 0) \\ 1 & \text{se } \exists n \in \mathbb{N}\,(f(n) \neq 0) \end{cases}$$

Ora, esta função não é contínua no ponto identicamente igual a 0, o que contradiz o Princípio da Continuidade. $\square$

6 Interlúdio II

Portanto, agora abandono a minha própria tentativa e junto-me a Brouwer.
Hermann Weyl

Em 1921, Hermann Weyl (antigo aluno de doutoramento de Hilbert, talvez o seu favorito) publica na revista *Mathematische Zeitschrift* um artigo muito interessante e bastante lido na altura: *Sobre a Nova Crise dos Fundamentos da Matemática*. Ainda hoje se lê este escrito com muito interesse. O artigo começa com a descrição dum tratamento "atomístico" do contínuo mas que, ao contrário do tratamento de Dedekind, adere ao princípio do círculo vicioso (predicativismo). A primeira parte do artigo resume as principais teses de *Das Kontinuum*, um livro publicado por Weyl três anos antes. Interessantemente, depois deste intróito, Weyl considera o seu próprio tratamento inadequado e passa a descrever e a defender a visão intuicionista do *continuum* através dos métodos de Brouwer e das sequências indefinidamente procedentes. Fá-lo sob um ponto de vista fenomenológico, apresentando novas ideias e afastando-se aqui e ali do estrito tratamento de Brouwer. (A fenomenologia é uma corrente filosófica criada por Edmund Husserl – um filósofo doutorado em Matemática e antigo estudante de licenciatura de Kronecker e Weierstrass em Berlim – no início do século XX. Kurt Gödel defendeu a fenomenologia no âmbito da Filosofia da Matemática nos últimos anos de vida; mais recentemente, o matemático Gian-Carlo Rota foi também um seguidor de Husserl.)

Para além da substância do artigo, o estilo de Weyl chamou a atenção por causa das suas associações aos acontecimentos políticos da época. Claro está, a visibilidade do artigo também se explica pela grande estatura matemática de Weyl (que acabou por suceder a Hilbert em Göttingen em 1930). Pode dizer-se que foi o artigo de Weyl que espoletou o *Grundlagenstreit*. Weyl fala das asserções existenciais como "dinheiro de papel", sem valor a menos que se possa trocar por algo concreto (alusão à hiper-inflação germânica), como também fala da "iminente dissolução do Estado da Análise" (alusão aos problemas da democracia de Weimar) e diz que "*esta ordem não é defensável*, estou agora convencido disso, e Brouwer - é a revolução!". Hilbert responde um ano depois no já mencionado artigo *Nova Fundamentação da Matemática*, afirmando que no domínio da Análise Matemática nem uma sombra de inconsistência tinha aparecido até então, apesar do trabalho intenso e sistemático na área, e que Weyl está apenas a ver fantasmas. Acrescenta que "Brouwer não é, como acredita Weyl, a revolução, mas apenas uma repetição, com as velhas armas, de uma tentativa de golpe [já antes tentada por Kronecker] mas que falhou completamente". E acrescenta que o novo golpe falhará também.

Mais tarde, em *A Actual Situação Epistemológica da Matemática* (1925), Weyl descreve do seguinte modo a visão intuicionista do contínuo real (usando uma linguagem fenomenológica): "O gelo tornou-se quebradiço e agora o elemento fluido vai completamente sobrepor-se ao rígido. L. E. J. Brouwer concebeu – e isto trata-se de um acontecimento de grande importância epistemológica – uma teoria matemática exacta do contínuo, que o concebe, não como um ser rígido, mas como um *meio de livre vir-a-ser*". Uns parágrafos depois, comentando as consequências da adopção da posição intuicionista, acrescenta: "A Matemática atinge, com Brouwer, o ponto mais alto da claridade intuitiva. (...) Mas, dolorosamente, o matemático vê a grande parte das suas grandiosas teorias desvanecer-se em fumo". Em 1927, numa conferência em Hamburgo, num comentário a uma palestra de Hilbert, Weyl termina resignado: "Se a visão de Hilbert prevalecer sobre o intuicionismo, como parece ser o caso, *então vejo nisto uma decisiva derrota da atitude filosófica da pura fenomenologia*".

