UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

SISTEMAS DE ANÁLISE FRACA PARA A INTEGRAÇÃO

Gilda Maria Saraiva Dias Ferreira

DOUTORAMENTO EM MATEMÁTICA
(Álgebra, Lógica e Fundamentos)

2006

UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

SISTEMAS DE ANÁLISE FRACA PARA A INTEGRAÇÃO

Gilda Maria Saraiva Dias Ferreira

DOUTORAMENTO EM MATEMÁTICA
(Álgebra, Lógica e Fundamentos)

Tese orientada pelo Professor Doutor Fernando Jorge Inocêncio Ferreira

2006

RESUMO

Esta dissertação, no domínio da *Lógica Matemática*, enquadra-se mais especificamente no âmbito dos subsistemas de aritmética de segunda ordem. De forma sucinta, identificam-se três linhas orientadoras: *teorema da conservação de Harrington* — nova demonstração; *aritmética limitada* — caracterização da classe de complexidade computacional FCH através de sistemas formais; *análise fraca/matemática recíproca* — formalização do integral de Riemann numa teoria (clássica) com contagem.

Sob a linha unificadora dos subsistemas formais de aritmética de segunda ordem, principiamos com uma breve incursão no universo das teorias RCA_0 e WKL_0, a fim de demonstrarmos o conhecido *teorema da conservação de Harrington*: WKL_0 é uma teoria Π^1_1-conservativa sobre RCA_0. A novidade reside em não se recorrer directa ou indirectamente à técnica do *forcing*, mas tão somente a ferramentas da *teoria da demonstração* como o *teorema da eliminação do corte*. Após este preâmbulo, abandonamos definitivamente as teorias com exponenciação, enveredando, no domínio da *aritmética limitada*, por sistemas mais fracos, sendo nosso propósito primordial a obtenção de teorias formais cujas funções demonstravelmente totais correspondam exactamente às funções da classe FCH — a *hierarquia das funções de contagem*. Dos sistemas formais que caracterizam FCH, destacamos três: CHCA, cuja ligação à classe é conseguida aplicando o *teorema de Herbrand*; TCA^2, resultante de sucessivos enriquecimentos 'conservativos' de um sistema cuja formalização no cálculo de sequentes de Gentzen permite, recorrendo ao teorema da eliminação do corte, relacionar com FCH; e $\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN}_0$, que via *forcing* caracteriza ainda tal classe de complexidade computacional. O interesse em FCH e suas teorias, nomeadamente TCA^2, encontra justificação no âmbito da *análise fraca*, pela possibilidade de se desenvolver uma porção significativa de análise em tal sistema, em particular a *integração à Riemann* para funções com módulo de continuidade uniforme. Mais, na linha da *matemática recíproca*, provamos que o desenvolvimento de integração requer um sistema com contagem.

Palavras chave: aritmética limitada; análise fraca; teorema da conservação de Harrington; hierarquia das funções de contagem; integral de Riemann.

ABSTRACT

This is a dissertation in *Mathematical Logic*, more precisely a work in the sphere of subsystems of second order arithmetic. The dissertation has three main guidelines: *Harrington's conservation theorem* — a new proof; *bounded arithmetic* — formal systems that characterize the computational complexity class FCH; and *weak analysis/reverse mathematics* — Riemann integral developed in a theory with counting.

Under the unified context of second order arithmetical subsystems, we start with a brief incursion into the theories $\mathsf{RCA_0}$ and $\mathsf{WKL_0}$ in order to prove the well-known conservation result: $\mathsf{WKL_0}$ is Π^1_1-conservative over $\mathsf{RCA_0}$. The novelty lies in the proof. It does not make direct or indirect use of the forcing technique, being entirely a *proof-theoretic proof*, centered in the *cut elimination theorem*.

After this preamble, we leave the theories with exponentiation behind and focus on weaker systems, in the domain of *bounded arithmetic*, with the aim of obtaining formal theories whose provably total functions are exactly the functions in the class FCH — the *hierarchy of counting functions*. Among the axiomatic systems that characterize FCH, we point out three: CHCA, whose connection to the class follows from an application of *Herbrand's theorem*; TCA^2, which results from successive (conservative) enrichments of a theory whose formalization in Gentzen's sequent calculus allows, using cut elimination, a connection with FCH; and $\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN_0}$ which is, via *forcing*, also connected to such complexity class.

The interest in FCH and its theories, viz. TCA^2, is justified in the context of *weak analysis* by the possibility of developing a significant portion of analysis in such system, namely *Riemann integration* for functions with a modulus of uniform continuity. Furthermore, in the line of *reverse mathematics*, we prove that the development of integration requires a system with counting.

Keywords: bounded arithmetic; weak analysis; Harrington's conservation theorem; hierarchy of counting functions; Riemann's integral.

AGRADECIMENTOS

Ao longo da Licenciatura em Matemática, vários foram os professores que me marcaram. De uma forma conjunta, aqui registo o meu agradecimento pelo rigor, dedicação e gosto pela Matemática que me tentaram incutir nesses primeiros anos da minha formação universitária.

Um agradecimento especial aos professores José Perdigão Dias da Silva, Luísa Galvão e Catarina Santa Clara Gomes, que me acompanharam ainda durante o ano curricular do Mestrado em Matemática (leccionando as cadeiras do mesmo) e sempre me incentivaram quer pelo seu exemplo, quer pelos seus conselhos e apoio.

O professor que devia sem dúvida encabeçar esta lista de agradecimentos mas que, dado o peso que tem na minha formação e nesta tese, é impossível ser mencionado de forma breve, e por esse motivo propositadamente encerra este pequeno tributo aos *meus professores*, é evidentemente o meu orientador, professor Fernando Ferreira. Desde que frequentei a cadeira de Lógica Matemática, no final da licenciatura, não mais perdi o contacto com tal área e com tão sábio mentor; inicialmente orientando-me em projectos de iniciação à investigação sob alçada do Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais, seguindo-se uma tese de Mestrado e culminando na inestimável ajuda na execução deste projecto de Doutoramento. A forma paciente, segura e inteligente com que me orientou jamais será esquecida e qualquer agradecimento é fraca retribuição. Apraz-me registar aqui não só a sua indiscutível qualidade a nível científico, mas também a sua disponibilidade, simpatia e honestidade, qualidades que caracterizam os grandes mestres.

Por fim um muito obrigada ao grupo de Lógica do SLM, aos meus amigos em geral (dos quais destaco a Margarida Silva e o Jorge Sampaio por críticas e sugestões concretas que me ajudaram a melhorar o aspecto gráfico desta tese) e à minha família pelo apoio garantido e incondicional, esse pilar invisível que sustenta tudo o resto.

Este trabalho foi financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia através de uma bolsa para Doutoramento de referência SFRH/BD/4859/2001 (co-financiamento do POCI 2010 e do FSE) tendo também o apoio do CMAF, entidades a quem agradeço o investimento e a confiança depositada.

CONTEÚDO

CAPÍTULO 1

'Se acaso as coisas forem coisas em si mesmas
sem precisarem de ser coisas percebidas,
para quem serão belas essas coisas?
E belas para quê?'

António Gedeão

Introdução

No final do século XIX, princípio do século XX, o esforço para reduzir a matemática a bases lógicas e seguras conduziu a várias tentativas de desenvolver a aritmética (do grego *arithmetike* i.e. 'arte de contar') por meio de sistemas formais.

Um dos mais conhecidos é o sistema de aritmética de primeira ordem PA (*Peano arithmetic*), assim designado em homenagem a Giuseppe Peano que em 1889, numa publicação em latim intitulada *Arithmetices principia nova methodo exposita*, propunha tais axiomas que funcionariam como precursores de axiomáticas mais fortes, nomeadamente de aritmética de segunda ordem, tal como o sistema formal Z_2, introduzido por David Hilbert e Paul Bernays no célebre trabalho *Grundlagen der Mathematik* [26].

O estudo que desenvolvemos ao longo desta tese insere-se no âmbito da chamada *aritmética limitada*, ou seja, estudo de teorias formais, subsistemas de Z_2 onde, ao contrário dos sistemas atrás referidos, a imposição de diferentes restrições sobre a indução e a compreensão (apenas permitidas sobre determinado tipo de fórmulas limitadas), originam diferentes subsistemas.

Dois pólos 'clássicos' de investigação no que concerne aos sistemas fracos de aritmética influenciaram fortemente este trabalho.

Um deles, na linha de investigação de Samuel Buss, estreitamente ligado à *teoria da complexidade computacional*, consiste na criação de sistemas formais visando caracterizar determinadas classes de complexidade computacional, i.e. sistemas cujas funções demonstravelmente totais correspondam exactamente às funções de determinada classe.

O outro, entroncando no trabalho de Stephen Simpson, consiste em desenvolver conceitos e resultados de análise matemática em subsistemas de aritmética de segunda ordem. Mais, no âmbito da chamada *matemática recíproca* ('fundada' por Harvey Friedman no seu artigo *Some Systems of Second Order Arithmetic and Their Use*) procura-se a axiomática mais simples onde se possa desenvolver determinado resultado de análise, na tentativa de estabelecer, sobre uma teoria base, uma equivalência entre o resultado e os axiomas adicionais necessários para o provar. O livro de referência nesta área é *Subsystems of Second Order Arithmetic* [38], escrito por Simpson em 1999.

Inseridos no contexto acima apresentado, a classe de complexidade computacional alvo do nosso estudo é FCH, a *hierarquia das funções de contagem*, e o conceito de análise que desenvolvemos no âmbito da aritmética fraca de segunda ordem (*análise fraca*) é a *integração* à Riemann. Contudo, todos os sistemas formais com que trabalhamos (à excepção dos apresentados no Capítulo 2) são sistemas subexponenciais, o que não acontece no livro [38] de Simpson, onde a teoria mais fraca aí apresentada, RCA_0, corresponde à classe das funções primitivas recursivas. Nas teorias que não demonstram a totalidade da função exponencial, optámos pelo uso de notação binária, que descreve directamente as sequências finitas de zeros e uns (na linha de várias publicações de Fernando Ferreira, e.g. [13]) em detrimento de uma notação numérica. Saliente-se também que o estudo desenvolvido nesta dissertação se enquadra e edifica no âmbito e pressupostos da *lógica clássica*.

Seguem-se algumas considerações sobre a organização e o conteúdo da tese.

No Capítulo 3 apresenta-se a classe FCH, definida por Wagner em 1986 e introduz-se uma caracterização alternativa (indutiva) de tal classe. O que se segue é a procura continuada de sistemas formais de aritmética que caracterizem FCH. Tal busca acompanhar-nos-á até final do capítulo. A primeira teoria apresentada, CHCA, é uma teoria de primeira ordem e o argumento que assegura que as funções demonstravelmente totais desse sistema são as funções da hierarquia de contagem tem como base o conhecido *teorema de Herbrand*. Na secção seguinte, as teorias introduzidas são já teorias numa linguagem de segunda ordem (ainda que com variáveis de segunda ordem limitadas), tendo a primeira, TCA, sido inspirada no sistema D^0_2 de Jan Johannsen e Chris Pollett introduzido em [27] e a seguinte resultar de um enriquecimento do sistema através do esquema de *colecção limitada*, $\mathsf{B}^1\Sigma^{1,\mathsf{b}}_\infty$. A demonstração de que TCA (teoria onde CHCA se pode imergir) caracteriza ainda FCH tem por base a formalização da teoria numa variante do *cálculo de sequentes* de Gentzen e a aplicação do *teorema da eliminação do corte*. Na última secção do capítulo, com o propósito de apresentar sistemas onde se possam formalizar noções de análise, introduzem-se as teorias TCA^2 e $\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN}_0$ numa linguagem de segunda ordem, resultando tais teorias do enriquecimento de $\mathsf{TCA} + \mathsf{B}^1\Sigma^{1,\mathsf{b}}_\infty$ por meio de *compreensão recursiva* e de um esquema de reflexão (denominado FAN_0) respectivamente. A prova de que estes sistemas enriquecidos ainda caracterizam FCH é conseguida mediante resultados de conservação em relação a teorias que já se sabe caracterizarem tal classe, usando técnicas de teoria dos modelos, nomeadamente *forcing* para lidar com o esquema $\mathsf{FAN_0}$. As tácticas usadas neste capítulo resultam de adaptações de técnicas já conhecidas e já aplicadas com sucesso noutros contextos.

O Capítulo 4, todo ele dedicado à formalização de análise em teorias fracas de segunda ordem, surge no seguimento de um artigo de António Fernandes e Fernando Ferreira *Groundwork for Weak Analysis* [10]. O objectivo central deste capítulo é desenvolver o integral de Riemann na teoria TCA^2, apresentada no capítulo anterior e associada à hierarquia das funções de contagem. Sendo BTFA — teoria tomada como base no artigo [10] — um subsistema de TCA^2, toda a edificação de conceitos analíticos aí efectuada permanece válida em TCA^2. A Secção 1, revendo tal formalização das noções mais básicas de análise nestes sistemas fracos, torna-se ponto de partida para o desenvolvimento, já na Secção 3, de outros conceitos que funcionam como alicerce para o cálculo integral. Na Secção 2 torna-se claro o porquê da necessidade de uma teoria de contagem, como base para o desenvolvimento do integral, em detrimento de teorias (como BTFA) associadas à computação em tempo polinomial. É que a teoria BTFA enriquecida com integração permite contagem. Ao longo da Secção 4 procede-se à introdução do integral de Riemann em TCA^2 para funções contínuas com módulo de continuidade uniforme e, nas secções seguintes, à apresentação de algumas propriedades a ele associadas.

Embora com profundas diferenças estruturais e de concepção, a formalização da matemática em sistemas fracos, parece estar de algum modo — ainda não cabalmente investigado — ligada a estudos na área da *análise computável*, com restrições de complexidade, de que são exemplo os trabalhos de Klaus Weihranch [44] e Ker-I Ko [29].

Antes de enveredarmos pelos meandros dos sistemas de aritmética limitada, estudados nos Capítulos 3 e 4 e que em poucas linhas tentámos apresentar, iniciamos esta tese — Capítulo 2 — com um resultado sobre subsistemas de aritmética de segunda ordem mais fortes e bem conhecidos, as 'clássicas' teorias $\mathsf{RCA_0}$ e $\mathsf{WKL_0}$. Neste capítulo é apresentada uma nova demonstração do resultado de Leo Harrington que assegura que a teoria $\mathsf{WKL_0}$ é Π^1_1-conservativa sobre a teoria $\mathsf{RCA_0}$, não através do método do forcing (como a demonstração original de Harrington) mas através da análise de demonstrações no cálculo de sequentes de Gentzen, usando somente técnicas de *teoria da demonstração*, nomeadamente a eliminação do corte.

A título de conclusão, em sucintas *notas finais*, são apresentadas algumas considerações sobre estudos no âmbito de teorias fracas, onde o presente trabalho se insere, e apontados possíveis caminhos neste universo da formalização da matemática, ainda por 'desbravar'.

CAPÍTULO 2

'A matemática é o alfabeto com
o qual Deus escreveu o mundo.'

Galileu Galilei

Prólogo sobre o teorema da conservação de Harrington

2.1 Resenha histórica

Em 1927, o matemático húngaro Dénes König ([32]) estabelecia o que é hoje conhecido como *Lema de König*: *Toda a árvore infinita de ramificação finita tem um caminho infinito.*

Nos anos 70/80, Harvey Friedman interessou-se pela restrição deste princípio a árvores binárias, versão essa que, por razões óbvias, denominou *Lema Fraco de König*, WKL. Em [24], Friedman notou que o poder de tal lema se diluia de certa forma no contexto de alguns fragmentos de aritmética, mais concretamente estendeu o seguinte resultado de Charles Parsons ([34]): a teoria RCA_0 *é* Π^0_2*-conservativa sobre a aritmética primitica recursiva*, observando que tal resultado de conservação era ainda válido quando aplicado à teoria RCA_0 acrescida do lema fraco de König, isto é, se uma asserção Π^0_2 se demonstra na teoria $\mathsf{RCA}_0 + \mathsf{WKL}$ então já se demonstra no âmbito da aritmética primitiva recursiva. Para um enquadramento mais detalhado e demonstrações dos resultados de Parsons e Friedman veja [18] e [35], [37], [38] respectivamente.

Mais tarde Leo Harrington melhorou o anterior resultado de Friedman observando que a teoria RCA_0 enriquecida pelo lema fraco de König é, de facto, Π^1_1-conservativa sobre RCA_0. Embora Harrington nunca tenha chegado a publicar este resultado, a sua demonstração, usando o método do forcing, pode agora ser encontrada em [38].

Desde então tem-se procurado uma demonstração alternativa completamente no âmbito da teoria da demonstração. De facto, em 1996, Jeremy Avigad consegue uma tal demonstração [1], formalizando o argumento de forcing (usado por Harrington) em RCA_0.

Neste capítulo apresentamos uma demonstração, cuja novidade consiste em evitar por completo o método do forcing, baseando-se na análise das demonstrações de asserções Π^1_1 em $\mathsf{RCA}_0 + \mathsf{WKL}$ através do cálculo de sequentes e usando o teorema da eliminação do corte. Tal demonstração foi submetida para publicação no artigo [20] elaborado em conjunto com Fernando Ferreira, intitulado *Harrington's Conservation Theorem Redone*. Nesta tese a demonstração é apresentada de forma muito mais detalhada, fazendo-se a análise exaustiva de praticamente todas as regras do cálculo de sequentes.

2.2 Notação

Na presente secção descrevemos a linguagem usada ao longo do capítulo e revemos de forma sucinta os princípios e teorias envolvidos no resultado de conservação de Harrington e já mencionados na resenha histórica.

A linguagem adoptada neste capítulo é a usualmente designada *linguagem da aritmética de segunda ordem*, $\mathcal{L}_2$ (veja [38] para uma descrição pormenorizada). Sendo uma linguagem de segunda ordem, é composta por dois tipos de variáveis: variáveis de primeira ordem que denotaremos pelas letras minúsculas $x, y, z, w, \ldots, a, b, \ldots$ e variáveis de segunda ordem denotadas pelas maiúsculas $X, Y, Z, W, \ldots, A, B, \ldots$ No modelo standard as primeiras variam nos números naturais e as segundas nos subconjuntos dos naturais. Trata-se de uma linguagem com igualdade (de primeira ordem), composta pelos seguintes símbolos não lógicos: constantes de primeira ordem $0, 1$; símbolos funcionais binários $+, \times$ também de primeira ordem e símbolos relacionais binários $<, \in$ envolvendo no primeiro caso objectos de primeira ordem e no segundo um termo (objecto de primeira ordem) e uma variável de segunda ordem. As definições de *termo* e *fórmula* são as usuais, sendo um termo sempre um objecto de primeira ordem e uma fórmula construída a partir das fórmulas atómicas $t_1 = t_2, t_1 < t_2, t_1 \in A$, com t_1 e t_2 termos, por meio dos usuais conectivos proposicionais e quantificadores (primeira e segunda ordem). Usaremos os símbolos $\neq, \not<, \leq, \not\leq$, com o significado usual, abreviando certas asserções da linguagem, e à definição de fórmula acrescentamos a possibilidade desta ser construída a partir de *quantificações limitadas de primeira ordem*, ou seja, consideramos $\forall x \leq t F(x)$ e $\exists x \leq t F(x)$, com t um termo onde x não ocorre, como novas fórmulas e não como meras abreviaturas de $\forall x(x \leq t \to F(x))$ e $\exists x(x \leq t \wedge F(x))$ respectivamente.

Quer em relação às variáveis de primeira ordem, quer em relação às de segunda ordem, fazemos distinção entre variáveis mudas e livres consoante sejam ou não variáveis sujeitas a quantificação.

Consoante a complexidade das fórmulas a nível das quantificações que possui, estas são agrupadas em diferentes classes. Por *fórmula limitada* ou *fórmula* Σ^b_∞ entendemos uma fórmula de $\mathcal{L}_2$ sem quantificações de segunda ordem e onde todas as quantificações de primeira ordem são limitadas. Uma fórmula diz-se Σ^0_1 se é limitada ou se tem a forma $\exists x F_0(x)$, onde F_0 é uma fórmula limitada. Uma fórmula diz-se Π^1_1 se for de primeira ordem ou da forma $\forall X F(X)$, onde F é uma fórmula de primeira ordem (por fórmula de primeira ordem entendemos uma fórmula sem quantificações de segunda ordem). Note que em todas as classes as fórmulas podem ter variáveis livres de primeira e segunda ordem.

Uma vez estabelecida a linguagem, façamos uma rápida revisão das teorias envolvidas no resultado de conservação de Harrington.

Comecemos pelo bem conhecido subsistema de Z_2, RCA_0. O acrónimo RCA vem de *Recursive Comprehension Axiom* e o índice 0 indica que há restrições sobre a indução.

Definição 2.1 RCA_0 *é a teoria de segunda ordem na linguagem $\mathcal{L}_2$ cujos axiomas são o fecho universal das seguintes fórmulas:*

- *Axiomas básicos*
  1. $x+1 \neq 0$
  2. $x+1 = y+1 \rightarrow x = y$
  3. $x+0 = x$
  4. $x+(y+1) = (x+y)+1$
  5. $x \times 0 = 0$
  6. $x \times (y+1) = (x \times y)+x$
  7. $x \not< 0$
  8. $x < y+1 \leftrightarrow x < y \vee x = y$

- *Esquema de indução Σ^0_1*

  $F(0) \wedge \forall x(F(x) \rightarrow F(x+1)) \rightarrow \forall x F(x)$,

  com F uma fórmula Σ^0_1 que pode ter outras variáveis livres de primeira e segunda ordem

- *Esquema de compreensão recursiva*

  $\forall x(F(x) \leftrightarrow \neg G(x)) \rightarrow \exists X \forall x(x \in X \leftrightarrow F(x))$,

  com F e G fórmulas Σ^0_1 que podem ter outras variáveis livres de primeira e segunda ordem e X uma variável de segunda ordem que não ocorre em F.

As funções demonstravelmente totais da teoria RCA_0 são as funções *primitivas recursivas.* Note que, embora o esquema de compreensão recursiva — que dá o nome ao sistema — assegure, no modelo, a existência dos conjuntos recursivos, tal não entra em contradição com o anteriormente exposto pois, ao nível da teoria, a formação de conjuntos requer que a equivalência no antecedente do esquema se possa provar em RCA_0.