7 O teorema FAN

Dado que o valor duma função $\Phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathbb{N}$ num determinado ponto $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ apenas depende dum segmento inicial finito de f, Brouwer é levado a estudar a *barreira* (a linha ondulada grossa na figura anexa) a partir da qual se sabe que o valor da função já está determinado. Denotamos por $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ o conjunto de todas as sequências finitas de números naturais. Uma *barreira* B para Φ é uma propriedade dos elementos de $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ tal que,

(B1): $\forall f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\, \exists n \in \mathbb{N}\, B(\overline{f}(n))$; e

(B2): $\forall f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\, \forall n \in \mathbb{N}\, (\overline{f}(n) = \overline{g}(n) \wedge B(\overline{f}(n)) \to \Phi(f) = \Phi(g))$.

O seguinte resultado mostra que existem barreiras *decidíveis* B para funções contínuas – i.e., tais que, para toda a sequência finita s de números naturais, se tem a disjunção $B(s) \vee \neg B(s)$:

Teorema. *Dada* $\Phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathbb{N}$ *pode definir-se uma propriedade* decidível B *dos elementos de* $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ *que satisfaz as propriedades* (B1) *e* (B2) *supra.*

Demonstração. Pelo Princípio da Continuidade sabemos que

$$\forall f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\, \exists n \in \mathbb{N}\, \forall g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\, (\overline{f}(n) = \overline{g}(n) \to \Phi(f) = \Phi(g)).$$

Usando uma forma de escolha aceite intuicionisticamente, conclui-se que existe $\Psi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mapsto \mathbb{N}$ tal que

$$(\star)\ \forall f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\, (\overline{f}(\Psi(f)) = \overline{g}(\Psi(f)) \to \Phi(f) = \Phi(g)).$$

Dado $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, denote-se por $\hat{s}$ o elemento do espaço de Baire que prolonga s até ao infinito por meio de zeros: $\hat{s}(i) = s_i$, se i é menor do que o comprimento de s; $\hat{s}(i) = 0$, caso contrário. Dizemos que uma sequência finita s de números naturais tem a propriedade B se o comprimento de s não é inferior a $\Psi(\hat{s})$. Esta propriedade é decidível. Vejamos que se tem (B1) e (B2).

Seja dado $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Por continuidade de Ψ (Princípio da Continuidade), existe um número natural k_0 tal que $\forall g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}(\overline{f}(k_0) = \overline{g}(k_0) \to \Psi(f) = \Psi(g))$. Logo, $\forall n \geq k_0\, (\Psi(\widehat{\overline{f}(n)}) = \Psi(f) = \Psi(\widehat{\overline{f}(k_0)}))$. Tome-se $n_0 = \max\{k_0, \Psi(\widehat{\overline{f}(k_0)})\}$. Vem $\Psi(\widehat{\overline{f}(n_0)}) = \Psi(\widehat{\overline{f}(k_0)}) \leq n_0$, i.e., $B(\overline{f}(n_0))$.

Para argumentar (B2), suponhamos que $\overline{f}(n) = \overline{g}(n)$ e $\Psi(\widehat{\overline{f}(n)}) \leq n$. Ora, estas condições implicam

$$\overline{f}(\Psi(\widehat{\overline{f}(n)})) = \overline{\widehat{\overline{f}(n)}}(\Psi(\widehat{\overline{f}(n)})) = \overline{\widehat{\overline{g}(n)}}(\Psi(\widehat{\overline{f}(n)})) = \overline{g}(\Psi(\widehat{\overline{f}(n)})).$$

Logo, por $(\star)$, sai $\Phi(\widehat{\overline{f}(n)}) = \Phi(f) = \Phi(g)$. $\square$