Enquanto a teoria Z_2 possui indução e compreensão para todas as fórmulas, os seus subsistemas (dos quais RCA_0 é um primeiro exemplo) resultam de Z_2 por imposição de diferentes restrições sobre a indução e a formação de conjuntos. Um outro seu subsistema é a seguinte teoria conhecida por WKL_0.

Definição 2.2 *A teoria* WKL_0 *é a teoria que resulta de* RCA_0 *acrescentando o seguinte axioma, denominado lema fraco de König e denotado por* WKL *(acrónimo para Weak König's Lemma):*

$$\forall T(T\,\textit{é uma árvore infinita binária} \rightarrow \exists X(X\,\textit{é um caminho infinito em}\ T)).$$

Considerando a bijecção natural que existe entre os números naturais ($\mathbb{N}$) e as sequências finitas de zeros e uns ($2^{<\omega}$), o conjunto T (considerado como conjunto de palavras binárias) diz-se uma *árvore infinita binária* se qualquer subpalavra inicial de uma palavra em T ainda pertence a T e no conjunto existem palavras de qualquer comprimento finito. Um subconjunto X de T diz-se um *caminho infinito em* T se for uma árvore binária infinita em que todas as palavras estão relacionadas pela relação de subpalavra inicial.

Quer RCA_0 quer o anterior princípio não construtivo, WKL, desempenham um papel muito relevante no programa da *matemática recíproca*; RCA_0 porque é a teoria base sobre a qual se classificam os teoremas matemáticos e WKL porque permite aferir a força de vários teoremas. Em [38], Simpson provou que importantes resultados matemáticos, como *o teorema da cobertura de Heine-Borel*, o *princípio do máximo* ou o facto de *toda a função contínua num compacto ser uniformemente contínua* são equivalentes, sobre RCA_0, ao lema fraco de König.

Uma vez que WKL é equivalente, sobre RCA_0, ao seguinte princípio que designamos por FAN_0 (também conhecido, no contexto *feasible*, por C^- e por *reflexão* Π^1_1*-estrita*)[1]:

$$\forall X \exists x F_0(X,x) \rightarrow \exists w \forall X \exists x \leq w F_0(X,x),$$

onde F_0 é uma fórmula limitada (possivelmente com outras variáveis livres de primeira e segunda ordem); temos que WKL_0 e $\mathsf{RCA}_0 + \mathsf{FAN}_0$ são a mesma teoria. A equivalência (do ponto de vista clássico) entre WKL e FAN_0 é bem conhecida, sendo tal equivalência válida, inclusive, sobre RCA_0, o que resulta como caso particular do observado na Subsecção 3.4.1, Capítulo 3.

Para provarmos o resultado de conservação de Harrington consideramos a teoria $\mathsf{RCA}_0 + \mathsf{FAN}_0$ ainda numa outra forma (equivalente) ligeiramente alterada que a seguir se introduz.

[1] A designação de FAN é devida a Brower. O índice zero indica que o princípio somente se aplica a fórmulas limitadas.

Definimos RCA_0^- como sendo a teoria RCA_0 substituindo o esquema de compreensão recursiva, pelo seguinte esquema de *compreensão limitada*:

$$\exists X \forall x (x \in X \leftrightarrow F_0(x)),$$

onde F_0 é uma fórmula limitada, possívelmente com outras variáveis livres de primeira e segunda ordem, mas onde X não ocorre.

Proposição 2.1 $\mathsf{RCA}_0^- + \mathsf{FAN}_0$ *e* WKL_0 *são a mesma teoria.*

Demonstração
Como a teoria WKL_0 coincide com a teoria $\mathsf{RCA}_0 + \mathsf{FAN}_0$, basta provar que $\mathsf{RCA}_0^- + \mathsf{FAN}_0$ prova o esquema de compreensão recursiva.

Suponhamos que $\forall u (\exists y F_0(u, y) \leftrightarrow \forall z G_0(u, z))$, onde F_0 e G_0 são fórmulas limitadas.

Provemos que $\forall w \exists X \forall x \leq w \forall u, y, z \leq x((F_0(u, y) \rightarrow u \in X) \wedge (u \in X \rightarrow G_0(u, z)))$.

Fixando w arbitrário, o conjunto $X := \{u : \exists y \leq w F_0(u, y)\}$ verifica o pretendido. Note que em $\mathsf{RCA}_0^- + \mathsf{FAN}_0$, o esquema de compreensão limitada assegura a existência de tal conjunto.

Pelo contra-recíproco do esquema FAN_0 temos que $\exists X \forall x \forall u, y, z \leq x((F_0(u, y) \rightarrow u \in X) \wedge (u \in X \rightarrow G_0(u, z)))$, logo $\exists X \forall u, y, z((F_0(u, y) \rightarrow u \in X) \wedge (u \in X \rightarrow G_0(u, z)))$ e portanto $\exists X \forall u((\exists y F_0(u, y) \rightarrow u \in X) \wedge (u \in X \rightarrow \forall z G_0(u, z)))$ concluindo-se que $\exists X \forall u (u \in X \leftrightarrow \exists y F_0(u, y)))$.

$\square$

Pelo visto atrás, o *teorema da conservação de Harrington* pode ser formulado da seguinte forma: a teoria $\mathsf{RCA}_0^- + \mathsf{FAN}_0$ é Π_1^1-conservativa sobre RCA_0.

A demonstração alternativa deste resultado que adiante apresentamos e que como publicitámos recorre apenas a técnicas de teoria da demonstração parte do resultado enunciado numa forma mais forte: $\mathsf{RCA}_0^- + \mathsf{FAN}_0$ é Π_1^1-conservativa sobre RCA_0^- (que implica imediatamente o resultado de Harrington). Como envolve apenas as teorias de segunda ordem RCA_0^- e $\mathsf{RCA}_0^- + \mathsf{FAN}_0$ são estes sistemas que formalizamos na próxima secção, numa variante do cálculo de sequentes de Gentzen.

2.3 Cálculo de sequentes

O *cálculo de sequentes*, também designado por LK (do termo alemão *Logischer Kalkül*), é um sistema de demonstração bem conhecido, introduzido em 1935 pelo matemático alemão Gerhard Gentzen [25] (tradução inglesa em [39]).

Nesta secção recorremos a uma versão do cálculo de sequentes de Gentzen, enriquecida com novas regras de inferência relacionadas com quantificações de primeira ordem limitadas e de segunda ordem, que ainda designamos por LK e que se encontra detalhadamente descrita em [22] (no contexto de uma linguagem binária com variáveis de segunda ordem limitadas).

Veja também [5], [6], [40] e [4]. Assim sendo, limitamo-nos a relembrar, de forma sucinta, a mecânica das demonstrações em LK e a explicitar as regras de inferência permitidas.

Numa demonstração em LK, cada linha é constituída por um ou mais sequentes. Um *sequente* tem a forma $F_1, F_2, \ldots, F_n \longrightarrow G_1, G_2, \ldots, G_r$, significando que a conjunção do antecedente, i.e. das fórmulas F_i's, implica a disjunção do consequente, ou seja, das fórmulas G_j's.

As demonstrações em LK, que também designaremos por LK-demonstrações, são esquemas em forma de árvore, tendo os sequentes do topo (conhecidos como *axiomas* ou *sequentes iniciais*) a forma $A \longrightarrow A$, com A fórmula atómica e obedecendo a passagem dos sequentes de uma linha da demonstração para a linha imediatamente abaixo às regras de inferência que a seguir se apresentam.

Sendo S um conjunto de sequentes, se permitirmos que além dos sequentes iniciais de LK as demonstrações permitam também como axiomas os sequentes de S, dizemos que estamos perante uma LK_S-demonstração.

Regras de inferência do cálculo de sequentes de segunda ordem

- Regras estruturais fracas

(permutação) $\quad p:e \quad \dfrac{\Gamma, F, G, \Pi \longrightarrow \Delta}{\Gamma, G, F, \Pi \longrightarrow \Delta} \qquad p:d \quad \dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta, F, G, \Lambda}{\Gamma \longrightarrow \Delta, G, F, \Lambda}$

(contracção) $\quad c:e \quad \dfrac{F, F, \Gamma \longrightarrow \Delta}{F, \Gamma \longrightarrow \Delta} \qquad c:d \quad \dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta, F, F}{\Gamma \longrightarrow \Delta, F}$

(enfraquecimento) $\quad e:e \quad \dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{F, \Gamma \longrightarrow \Delta} \qquad e:d \quad \dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta, F}$

- Regra do corte

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, F \quad F, \Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta}$$

- Regras proposicionais

$\neg : e \quad \dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta, F}{\neg F, \Gamma \longrightarrow \Delta} \qquad \neg : d \quad \dfrac{F, \Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \neg F}$

$\wedge : e \quad \dfrac{F, G, \Gamma \longrightarrow \Delta}{F \wedge G, \Gamma \longrightarrow \Delta} \qquad \wedge : d \quad \dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta, F \quad \Gamma \longrightarrow \Delta, G}{\Gamma \longrightarrow \Delta, F \wedge G}$

$\vee : e \quad \dfrac{F, \Gamma \longrightarrow \Delta \quad G, \Gamma \longrightarrow \Delta}{F \vee G, \Gamma \longrightarrow \Delta} \qquad \vee : d \quad \dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta, F, G}{\Gamma \longrightarrow \Delta, F \vee G}$

$\rightarrow : e \quad \dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta, F \quad G, \Gamma \longrightarrow \Delta}{F \rightarrow G, \Gamma \longrightarrow \Delta} \qquad \rightarrow : d \quad \dfrac{F, \Gamma \longrightarrow \Delta, G}{\Gamma \longrightarrow \Delta, F \rightarrow G}$

- Regras de quantificação

$\forall : e \quad \dfrac{F(t), \Gamma \longrightarrow \Delta}{\forall x F(x), \Gamma \longrightarrow \Delta} \qquad \forall : d \quad \dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta, F(b)}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \forall x F(x)}$

$\exists : e \quad \frac{F(b),\Gamma\longrightarrow\Delta}{\exists x F(x),\Gamma\longrightarrow\Delta} \qquad \exists : d \quad \frac{\Gamma\longrightarrow\Delta,F(t)}{\Gamma\longrightarrow\Delta,\exists x F(x)}$

$\forall_{\leq} : e \quad \frac{F(t),\Gamma\longrightarrow\Delta}{t\leq s,\forall x\leq s F(x),\Gamma\longrightarrow\Delta} \qquad \forall_{\leq} : d \quad \frac{b\leq t,\Gamma\longrightarrow\Delta,F(b)}{\Gamma\longrightarrow\Delta,\forall x\leq t F(x)}$

$\exists_{\leq} : e \quad \frac{b\leq t,F(b),\Gamma\longrightarrow\Delta}{\exists x\leq t F(x),\Gamma\longrightarrow\Delta} \qquad \exists_{\leq} : d \quad \frac{\Gamma\longrightarrow\Delta,F(t)}{t\leq s,\Gamma\longrightarrow\Delta,\exists x\leq s F(x)}$

$\forall_{2^a} : e \quad \frac{F(A),\Gamma\longrightarrow\Delta}{\forall X F(X),\Gamma\longrightarrow\Delta} \qquad \forall_{2^a} : d \quad \frac{\Gamma\longrightarrow\Delta,F(B)}{\Gamma\longrightarrow\Delta,\forall X F(X)}$

$\exists_{2^a} : e \quad \frac{F(B),\Gamma\longrightarrow\Delta}{\exists X F(X),\Gamma\longrightarrow\Delta} \qquad \exists_{2^a} : d \quad \frac{\Gamma\longrightarrow\Delta,F(A)}{\Gamma\longrightarrow\Delta,\exists X F(X)}$

com b *variável própria* de primeira ordem, B *variável própria* de segunda ordem, i.e. variáveis livres que não ocorrem no sequente de baixo; F, G fórmulas; Γ, Π, Δ, Λ sequências finitas de fórmulas separadas por vírgulas; t e s termos e A variável de segunda ordem.