A caracterização das "barreiras" das funções contínuas é considerado o resultado mais profundo do intuicionismo Brouweriano. O *Teorema da Barreira* (Bar Theorem) de Brouwer descreve estas "barreiras" em termos da possibilidade duma certa boa-ordenação das mesmas. Porém, o argumento avançado por Brouwer não é nem convincente nem claro, baseando-se em hipóteses sobre a forma que as demonstrações intuicionistas têm que tomar. A obscuridade da "demonstração" de Brouwer criou certamente dificuldades para a causa intuicionista. Uma maneira de encarar o "teorema" da barreira é admiti-lo como um *princípio caracterizador* das sequências indefinidamente procedentes, com um estatuto semelhante ao do Princípio da Continuidade. Este novo princípio tem o nome de *Princípio da Indução de Barreira* (Principle of Bar Induction). Para formulá-lo, introduzimos a seguinte notação: dada uma sequência finita de números naturais s e um número natural n, denotamos por $s * n$ a sequência obtida a partir de s juntando-lhe no seu término uma nova entrada de valor n.

Princípio da Barreira. *Sejam B e P propriedades das sequências finitas de números naturais, a primeira das quais decidível, tais que:*

1. $\forall f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \exists n \in \mathbb{N}\, B(\overline{f}(n))$;
2. $\forall s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\, (B(s) \to P(s))$;
3. $\forall s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\, [(\forall n \in \mathbb{N}\, P(s * n)) \to P(s)]$;

então $P(\langle\rangle)$.

Este princípio é uma forma de indução sobre árvores bem-fundadas. Ao contrário do Princípio de Continuidade, o Princípio da Barreira é classicamente verdadeiro. Com efeito, admita-se – com vista a um absurdo – que $\neg P(\langle\rangle)$. Por (3), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\neg P(\langle n_0 \rangle)$. Novamente por (3), existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\neg P(\langle n_0, n_1 \rangle)$. E assim sucessivamente, obtendo-se $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ tal que $f(0) = n_0$, $f(1) = n_1$, etc. de tal sorte que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tem $\neg P(\overline{f}(n))$. (O leitor de congenialidade semelhante à minha reconhecerá aqui uma aplicação do Axioma das Escolhas Dependentes.) Por (2), conclui-se $\forall n \neg B(\overline{f}(n))$. Isto contradiz (1). Escusado será dizer que esta demonstração não é aceite intuicionisticamente.

A mais importante consequência do Princípio da Barreira é o célebre Teorema FAN de Brouwer. Considere-se uma função $\Phi : 2^{\mathbb{N}} \mapsto \mathbb{N}$, onde $2^{\mathbb{N}}$ é o conjunto de todas as sucessões de 0s e 1s, i.e., o conjunto de todas as sucessões $f : \mathbb{N} \mapsto \{0, 1\}$. Ao espaço $2^{\mathbb{N}}$ munido da métrica induzida pela métrica do espaço de Baire dá-se o nome de espaço de Cantor (é, de facto, homeomorfo ao conjunto de Cantor da análise real). (NB o espaço de Cantor é compacto, ao contrário do espaço de Baire.) O Princípio da Continuidade obriga a que Φ seja uma função contínua. O Teorema FAN tem como consequência que as barreiras de tais funções não são atingidas em valores arbitrariamente elevados (i.e., *no caso binário* a linha ondulada grossa não pode ir arbitrariamente longe).

Teorema FAN. *Seja B uma propriedade decidível das sequências finitas de 0s e 1s (sequências binárias). Então,*

$$\forall f \in 2^{\mathbb{N}}\, \exists n \in \mathbb{N}\, B(\overline{f}(n)) \;\rightarrow\; \exists m \in \mathbb{N}\, \forall f \in 2^{\mathbb{N}}\, \exists n \leq m\, B(\overline{f}(n)).$$