No cálculo de sequentes, recorremos ainda à noção de *abstract* (veja [40] para uma definição detalhada deste conceito se bem que num contexto notacional ligeiramente diferente). Os abstracts estão associados a determinadas fórmulas e são denotados por $V, U, \ldots$ Sucintamente, sendo a e A variáveis livres de primeira e segunda ordem respectivamente, $F(A)$ uma fórmula e V um abstract para a fórmula $G(a)$, temos que $F(V)$ denota a fórmula que se obtém de $F(A)$, substituindo todas as ocorrências de $s \in A$ por $G(s)$ (com mudanças de variáveis sempre que existam conflitos entres as mesmas).

Note que os abstracts não são expressões formais da linguagem, são apenas meta-expressões auxiliares.

O modo mais imediato de formalizar a teoria RCA_0^- na variante do cálculo de sequentes de Gentzen atrás apresentada é através de LK_S, sendo S o conjunto de sequentes da forma $\longrightarrow F$, com F axioma de RCA_0^-, i.e. permitindo que os axiomas da teoria sejam possíveis sequentes iniciais. Contudo, por questões de complexidade, a formalização de RCA_0^- no cálculo de sequentes com que trabalhamos, que denotamos por $\mathsf{LK}_{\mathsf{RCA}_0^-}$, vê alguns axiomas (nomeadamente indução e compreensão) substituidos por novas regras de inferência.

No que se segue, a designação *axiomas para a igualdade* abarca os seguintes sequentes: $\longrightarrow t_1 = t_1$; $t_1 = s_1, t_2 = s_2 \longrightarrow t_1 + t_2 = s_1 + s_2$; $t_1 = s_1, t_2 = s_2 \longrightarrow t_1 \times t_2 = s_1 \times s_2$; $t_1 = s_1$, $t_2 = s_2, t_1 < t_2 \longrightarrow s_1 < s_2$; $t_1 = s_1, t_2 = s_2, t_1 = t_2 \longrightarrow s_1 = s_2$; $t_1 = s_1, t_1 \in A \longrightarrow s_1 \in A$, com t_1, t_2, s_1, s_2 termos e A variável de segunda ordem.

Definição 2.3 $\mathsf{LK}_{\mathsf{RCA}_0^-}$ *denota o cálculo de sequentes que, além dos axiomas da forma $A\longrightarrow A$, com A fórmula atómica e dos axiomas para a igualdade, admite ainda sequentes iniciais da forma $\longrightarrow F(\bar{s})$, com F axioma básico de* RCA_0 *e $\bar{s}$ termos quaisquer; e além das regras de inferência para o cálculo de sequentes de segunda ordem atrás apresentadas, admite ainda as seguintes regras:*

$$Ind\,\frac{F(a),\Gamma\longrightarrow F(a+1)}{F(0),\Gamma\longrightarrow F(t)}\quad,$$

com F fórmula Σ^0_1, a variável própria e t termo;

$$\forall_{2^a}{:}e\,\frac{F(V),\Gamma\longrightarrow\Delta}{\forall X F(X),\Gamma\longrightarrow\Delta}\qquad\qquad \exists_{2^a}{:}d\,\frac{\Gamma\longrightarrow\Delta,F(V)}{\Gamma\longrightarrow\Delta,\exists X F(X)}\quad,$$

com V abstract para fórmula limitada e F fórmula qualquer.

Notámos as duas últimas regras com expressões já usadas para denominar outras. Observe contudo que as primeiras podem ser substituídas por estas últimas (bastanto considerar V abstract para a fórmula $a \in A$), sendo que de agora em diante por regras $\forall_{2^a}$:e e $\exists_{2^a}$:d entendemos estas últimas inferências que recorrem a abstracts.

Para garantirmos que, de facto, a teoria RCA_0^- se pode formalizar no cálculo de sequentes de Gentzen através de $\mathsf{LK}_{\mathsf{RCA}_0^-}$, basta provarmos que acrescentar a LK o axioma-esquema de indução é equivalente a acrescentar a regra Ind e acrescentar o axioma-esquema de compreensão é equivalente a acrescentar as regras $\forall_{2^a}$:e e $\exists_{2^a}$:d. É esse estudo que fazemos de seguida.

Comecemos por provar que do sequente inicial correspondente à indução $\longrightarrow \underbrace{F(0)\wedge\forall x(F(x)\to F(x+1))\to\forall x F(x)}_{S}$, se deduz a regra Ind.

$$\text{(corte)}\,\cfrac{\cfrac{\cfrac{F(0)\longrightarrow F(0)}{F(0),\Gamma\longrightarrow F(0)}\qquad \cfrac{(\forall:d)\,\cfrac{\cfrac{F(a),\Gamma\longrightarrow F(a+1)}{\Gamma\longrightarrow F(a)\to F(a+1)}\,(\to:d)}{\Gamma\longrightarrow\forall x(F(x)\to F(x+1))}}{F(0),\Gamma\longrightarrow\forall x(F(x)\to F(x+1))}}{F(0),\Gamma\longrightarrow F(0)\wedge\forall x(F(x)\to F(x+1))}\,(\wedge:d)\qquad \cfrac{\longrightarrow S}{F(0)\wedge\forall x(F(x)\to F(x+1))\longrightarrow\forall x F(x)}}{\text{(usa corte)}\,\cfrac{F(0),\Gamma\longrightarrow\forall x F(x)}{F(0),\Gamma\longrightarrow F(t)}}$$

O duplo traço horizontal na demonstração indica que, nessa passagem específica, é usada mais do que uma regra. Obviamente a demonstração pode ser apresentada na íntegra, o recurso ao duplo traço faz-se apenas em situações que não levantem quaisquer dúvidas a fim de abreviar a demonstração.

Quer a passagem que parte de $\longrightarrow S$, quer a última advêm de aplicações bem conhecidas da regra do corte, que se encontram explicitadas em [22].

Provemos agora que da regra Ind se deriva o axioma de indução.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{F(a)\longrightarrow F(a)}{F(a)\longrightarrow F(a),F(a+1)}}{F(a)\longrightarrow F(a+1),F(a)} \qquad \dfrac{\dfrac{F(a+1)\longrightarrow F(a+1)}{F(a),F(a+1)\longrightarrow F(a+1)}}{F(a+1),F(a)\longrightarrow F(a+1)}}{F(a)\to F(a+1),F(a)\longrightarrow F(a+1)}\,(\to: e)}{\forall x(F(x)\to F(x+1)),F(a)\longrightarrow F(a+1)}\,(\forall: e)}{F(a),\forall x(F(x)\to F(x+1))\longrightarrow F(a+1)}}{F(0),\forall x(F(x)\to F(x+1))\longrightarrow F(b)}\,(Ind)}{F(0),\forall x(F(x)\to F(x+1))\longrightarrow \forall x F(x)}\,(\forall: d)}{F(0)\wedge\forall x(F(x)\to F(x+1))\longrightarrow \forall x F(x)}\,(\wedge: e)}{\longrightarrow F(0)\wedge\forall x(F(x)\to F(x+1))\to \forall x F(x)}\,(\to: d)
$$

Note que, nos dois exemplos anteriores de demonstrações no cálculo de sequentes, pode parecer que estamos ilegitimamente a partir de sequentes iniciais da forma $A\longrightarrow A$, em que A não é necessariamente uma fórmula atómica. Tal abuso não constitui problema, uma vez que se prova, por indução na complexidade da fórmula, que o sequente $A\longrightarrow A$ (com A fórmula qualquer) se deduz em LK (não sendo sequer necessário recorrer à regra do corte). Veja [22].

Analisando agora brevemente o axioma-esquema de compreensão e as regras $\forall_{2^a}$:e e $\exists_{2^a}$:d, começamos por provar que partindo do axioma de compreensão $\longrightarrow\exists X\forall x(x\in X\leftrightarrow F_0(x))$, com F_0 fórmula limitada se deduzem as regras.

Suponhamos que temos $F(V),\Gamma\longrightarrow\Delta$, para V abstract de uma fórmula limitada G. Como por hipótese $\longrightarrow\exists X\forall x(x\in X\leftrightarrow G(x))$, temos $\longrightarrow\exists X(F(V)\leftrightarrow F(X))$. Fixando A tal que $F(V)\leftrightarrow F(A)$, de $F(V),\Gamma\longrightarrow\Delta$ temos $F(A),\Gamma\longrightarrow\Delta$, logo em LK prova-se $\forall XF(X),\Gamma\longrightarrow\Delta$. Com um raciocínio análogo obtém-se a inferência $\exists_{2^a}$:d.

Reciprocamente sendo válidas as regras e sendo F_0 uma fórmula limitada, vejamos que temos $\longrightarrow\exists X\forall x(x\in X\leftrightarrow F_0(x))$.

Seja V o abstract associado a F_0. Seja F a fórmula definida por $F(A):=\forall x(x\in A\leftrightarrow F_0(x))$. De $\longrightarrow F(V)$, pela regra $\exists_{2^a}$:d temos $\longrightarrow\exists XF(X)$, ou seja $\longrightarrow\exists X\forall x(x\in X\leftrightarrow F_0(x))$.

Em [4] (página 164) ou em [40] (página 172) pode ver-se um resultado mais geral a propósito do esquema de compreensão introduzido no cálculo de sequentes através de axiomas ou de regras. Mostra-se que, sendo ϕ um conjunto de fórmulas fechadas para a substituição, no sentido em que para toda a fórmula F em ϕ e todo o abstract V associado a uma fórmula em ϕ, $F(V)$ é ainda uma fórmula em ϕ (situação verificada quando tomamos todas as fórmulas limitadas) então o axioma-esquema de compreensão para essas fórmulas em ϕ é equivalente às regras $\forall_{2^a}$:e e $\exists_{2^a}$:d com abstracts de fórmulas em ϕ.

Seguindo uma estratégia idêntica à usada a propósito de RCA_0^-, procede-se em seguida à formalização da teoria $\mathsf{RCA}_0^-+\mathsf{FAN}_0$ no cálculo de sequentes de Gentzen através de $\mathsf{LK}_{\mathsf{FAN}}$, sendo $\mathsf{LK}_{\mathsf{FAN}}$ idêntico a $\mathsf{LK}_{\mathsf{RCA}_0^-}$, acrescentando-se apenas uma nova regra para o princípio FAN_0. Antes de introduzirmos tal inferência notemos que, por indução na complexidade da fórmula F_0, se prova o seguinte lema.

Lema 2.1 *Sendo $F_0(A, \bar{b})$ uma fórmula limitada, onde $\bar{b}$ indica a possível existência de várias variáveis de primeira ordem, podemos associar-lhe um termo $t_{F_0}(\bar{b})$ de forma a que a teoria RCA_0^- prove:*

$$\forall s \in \{0,1\}^{t_{F_0}(\bar{b})}(\forall x < t_{F_0}(\bar{b})(x \in A \leftrightarrow s_x = 0) \rightarrow (F_0(A, \bar{b}) \leftrightarrow F_0^*(s, \bar{b}))),$$

onde $s \in \{0,1\}^{t_{F_0}(\bar{b})}$ significa que s é uma sequência binária de comprimento $t_{F_0}(\bar{b})$, s_x é o valor da sequência s no ponto x (tendo valor 0 se x não for menor que o comprimento de s), e F_0^* se obtém a partir de F_0 substituindo as ocorrências de $q \in A$ pela expressão $s_q = 0$.

Estamos agora em condições de apresentar e motivar a *regra Fan_0* que completa a definição do cálculo de sequentes $\mathsf{LK}_{\mathsf{FAN}}$. É ela a seguinte inferência:

$$\text{Fan}_0 \, \frac{\Gamma \longrightarrow \exists x F_0(A, x, \bar{b})}{\Gamma \longrightarrow \exists v \forall s \in \{0,1\}^{t(v,\bar{b})} \exists x \leq v F_0^*(s, x, \bar{b})} \quad ,$$

onde F_0 é uma fórmula limitada, A é uma variável própria de segunda ordem e $t(v, \bar{b})$ é o termo associado (segundo o lema anterior) à fórmula limitada $\exists x \leq v F_0(A, x, \bar{b})$.

Informalmente, servindo-nos do lema anterior e da possibilidade de codificar conjuntos finitos através de números naturais, a ideia da anterior regra é que partindo de $\forall X \exists x F_0(X, x)$ se conclui $\exists v \forall X \exists x \leq v F_0(X, x)$, expresso por meio de uma fórmula Σ_1^0.

Vejamos que, de facto, em $\mathsf{LK}_{\mathsf{RCA}_0^-}$ acrescentar como sequente inicial o axioma-esquema FAN_0 é equivalente a acrescentar a regra Fan_0.

Pelo estudo anterior (e usando a notação acima fixada), imediatamente nos apercebemos que em RCA_0^- se prova que

$$\exists v \forall X \exists x \leq v F_0(X, x, \bar{b}) \leftrightarrow \exists v \forall s \in \{0,1\}^{t(v,\bar{b})} \exists x \leq v F_0^*(s, x, \bar{b}).$$

O traço ponteado nas demonstrações que se seguem remete para a equivalência anterior.

Vejamos, então, que do axioma-esquema FAN_0 se deduz a regra Fan_0. Seja $F_0(A, a, \bar{b})$ uma fórmula limitada onde todas as variáveis livres de primeira ordem se encontram indicadas.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \longrightarrow \exists x F_0(A, x, \bar{b})}{\Gamma \longrightarrow \forall X \exists x F_0(X, x, \bar{b})}(\forall_{2^a} : d) \qquad \dfrac{\longrightarrow \forall X \exists x F_0(X, x, \bar{b}) \rightarrow \exists v \forall X \exists x \leq v F_0(X, x, \bar{b})}{\forall X \exists x F_0(X, x, \bar{b}) \longrightarrow \exists v \forall X \exists x \leq v F_0(X, x, \bar{b})}}{\Gamma \longrightarrow \exists v \forall X \exists x \leq v F_0(X, x, \bar{b})}(\text{corte})}{\Gamma \longrightarrow \exists v \forall s \in \{0,1\}^{t(v,\bar{b})} \exists x \leq v F_0^*(s, x, \bar{b})}$$

Reciprocamente, provemos que da regra se deduz o axioma-esquema.

$$\dfrac{\dfrac{\exists x F_0(A,x,\bar{b})\longrightarrow\exists x F_0(A,x,\bar{b})}{\forall X\exists x F_0(X,x,\bar{b})\longrightarrow\exists x F_0(A,x,\bar{b})}\,(\forall_{2^a}:e)}{\forall X\exists x F_0(X,x,\bar{b})\longrightarrow\exists v\forall s\in\{0,1\}^{t(v,\bar{b})}\exists x\leq vF_0^*(s,x,\bar{b})}\,(\mathrm{Fan}_0)$$
$$\vdots$$
$$\dfrac{\forall X\exists x F_0(X,x,\bar{b})\longrightarrow\exists v\forall X\exists x\leq vF_0(X,x,\bar{b})}{\longrightarrow\forall X\exists x F_0(X,x,\bar{b})\to\exists v\forall X\exists x\leq vF_0(X,x,\bar{b})}\,(\to:d)$$

Provámos assim que $\mathsf{LK_{FAN}}$ é efectivamente uma formalização da teoria $\mathsf{RCA}_0^- + \mathsf{FAN}_0$ no cálculo de sequentes.

Um dos resultados mais usados no estudo das provas formais fornecidas pelo cálculo de sequentes é o *teorema da eliminação do corte*, que permite considerar (mediante certas condições) provas sem qualquer ocorrência da regra do corte. Tal resultado, no contexto do cálculo de sequentes de primeira ordem, foi introduzido por Gentzen em [25] e é por vezes designado por *Gentzen's Hauptsatz*. Observando [40] (proposição 16.2) e [5] (página 109) conclui-se que o teorema da eliminação do corte é válido em LK, i.e. existindo uma LK-demonstração do sequente $\Gamma\longrightarrow\Delta$, existe uma LK-demonstração do mesmo sequente sem qualquer ocorrência da regra do corte.

Já $\mathsf{LK_{FAN}}$ verifica uma versão mais fraca do anterior resultado conhecida como *teorema da eliminação do corte livre*, que dado o papel relevante que desempenha no que se segue, se passa a enunciar.

Teorema 2.1 (Teorema da eliminação do corte livre) *Sendo P uma $\mathsf{LK_{FAN}}$-demonstração de $\Gamma\longrightarrow\Delta$, pode construir-se P^* uma $\mathsf{LK_{FAN}}$-demonstração do mesmo sequente sem cortes livres, i.e. em todas as ocorrências da regra do corte (na demonstração P^*) pelo menos uma das duas fórmulas auxiliares (fórmulas do corte) é ancorada.*

Uma definição detalhada dos conceitos envolvidos no anterior teorema encontra-se por exemplo em [4] (página 74). Modificamos, contudo, a definição de fórmula ancorada permitindo que esta possa também ser descendente directo de uma fórmula principal da regra Fan_0. O impacto que a introdução de novos sequentes iniciais e regras para a indução e compreensão tem a propósito da eliminação dos cortes encontra-se em [6] (página 46), [40] (página 173) e [4] (páginas 74 e 171) e tendo em conta que, com a alteração na noção de fórmula ancorada, a regra Fan_0 também não contitui problema, estabelece-se o anterior teorema.

Estamos agora em condições de apresentar a anunciada demonstração alternativa do teorema da conservação de Harrington.

2.4 Nova demonstração

Teorema 2.2 *A teoria $\mathsf{RCA}_0^- + \mathsf{FAN}_0$ é Π^1_1-conservativa sobre a teoria RCA_0^-.*

Demonstração

Suponhamos que $\mathsf{RCA}_0^- + \mathsf{FAN}_0 \vdash \forall X F(X)$, com F uma fórmula de primeira ordem. Então existe uma $\mathsf{LK}_{\mathsf{FAN}}$-demonstração do sequente $\longrightarrow F(A)$. Pelo teorema da eliminação do corte livre, existe uma $\mathsf{LK}_{\mathsf{FAN}}$-demonstração de $\longrightarrow F(A)$, que denotaremos por P, sem cortes livres. Sendo todos os cortes ancorados, estes aplicam-se apenas a fórmulas Σ_1^0. Como o sequente final é composto por uma fórmula de primeira ordem e nos sequentes ao longo da demonstração apenas figuram (a menos de fórmulas limitadas) subfórmulas de fórmulas no sequente final ou subfórmulas de fórmulas do corte, concluimos que a demonstração só possui fórmulas de primeira ordem, i.e. não possui quantificações de segunda ordem.

A menos da ordem das fórmulas, todo o sequente da demonstração P tem a forma:

$$(\star)\ \exists w_1 H_1(w_1, \overline{A}), \ldots, \exists w_n H_n(w_n, \overline{A}), \Gamma \longrightarrow \Delta, \exists y_1 G_1(y_1, \overline{A}), \ldots, \exists y_m G_m(y_m, \overline{A}),$$

onde H's e G's são fórmulas limitadas, em Γ e Δ não ocorrem quantificações de segunda ordem, não ocorrem as variáveis livres $\overline{A}$, nem ocorrem fórmulas Σ_1^0 (os quantificadores $\exists w_i$ ou $\exists y_j$ podem não existir de modo a que as fórmulas limitadas se encontrem também em destaque).

Estrategicamente, *todas* as variáveis livres de segunda ordem do sequente, que não ocorrem em Γ nem em Δ, são explicitamente mostradas e serão, no que se segue, denominadas *parâmetros especiais*. As outras variáveis foram omitidas.

Se a regra Fan_0 não ocorre em P, estamos perante uma demonstração em $\mathsf{LK}_{\mathsf{RCA}_0^-}$, tendo-se o pretendido.

Caso a regra Fan_0 ocorra em P, precisamos do seguinte lema (que demonstraremos mais adiante):

Lema 2.2 *Se existe uma $\mathsf{LK}_{\mathsf{RCA}_0^-}$-demonstração de um sequente da forma $(\star)$, e nessa demonstração toda a fórmula do corte é Σ_1^0 e nenhuma fórmula tem quantificações de segunda ordem, então em RCA_0^- prova-se que:*

$$\Gamma \wedge \neg\Delta \to \forall w_1 \ldots \forall w_n \exists v \forall \overline{X} (H_1(w_1, \overline{X}) \wedge \ldots \wedge H_n(w_n, \overline{X}) \to \\ \to \exists y_1 \leq v G_1(y_1, \overline{X}) \vee \ldots \vee \exists y_m \leq v G_m(y_m, \overline{X})).$$

Com este resultado, a prova do teorema segue a seguinte estratégia. Procuramos a primeira ocorrência da regra Fan_0 em P. O sequente de cima dessa regra tem a forma

$$\exists w_1 H_1(w_1, \overline{b}, \overline{B}), \ldots, \exists w_n H_n(w_n, \overline{b}, \overline{B}), \Gamma(\overline{b}) \longrightarrow \exists x F_0(A, \overline{B}, x, \overline{b})$$

e encontra-se nas condições do lema anterior. Os parâmetros especiais são A e $\overline{B}$, sendo que A só ocorre no consequente (note que é variável própria na regra Fan_0). Estamos também a mostrar as variáveis livres de primeira ordem, $\overline{b}$, que ocorrem na fórmula auxiliar da regra Fan_0 e que podem ocorrer em qualquer outra fórmula.