Demonstração. Vamos utilizar o Princípio da Barreira restrito ao espaço de Cantor (o qual é consequência do princípio geral). Considere-se a seguinte propriedade P das sequências binárias finitas: diz-se que s em $2^{\mathbb{N}}$ tem a propriedade P se, e somente se,

$$\exists m \in \mathbb{N}\, \forall f \in 2^{\mathbb{N}} \big(s \sqsubseteq f \;\rightarrow\; \exists n \leq m\, B(\overline{f}(n))\big).$$

onde $s \sqsubseteq f$ significa que a sequência finita s é um segmento inicial de f. Por hipótese, $\forall f \in 2^{\mathbb{N}}\, \exists n \in \mathbb{N}\, B(\overline{f}(n))$, i.e., a propriedade (1) do Princípio da Barreira vale (quando restrita ao espaço de Cantor). A propriedade (2) é imediata. Para ver (3), admita-se que se tem $P(s * 0)$ e $P(s * 1)$ (note-se que estamos apenas a considerar sequências binárias). Então existem números naturais m_0 e m_1 tais que

$$\forall f \in 2^{\mathbb{N}}\, [(s0 \sqsubseteq f \;\rightarrow\; \exists n \leq m_0\, B(\overline{f}(n)) \wedge (s1 \sqsubseteq f \;\rightarrow\; \exists n \leq m_1\, B(\overline{f}(n))].$$

Conclui-se facilmente que se tem $P(s)$ com $m = \max\{m_0, m_1\}$. □

Corolário. *Toda a função $\Phi : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$ é uniformemente contínua.*

Demonstração. Como sabemos, existe uma barreira B para Φ, i.e., uma propriedade decidível das sequências (binárias) que verifica (B1) e (B2) para sucessões do espaço de Cantor. Por (B1) e o Teorema FAN, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall f \in 2^{\mathbb{N}}\, \exists n \leq m\, B(\overline{f}(n)).$$

Por (B2) sai imediatamente:

$$\forall f, g \in 2^{\mathbb{N}}\, (\overline{f}(m) = \overline{g}(m) \;\rightarrow\; \Phi(f) = \Phi(g)).$$

Esta é precisamente a condição de continuidade uniforme de Φ no espaço de Cantor. □

De facto, demonstra-se que *toda* a função $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ é uniformemente contínua. Em geral, *toda* a função real de variável real é localmente uniformemente contínua. Este tratamento da continuidade e da compacidade mostra que o intuicionismo matemático é uma teoria matematicamente sofisticada e abre as portas da Análise a um tratamento intuicionista.

Curiosamente, a versão clássica do Teorema FAN (conhecida por Lema de König) apenas é formulada em 1926 por Denés König, dois anos depois dos trabalhos de Brouwer.

8 Considerações finais

Como é que terminou o *Grundlagenstreit* dos anos vinte? Terminou com o aparecimento dos teoremas de incompletude de Gödel, os quais mostraram que o Programa de Hilbert é impossível de levar a cabo; com o progressivo alheamento de Brouwer, desconsolado com o triste episódio *Annalen*; e com o facto do intuicionismo não ter conseguido atrair suficiente interesse para ser estudado e desenvolvido de forma sistemática. Se bem que, a nível fundacional, nada tenha ficado efectivamente resolvido (deu-se uma espécie de impasse), nunca mais – desde o *Grundlagenstreit* – os assuntos fundacionais despertaram um interesse significativo no meio matemático ordinário.

É contra o espírito do intuicionismo pôr a questão da sua coerência e, ainda mais, da sua consistência *formal*. Num certo sentido, a coerência do intuicionismo é apenas a coerência do pensamento com conteúdo (i.e., interpretado, não meramente sintáctico). Mesmo assim, a questão pode ser levantada porque, afinal de contas, Gottlob Frege também era um campeão da matemática com conteúdo significativo e o seu sistema revelou-se inconsistente. Há sempre a possibilidade de se laborar sob um erro conceptual. Ora, as ideias radicais do intuicionismo Brouweriano, as quais inclusivamente *refutam* leis da lógica clássica, são – ao contrário das ideias mais simples e *prima facie* mais aceitáveis de Frege – consistentes (na medida em que isso é possível avaliar). Fiz a observação parentética precisamente porque o intuicionismo, de acordo com Brouwer, não pode ser capturado por um sistema formal. Porém, teorias formais do intuicionismo matemático do segundo acto foram estudadas a partir de meados do século passado, demonstrando-se a sua consistência (relativamente a teorias cuja consistência não é posta em causa pelo matemático clássico).