Aplicando o lema 2.2, concluimos que RCA_0^- demonstra a seguinte asserção:

$$\Gamma(\overline{b}) \to \forall w_1 \ldots \forall w_n \exists v \forall X \forall \overline{Y} (H_1(w_1, \overline{b}, \overline{Y}) \wedge \ldots \wedge H_n(w_n, \overline{b}, \overline{Y}) \to \exists x \leq v F_0(X, \overline{Y}, x, \overline{b})).$$

Mas então RCA_0^- demonstra:

$$\Gamma(\bar{b}) \rightarrow \forall\overline{Y}\forall w_1 \ldots \forall w_n \exists v(H_1(w_1, \bar{b}, \overline{Y}) \wedge \ldots \wedge H_n(w_n, \bar{b}, \overline{Y}) \rightarrow \forall X \exists x \leq v F_0(X, \overline{Y}, x, \bar{b})),$$

ou seja,

$$\forall\overline{Y}(\Gamma(\bar{b}) \rightarrow (\exists w_1 H_1(w_1, \bar{b}, \overline{Y}) \wedge \ldots \wedge \exists w_n H_n(w_n, \bar{b}, \overline{Y}) \rightarrow \exists v \forall X \exists x \leq v F_0(X, \overline{Y}, x, \bar{b}))),$$

ou equivalentemente,

$$\forall\overline{Y}(\exists w_1 H_1(w_1, \bar{b}, \overline{Y}) \wedge \ldots \wedge \exists w_n H_n(w_n, \bar{b}, \overline{Y}) \wedge \Gamma(\bar{b}) \rightarrow \exists v \forall X \exists x \leq v F_0(X, \overline{Y}, x, \bar{b})).$$

Pelo lema 2.1, temos que RCA_0^- demonstra:

$$\begin{aligned}&\forall\overline{Y}(\exists w_1 H_1(w_1, \bar{b}, \overline{Y}) \wedge \ldots \wedge \exists w_n H_n(w_n, \bar{b}, \overline{Y}) \wedge \Gamma(\bar{b}) \rightarrow \\ &\qquad\qquad \rightarrow \exists v \forall s \in \{0,1\}^{t(v,\bar{b})} \exists x \leq v F_0^*(s, \overline{Y}, x, \bar{b})).\end{aligned}$$

Chegamos assim à conclusão da aplicação da regra Fan_0. Substituimos, então, a primeira parte da demonstração P, até à regra Fan_0 inclusive, pela prova em $\mathsf{LK}_{\mathsf{RCA}_0^-}$ (livre de cortes livres) do sequente resultante da primeira ocorrência de tal regra.

Repetindo este procedimento tantas vezes quantas as ocorrências da regra Fan_0, eliminamos todas estas ocorrências, conseguindo uma demonstração em $\mathsf{LK}_{\mathsf{RCA}_0^-}$ do sequente $\longrightarrow F(A)$. Logo a teoria RCA_0^- demonstra $\forall X F(X)$.

□

Na demonstração do lema 2.2, usamos por diversas vezes o chamado *esquema de colecção limitada*, denotado por $\mathsf{B}\Sigma_\infty^\mathsf{b}$:

$$\forall x \leq a \exists y F_0(x, y) \rightarrow \exists z \forall x \leq a \exists y \leq z F_0(x, y),$$

onde F_0 é uma fórmula limitada, possivelmente com outras variáveis livres de primeira e segunda ordem.

Note que em RCA_0^- tal esquema é válido pois ele é consequência do esquema de indução Σ_1^0.

Demonstração do Lema 2.2

A demonstração é feita por indução no número de linhas da $\mathsf{LK}_{\mathsf{RCA}_0^-}$-demonstração do sequente $(\star)$, tendo em conta que nesta demonstração não ocorrem quantificações de segunda ordem e a regra do corte só é aplicada a fórmulas Σ_1^0.

No caso dos sequentes iniciais nada há a demonstrar pois neles não ocorre nenhuma fórmula com quantificadores.

Se fizermos um estudo exaustivo de todas as regras de inferência que possam ocorrer na demonstração, provando que, caso o resultado expresso no lema seja válido no sequente de cima da inferência, permanece válido no sequente de baixo, temos, por indução, o resultado pretendido.

As *regras estruturais fracas*, não oferecem qualquer problema, pelo que nos limitaremos a analisar, a título de exemplo a regra de enfraquecimento $e : e$, por introdução de uma fórmula Σ_1^0.

Consideremos a inferência:

$$\frac{\exists w_1 H_1(w_1, \overline{A}), \ldots, \exists w_n H_n(w_n, \overline{A}), \Gamma \longrightarrow \Delta, \exists y_1 G_1(y_1, \overline{A}), \ldots, \exists y_m G_m(y_m, \overline{A})}{\exists w F(w, \overline{A}, \overline{B}), \exists w_1 H_1(w_1, \overline{A}), \ldots, \exists w_n H_n(w_n, \overline{A}), \Gamma \longrightarrow \Delta, \exists y_1 G_1(y_1, \overline{A}), \ldots, \exists y_m G_m(y_m, \overline{A})} \quad ,$$

onde todas as fórmulas Σ_1^0 se encontram destacadas e onde aos parâmetros especiais $\overline{A}$ se juntam possivelmente, no sequente de baixo, novos parâmetros especiais $\overline{B}$ resultantes da introdução de uma nova fórmula.

Suponhamos, por hipótese de indução que RCA_0^- demonstra:

$$\Gamma \wedge \neg\Delta \to \forall w_1 \ldots \forall w_n \exists \tilde{v} \forall \overline{X} (H_1(w_1, \overline{X}) \wedge \ldots \wedge H_n(w_n, \overline{X}) \to \\ \to \exists y_1 \leq \tilde{v} G_1(y_1, \overline{X}) \vee \ldots \vee \exists y_m \leq \tilde{v} G_m(y_m, \overline{X})).$$

Tomando $v := \tilde{v}$, tem-se, como se pretende, que RCA_0^- demonstra:

$$\Gamma \wedge \neg\Delta \to \forall w \forall w_1 \ldots \forall w_n \exists v \forall \overline{X} \forall \overline{Y} (F(w, \overline{X}, \overline{Y}) \wedge H_1(w_1, \overline{X}) \wedge \ldots \wedge H_n(w_n, \overline{X}) \to \\ \to \exists y_1 \leq v G_1(y_1, \overline{X}) \vee \ldots \vee \exists y_m \leq v G_m(y_m, \overline{X})).$$

Quanto às *regras proposicionais*, analisaremos $\neg : e$, $\wedge : d$, $\vee : e$ e $\to : d$ (as restantes regras verificam-se por processos semelhantes) e apenas na situação em que as fórmulas auxiliares são Σ_1^0 não limitadas. A verificação no caso de aplicações destas regras a fórmulas limitadas ou a fórmulas não Σ_1^0 faz-se muito facilmente.

Estudo da regra $\neg : e$:

$$\frac{\exists w H(w, \overline{A}, \overline{B}), \Gamma \longrightarrow \Delta, \exists y G(y, \overline{A}, \overline{B}), \exists z F(z, \overline{B})}{\neg \exists z F(z, \overline{B}), \exists w H(w, \overline{A}, \overline{B}), \Gamma \longrightarrow \Delta, \exists y G(y, \overline{A}, \overline{B})} \quad ,$$

onde para simplificar a escrita consideramos apenas uma fórmula H e uma G em vez da forma geral $H_1, \ldots, H_n, G_1, \ldots, G_m,$. Observe também que, enquanto no sequente de cima, $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são parâmetros especiais, apenas os primeiros se mantêm sequentes especiais no sequente de baixo.

Por hipótese de indução, a teoria RCA_0^- demonstra:

$$\Gamma \wedge \neg\Delta \to \forall w \exists \tilde{v} \forall \overline{X} \forall \overline{Y} (H(w, \overline{X}, \overline{Y}) \to \exists y \leq \tilde{v} G(y, \overline{X}, \overline{Y}) \vee \exists z \leq \tilde{v} F(z, \overline{Y})).$$

Para verificarmos, como se pretende, que RCA_0^- demonstra:

$$\forall \overline{Y} \big(\neg \exists z F(z, \overline{Y}) \wedge \Gamma \wedge \neg\Delta \to \forall w \exists v \forall \overline{X} (H(w, \overline{X}, \overline{Y}) \to \exists y \leq v G(y, \overline{X}, \overline{Y})) \big),$$

basta fixar $\overline{Y}$, supor o antecedente, fixar w e aplicar a hipótese de indução tomando $v := \tilde{v}$.

Nas regras a seguir analisadas, mantemos a simplificação de apenas considerar uma fórmula H e uma fórmula G.

A regra $\wedge : d$ tem a forma:

$$\frac{\exists wH(w,\overline{A},\overline{B}),\Gamma\longrightarrow\Delta,\exists yG(y,\overline{A},\overline{B}),\exists z_1F_1(z_1,\overline{B}) \qquad \exists wH(w,\overline{A},\overline{B}),\Gamma\longrightarrow\Delta,\exists yG(y,\overline{A},\overline{B}),\exists z_2F_2(z_2,\overline{B})}{\exists wH(w,\overline{A},\overline{B}),\Gamma\longrightarrow\Delta,\exists yG(y,\overline{A},\overline{B}),\exists z_1F_1(z_1,\overline{B})\wedge\exists z_2F_2(z_2,\overline{B})}$$

e por hipótese de indução sabemos que RCA_0^- demonstra as asserções

$$\Gamma\wedge\neg\Delta\to\forall w\exists\tilde{v}\forall\overline{X}\forall\overline{Y}(H(w,\overline{X},\overline{Y})\to\exists y\leq\tilde{v}G(y,\overline{X},\overline{Y})\vee\exists z_1\leq\tilde{v}F_1(z_1,\overline{Y}))$$

e

$$\Gamma\wedge\neg\Delta\to\forall w\exists\breve{v}\forall\overline{X}\forall\overline{Y}(H(w,\overline{X},\overline{Y})\to\exists y\leq\breve{v}G(y,\overline{X},\overline{Y})\vee\exists z_2\leq\breve{v}F_2(z_2,\overline{Y})).$$

Para provarmos como se pretende que RCA_0^- demonstra

$$\forall\overline{Y}\big(\Gamma\wedge\neg\Delta\wedge\neg(\exists z_1F_1(z_1,\overline{Y})\wedge\exists z_2F_2(y_2,\overline{Y}))\to$$
$$\to\forall w\exists v\forall\overline{X}(H(w,\overline{X},\overline{Y})\to\exists y\leq vG(y,\overline{X},\overline{Y}))\big),$$

fixemos $\overline{Y}$, admitamos o antecedente, fixemos w e o resultado sai imediatamente aplicando as asserções da hipótese de indução e considerando v como sendo o máximo entre $\tilde{v}$ e $\breve{v}$.