O método base para estudar as teorias intuicionistas formais é o método da *realizabilidade*. Este método foi introduzida por Stephen Kleene em 1945 com vista a tornar explícito e matematicamente tratável o conteúdo construtivo das demonstrações intuicionistas. O método sofreu várias modificações e refinamentos (p. ex., a realizabilidade *modificada* de Georg Kreisel de 1962). Uma outra interpretação dos sistemas formais intuicionistas foi publicada em 1958 por Kurt Gödel. Neste caso, a interpretação não é intuicionisticamente fiel e, por isso mesmo, um pouco surpreendente. Mas isto já é uma outra história.[†]

9 Referências

O episódio da revista *Annalen* vem relatado detalhadamente no segundo volume da seguinte biografia exaustiva de Brouwer:

D. van Dalen. *Mystic, Geometer, and Intuitionist: the Life of L. E. J. Brouwer.* Dois volumes. Oxford University Press, 1999 e 2005.

[†]Gostaria de agradecer ao colega que comentou anonimamente este artigo a referência ao ensaio de Moritz Epple e, em especial, a sugestão de tornar mais sóbrio o último parágrafo da secção inicial.

Um escrito anterior de van Dalen focando especificamente o episódio *Annalen* apareceu em

D. van Dalen. "The war of the frogs and the mice, or the crisis of the *Mathematische Annalen*", *The Mathematical Intelligencer*, 12, pp. 17–31. Springer Verlag, 1990.

Também se deve consultar o interessante e informativo (com material inédito de Brouwer)

W.P. van Stigt. *Brouwer's Intuitionism.* North-Holland, 1990.

Um pequeno livro que explica sucintamente a filosofia e a matemática do intuicionismo é

M. van Atten. *On Brouwer.* Wadsworth Philosophers Series, 2004.

Sobre a obscuridade da "demonstração" de Brouwer do Teorema de Barreira, o seu enquadramento na epistemologia Brouweriana e a sua (não) recepção pela comunidade matemática da época, o leitor pode ler o interessante

Moritz Epple. "Did Brouwer's intuitionistic analysis satisfy its own epistemological standards?", *Proof Theory – Historical and Philosophical Significance*, Vincent Hendricks *et al.* (organizadores). Kluwer Academic Publishers, pp. 153-178, 2000.

As seguintes referências são mais técnicas:

M. Dummett. *Elements of Intuitionism.* Oxford Logic Guides 39, Oxford University Press, 2000.

A.S. Troelstra e D. van Dalen. *Constructivism in Mathematics*, vol. I. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland, 1988.

Nos últimos anos têm surgido traduções para o inglês dos principais textos fundacionais do final do século XIX e início do século XX. Todos os artigos citados neste trabalho encontram-se numa das três seguintes colectâneas:

Jean van Heijenoort (organizador). *From Frege to Gödel.* Harvard University Press, 1967. Reimpressão em 1999.

William Ewald (organizador). *From Kant to Hilbert*, vol. II. Oxford University Press, 1996.

Paolo Mancosu (organizador). *From Brouwer to Hilbert.* Oxford University Press, 1998.

As traduções para português são minhas, vertidas do inglês. As ênfases em itálico são do original. Alguns artigos de Hilbert (p. ex., a sua comunicação ao Congresso de Bolonha de 1928) encontram-se traduzidos para português no apêndice a

David Hilbert. *Fundamentos da Geometria* (edição revista e coordenada por A. J. Franco de Oliveira). Gradiva, 2003.

O seguinte ensaio é um estudo sobre o desenvolvimento do conceito de ideal em Dedekind no contexto das mudanças metodológicas que tiveram lugar na matemática do final do século XIX (tradicionalistas vs. modernos):

JEREMY AVIGAD. "Methodology and metaphysics in the development of Dedekind's theory of ideals", *The Architecture of Modern Mathematics*, José Ferreirós and Jeremy Gray (organizadores). Oxford University Press, pp. 159-186, 2006.

Para a interpretação de Gödel de 1958 e o meu próprio trabalho, consulte-se:

FERNANDO FERREIRA. "A most artistic package of a jumble of ideas", *Dialectica*. A publicar em 2008.