A regra $\vee : e$ tem a forma:

$$\frac{\exists z_1F_1(z_1,\overline{B}),\exists wH(w,\overline{A},\overline{B}),\Gamma\longrightarrow\Delta,\exists yG(y,\overline{A},\overline{B}) \qquad \exists z_2F_2(z_2,\overline{B}),\exists wH(w,\overline{A},\overline{B}),\Gamma\longrightarrow\Delta,\exists yG(y,\overline{A},\overline{B})}{\exists z_1F_1(z_1,\overline{B})\vee\exists z_2F_2(z_2,\overline{B}),\exists wH(w,\overline{A},\overline{B}),\Gamma\longrightarrow\Delta,\exists yG(y,\overline{A},\overline{B})}$$

e por hipótese de indução sabemos que RCA_0^- demonstra as asserções

$$\Gamma\wedge\neg\Delta\to\forall z_1\forall w\exists\tilde{v}\forall\overline{X}\forall\overline{Y}(F_1(z_1,\overline{Y})\wedge H(w,\overline{X},\overline{Y})\to\exists y\leq\tilde{v}G(y,\overline{X},\overline{Y}))$$

e

$$\Gamma\wedge\neg\Delta\to\forall z_2\forall w\exists\breve{v}\forall\overline{X}\forall\overline{Y}(F_2(z_2,\overline{Y})\wedge H(w,\overline{X},\overline{Y})\to\exists y\leq\breve{v}G(y,\overline{X},\overline{Y})).$$

Pretendemos provar que RCA_0^- demonstra:

$$\forall\overline{Y}\big((\exists z_1F_1(z_1,\overline{Y})\vee\exists z_2F_2(z_2,\overline{Y}))\wedge\Gamma\wedge\neg\Delta\to$$
$$\to\forall w\exists v\forall\overline{X}(H(w,\overline{X},\overline{Y})\to\exists y\leq vG(y,\overline{X},\overline{Y}))\big).$$

Dado $\overline{Y}$, suponhamos que $\big(\exists z_1F_1(z_1,\overline{Y})\vee\exists z_2F_2(z_2,\overline{Y})\big)\wedge\Gamma\wedge\neg\Delta$ e fixemos w. Caso se tenha $\exists z_1F_1(z_1,\overline{Y})$, fixemos tal z_1 e apliquemos a primeira asserção da hipótese de indução. Tomando $v:=\tilde{v}$ obtém-se o pretendido. Caso contrário, ter-se-á que $\exists z_2F_2(z_2,\overline{Y})$. Fixando tal z_2 e aplicando a segunda asserção da hipótese de indução, basta tomar $v:=\breve{v}$ para se provar o pretendido.

A regra $\to: d$ tem a forma:

$$\frac{\exists z_1F_1(z_1,\overline{B}),\exists wH(w,\overline{A},\overline{B}),\Gamma\longrightarrow\Delta,\exists yG(y,\overline{A},\overline{B}),\exists z_2F_2(z_2,\overline{B})}{\exists wH(w,\overline{A},\overline{B}),\Gamma\longrightarrow\Delta,\exists yG(y,\overline{A},\overline{B}),\exists z_1F_1(z_1,\overline{B})\to\exists z_2F_2(z_2,\overline{B})}$$

e por hipótese de indução sabemos que RCA_0^- demonstra:

$$\Gamma \wedge \neg\Delta \to \forall z_1 \forall w \exists \tilde{v} \forall \overline{X} \forall \overline{Y} (F_1(z_1, \overline{Y}) \wedge H(w, \overline{X}, \overline{Y}) \to \\ \to \exists y \leq \tilde{v} G(y, \overline{X}, \overline{Y}) \vee \exists z_2 \leq \tilde{v} F_2(z_2, \overline{Y})).$$

Vejamos que RCA_0^-demonstra:

$$\forall \overline{Y} \big(\Gamma \wedge \neg\Delta \wedge \neg(\exists z_1 F_1(z_1, \overline{Y}) \to \exists z_2 F_2(z_2, \overline{Y})) \to \\ \to \forall w \exists v \forall \overline{X} (H(w, \overline{X}, \overline{Y}) \to \exists y \leq v G(y, \overline{X}, \overline{Y}))\big).$$

Fixemos $\overline{Y}$, admitamos válido o antecedente, ou seja $\Gamma \wedge \neg\Delta \wedge \exists z_1 F_1(z_1, \overline{Y}) \wedge \neg(\exists z_2 F_2(z_2, \overline{Y}))$, fixemos tal z_1 e fixemos w. Aplicando a hipótese de indução e tomando $v := \tilde{v}$, temos o pretendido.

Quanto às *regras de quantificação*, analisamos $\forall : e$, quando a fórmula auxiliar é uma fórmula Σ_1^0, não limitada; $\exists : e$ quando a fórmula auxiliar é uma fórmula Σ_1^0, não limitada e quando é uma fórmula limitada; $\exists : d$ quando a fórmula auxiliar é uma fórmula limitada; $\forall_\leq : e$ quando a fórmula auxiliar é uma fórmula Σ_1^0, não limitada e $\exists_\leq : e$ quando a fórmula auxiliar é uma fórmula Σ_1^0 não limitada e quando é limitada. A regra $\forall_\leq : d$ aplicada a fórmulas limitadas verifica-se de forma análoga à regra $\exists_\leq : e$ para fórmulas limitadas, pelo que omitimos tal demonstração. Todas as outras situações não apresentadas se analisam com raciocínios análogos, não levantando quaisquer problemas. Note que as regras $\forall_{2^a} : e$, $\forall_{2^a} : d$, $\exists_{2^a} : e$ e $\exists_{2^a} : d$ não ocorrem na demonstração, visto esta não conter quantificações de segunda ordem. Observe ainda que, no estudo das regras $\exists_\leq : e$ e $\forall_\leq : d$ quando a fórmula auxiliar é uma fórmula limitada, se recorre ao *esquema de colecção limitada*.

A regra $\forall : e$, quando a fórmula auxiliar é uma fórmula Σ_1^0 não limitada, tem a forma:

$$\frac{\exists z F(z, t, \overline{B}), \exists w H(w, \overline{A}, \overline{B}), \Gamma \longrightarrow \Delta, \exists y G(y, \overline{A}, \overline{B})}{\forall x \exists z F(z, x, \overline{B}), \exists w H(w, \overline{A}, \overline{B}), \Gamma \longrightarrow \Delta, \exists y G(y, \overline{A}, \overline{B})} \quad ,$$

com t um termo. Por hipótese de indução sabemos que RCA_0^- demonstra:

$$\Gamma \wedge \neg\Delta \to \forall z \forall w \exists \tilde{v} \forall \overline{X} \forall \overline{Y} (F(z, t, \overline{Y}) \wedge H(w, \overline{X}, \overline{Y}) \to \exists y \leq \tilde{v} G(y, \overline{X}, \overline{Y})).$$

Para provarmos que RCA_0^- demonstra:

$$\forall \overline{Y} \big(\forall x \exists z F(z, x, \overline{Y}) \wedge \Gamma \wedge \neg\Delta \to \forall w \exists v \forall \overline{X} (H(w, \overline{X}, \overline{Y}) \to \exists y \leq v G(y, \overline{X}, \overline{Y}))\big),$$

fixamos $\overline{Y}$, admitimos o antecedente, fixamos z tal que $F(z, t, \overline{Y})$ e fixamos w. Basta então aplicar a hipótese de indução e tomar $v := \tilde{v}$.

A regra $\exists : e$, quando a fórmula auxiliar é uma fórmula Σ_1^0 não limitada, tem a forma:

$$\frac{\exists z F(z, b, \overline{B}), \exists w H(w, \overline{A}, \overline{B}), \Gamma \longrightarrow \Delta, \exists y G(y, \overline{A}, \overline{B})}{\exists x \exists z F(z, x, \overline{B}), \exists w H(w, \overline{A}, \overline{B}), \Gamma \longrightarrow \Delta, \exists y G(y, \overline{A}, \overline{B})} \quad ,$$

onde b é uma variável própria de primeira ordem. Por hipótese de indução sabemos que RCA_0^- demonstra:

$$\forall r\big(\Gamma \wedge \neg\Delta \rightarrow \forall z \forall w \exists \tilde{v} \forall \overline{X} \forall \overline{Y}(F(z,r,\overline{Y}) \wedge H(w,\overline{X},\overline{Y}) \rightarrow \exists y \leq \tilde{v} G(y,\overline{X},\overline{Y}))\big).$$

Para provarmos que RCA_0^- demonstra:

$$\forall \overline{Y}\big(\exists x \exists z F(z,x,\overline{Y}) \wedge \Gamma \wedge \neg\Delta \rightarrow \forall w \exists v \forall \overline{X}(H(w,\overline{X},\overline{Y}) \rightarrow \exists y \leq v G(y,\overline{X},\overline{Y}))\big),$$

fixamos $\overline{Y}$, admitidos o antecedente, fixamos x e z tal que $F(z,x,\overline{Y})$, fixamos w e aplicamos a hipótese de indução com $r = x$. A asserção pretendida demonstra-se tomando $v := \tilde{v}$.

A regra $\exists : e$, quando a fórmula auxiliar é uma fórmula limitada, tem a forma:

$$\frac{F(b,\overline{A}), \exists w H(w,\overline{A}), \Gamma \longrightarrow \Delta, \exists y G(y,\overline{A})}{\exists x F(x,\overline{A}), \exists w H(w,\overline{A}), \Gamma \longrightarrow \Delta, \exists y G(y,\overline{A})} \quad ,$$

onde b é uma variável própria de primeira ordem. Por hipótese de indução sabemos que RCA_0^- demonstra:

$$\forall r\big(\Gamma \wedge \neg\Delta \rightarrow \forall w \exists \tilde{v} \forall \overline{X}(F(r,\overline{X}) \wedge H(w,\overline{X}) \rightarrow \exists y \leq \tilde{v} G(y,\overline{X}))\big).$$

Para provarmos que RCA_0^- demonstra:

$$\Gamma \wedge \neg\Delta \rightarrow \forall x \forall w \exists v \forall \overline{X}(F(x,\overline{X}) \wedge H(w,\overline{X}) \rightarrow \exists y \leq v G(y,\overline{X})),$$

admitidos que temos $\Gamma \wedge \neg\Delta$, fixamos x e w e aplicamos a hipótese de indução com $r = x$. A asserção pretendida demonstra-se tomando $v := \tilde{v}$.

A regra $\exists : d$, quando a fórmula auxiliar é uma fórmula limitada, tem a forma:

$$\frac{\exists w H(w,\overline{A}), \Gamma \longrightarrow \Delta, \exists y G(y,\overline{A}), F(t,\overline{A})}{\exists w H(w,\overline{A}), \Gamma \longrightarrow \Delta, \exists y G(y,\overline{A}), \exists x F(x,\overline{A})}$$

e por hipótese de indução sabemos que RCA_0^- demonstra:

$$\Gamma \wedge \neg\Delta \rightarrow \forall w \exists \tilde{v} \forall \overline{X}(H(w,\overline{X}) \rightarrow \exists y \leq \tilde{v} G(y,\overline{X}) \vee F(t,\overline{X})).$$

Para provarmos que RCA_0^- demonstra:

$$\Gamma \wedge \neg\Delta \rightarrow \forall w \exists v \forall \overline{X}(H(w,\overline{X}) \rightarrow \exists y \leq v G(y,\overline{X}) \vee \exists x \leq v F(x,\overline{X})),$$

supomos que temos $\Gamma \wedge \neg\Delta$ e fixamos w. Consideramos $\tilde{v}$ nas condições da hipótese de indução. Tomando v como sendo o máximo entre $\tilde{v}$ e t, provamos o pretendido.

A regra $\forall_{\leq} : e$, quando a fórmula auxiliar é uma fórmula Σ_1^0 não limitada, tem a forma:

$$\frac{\exists z F(z,t,\overline{B}), \exists w H(w,\overline{A},\overline{B}), \Gamma \longrightarrow \Delta, \exists y G(y,\overline{A},\overline{B})}{t \leq s, \forall x \leq s \exists z F(z,x,\overline{B}), \exists w H(w,\overline{A},\overline{B}), \Gamma \longrightarrow \Delta, \exists y G(y,\overline{A},\overline{B})}$$

e por hipótese de indução sabemos que RCA_0^- demonstra:

$$\Gamma \wedge \neg\Delta \to \forall z \forall w \exists \tilde{v} \forall \overline{X} \forall \overline{Y} (F(z,t,\overline{Y}) \wedge H(w,\overline{X},\overline{Y}) \to \exists y \leq \tilde{v} G(y,\overline{X},\overline{Y})).$$

Queremos provar que RCA_0^- demonstra:

$$\forall \overline{Y} \big(\forall x \leq s \exists z F(z,x,\overline{Y}) \wedge \Gamma \wedge \neg\Delta \to \\ \to \forall w \exists v \forall \overline{X} (t \leq s \wedge H(w,\overline{X},\overline{Y}) \to \exists y \leq v G(y,\overline{X},\overline{Y}))\big),$$

ou seja,

$$\forall \overline{Y} \big(\forall x \leq s \exists z F(z,x,\overline{Y}) \wedge \Gamma \wedge \neg\Delta \wedge t \leq s \to \\ \to \forall w \exists v \forall \overline{X} (H(w,\overline{X},\overline{Y}) \to \exists y \leq v G(y,\overline{X},\overline{Y}))\big).$$

Fixemos então $\overline{Y}$ e admitamos que o antecedente da asserção anterior é válido. Como $\forall x \leq s \exists z F(z,x,\overline{Y})$ e $t \leq s$, podemos fixar z tal que $F(z,t,\overline{Y})$. Tomemos um w arbitrário e apliquemos a hipótese de indução. O resultado obtém-se fazendo $v := \tilde{v}$.

A regra $\exists_{\leq} : e$, quando a fórmula auxiliar é uma fórmula Σ_1^0 não limitada, tem a forma:

$$\frac{b \leq t, \exists z F(z,b,\overline{B}), \exists w H(w,\overline{A},\overline{B}), \Gamma \longrightarrow \Delta, \exists y G(y,\overline{A},\overline{B})}{\exists x \leq t \exists z F(z,x,\overline{B}), \exists w H(w,\overline{A},\overline{B}), \Gamma \longrightarrow \Delta, \exists y G(y,\overline{A},\overline{B})} \quad ,$$

onde b é uma variável própria de primeira ordem. Por hipótese de indução sabemos que RCA_0^- demonstra:

$$\forall r \big(\Gamma \wedge \neg\Delta \to \forall z \forall w \exists \tilde{v} \forall \overline{X} \forall \overline{Y} (r \leq t \wedge F(z,r,\overline{Y}) \wedge H(w,\overline{X},\overline{Y}) \to \exists y \leq \tilde{v} G(y,\overline{X},\overline{Y}))\big).$$

Para provarmos que RCA_0^- demonstra:

$$\forall \overline{Y} \big(\exists x \leq t \exists z F(z,x,\overline{Y}) \wedge \Gamma \wedge \neg\Delta \to \forall w \exists v \forall \overline{X} (H(w,\overline{X},\overline{Y}) \to \exists y \leq v G(y,\overline{X},\overline{Y}))\big),$$

fixamos $\overline{Y}$, admitimos o antecedente, fixamos x e z tal que $x \leq t$ e $F(z,x,\overline{Y})$, fixamos w e aplicamos a hipótese de indução com $r = x$. A asserção pretendida demonstra-se tomando $v := \tilde{v}$.

A regra $\exists_{\leq} : e$, quando a fórmula auxiliar é uma fórmula limitada, tem a forma:

$$\frac{b \leq t, F(b,\overline{A}), \exists w H(w,\overline{A}), \Gamma \longrightarrow \Delta, \exists y G(y,\overline{A})}{\exists x \leq t F(x,\overline{A}), \exists w H(w,\overline{A}), \Gamma \longrightarrow \Delta, \exists y G(y,\overline{A})} \quad ,$$

onde b é uma variável própria de primeira ordem. Por hipótese de indução sabemos que RCA_0^- demonstra:

$$\forall r \big(\Gamma \wedge \neg\Delta \to \forall w \exists \tilde{v} \forall \overline{X} (r \leq t \wedge F(r,\overline{X}) \wedge H(w,\overline{X}) \to \exists y \leq \tilde{v} G(y,\overline{X}))\big),$$

o que, visto r não ocorrer em Γ nem é Δ, é equivalente a

$$\Gamma \wedge \neg\Delta \to \forall w \forall r \exists \tilde{v} \forall \overline{X} (r \leq t \wedge F(r,\overline{X}) \wedge H(w,\overline{X}) \to \exists y \leq \tilde{v} G(y,\overline{X})),$$

e ainda equivalente a

$$\Gamma \wedge \neg\Delta \rightarrow \forall w \forall r \leq t \exists \tilde{v} \forall \overline{X}(F(r, \overline{X}) \wedge H(w, \overline{X}) \rightarrow \exists y \leq \tilde{v} G(y, \overline{X})),$$

Queremos provar que RCA_0^- demonstra:

$$\Gamma \wedge \neg\Delta \rightarrow \forall w \exists v \forall \overline{X}(\exists x \leq t F(x, \overline{X}) \wedge H(w, \overline{X}) \rightarrow \exists y \leq v G(y, \overline{X})).$$

Suponhamos que se verifica $\Gamma \wedge \neg\Delta$ e fixemos w. Por hipótese de indução, temos que

$$\forall r \leq t \exists \tilde{v} \forall \overline{X} \underbrace{(F(r, \overline{X}) \wedge H(w, \overline{X}) \rightarrow \exists y \leq \tilde{v} G(y, \overline{X}))}_{\textit{fórmula limitada}}.$$

Pelo lema 2.1, $\forall \overline{X}(F(r, \overline{X}) \wedge H(w, \overline{X}) \rightarrow \exists y \leq \tilde{v} G(y, \overline{X}))$ é equivalente a uma fórmula limitada.
Logo aplicando o esquema de *colecção limitada* $\mathsf{B}\Sigma_\infty^{\mathsf{b}}$, prova-se que

$$\exists v \forall r \leq t \exists \tilde{v} \leq v \forall \overline{X}(F(r, \overline{X}) \wedge H(w, \overline{X}) \rightarrow \exists y \leq \tilde{v} G(y, \overline{X})),$$

e em particular

$$(*)\ \exists v \forall r \leq t \forall \overline{X}(F(r, \overline{X}) \wedge H(w, \overline{X}) \rightarrow \exists y \leq v G(y, \overline{X})).$$

Fixando tal v, vejamos que este verifica o pretendido, ou seja

$$\forall \overline{X}(\exists x \leq t F(x, \overline{X}) \wedge H(w, \overline{X}) \rightarrow \exists y \leq v G(y, \overline{X})).$$

Fixemos $\overline{X}$ e suponhamos que o antecedente é válido. Em particular fixemos x tal que $x \leq t \wedge F(x, \overline{X})$. O resultado obtém-se imediatamente por $(*)$, pensando em $r = x$.

Analisemos agora a *regra de indução* (*Ind*), quando a fórmula auxiliar é uma fórmula Σ_1^0, não limitada (as outras situações resolvem-se de forma mais imediata). Tal regra tem a forma:

$$\frac{\exists z F(z, a, \overline{A}), \exists w H(w, \overline{A}), \Gamma \longrightarrow \exists z' F(z', a+1, \overline{A})}{\exists z F(z, 0, \overline{A}), \exists w H(w, \overline{A}), \Gamma \longrightarrow \exists z' F(z', t, \overline{A})},$$

com a uma variável própria de primeira ordem e t um termo.

Por hipótese de indução temos que RCA_0^- demonstra:

$$\forall r \big(\Gamma \rightarrow \forall z \forall w \exists \tilde{v} \forall \overline{X}(F(z, r, \overline{X}) \wedge H(w, \overline{X}) \rightarrow \exists z' \leq \tilde{v} F(z', r+1, \overline{X}))\big).$$

Queremos provar que RCA_0^- demonstra:

$$\Gamma \rightarrow \forall z \forall w \exists v \forall \overline{X}(F(z, 0, \overline{X}) \wedge H(w, \overline{X}) \rightarrow \exists z' \leq v F(z', t, \overline{X})).$$

Suponhamos que temos Γ e fixemos z e w. Para obtermos o pretendido é suficiente provar que para todo o elemento b se tem:

$$\exists v \forall \overline{X}(F(z,0,\overline{X}) \wedge H(w,\overline{X}) \to \exists z' \leq vF(z',b,\overline{X})).$$

Façamos tal prova por indução em b, notando que, pelo lema 2.1 a fórmula anterior é equivalente a uma fórmula Σ^0_1, e em RCA_0^- é válido o esquema de indução para fórmulas com essa complexidade.

Para $b = 0$ basta tomar $v := z$.

Supondo que a propriedade é válida para b, i.e. existe v^* tal que $\forall \overline{X}(F(z,0,\overline{X}) \wedge H(w,\overline{X}) \to \exists z'' \leq v^* F(z'',b,\overline{X}))$, queremos ver que a propriedade é válida para $b+1$. Por hipótese de indução temos que

$$\forall z'' \exists \tilde{v} \forall \overline{X}(F(z'',b,\overline{X}) \wedge H(w,\overline{X}) \to \exists z' \leq \tilde{v} F(z',b+1,\overline{X})).$$

Logo,

$$\forall z'' \leq v^* \exists \tilde{v} \forall \overline{X}(F(z'',b,\overline{X}) \wedge H(w,\overline{X}) \to \exists z' \leq \tilde{v} F(z',b+1,\overline{X})).$$

Aplicando o lema 2.1, a subfórmula da fórmula anterior iniciada em $\exists \tilde{v}$ é equivalente a uma fórmula Σ^0_1, logo aplicando o *esquema de colecção limitada* $\mathsf{B}\Sigma^{\mathsf{b}}_\infty$, sabemos que existe v tal que:

$$\forall z'' \leq v^* \exists \tilde{v} \leq v \forall \overline{X}(F(z'',b,\overline{X}) \wedge H(w,\overline{X}) \to \exists z' \leq \tilde{v} F(z',b+1,\overline{X}))$$

e em particular,

$$\forall z'' \leq v^* \forall \overline{X}(F(z'',b,\overline{X}) \wedge H(w,\overline{X}) \to \exists z' \leq v F(z',b+1,\overline{X})).$$

Facilmente se conclui que tal v verifica o pretendido, ou seja $\forall \overline{X}(F(z,0,\overline{X}) \wedge H(w,\overline{X}) \to \exists z' \leq vF(z',b+1,\overline{X}))$.

Resta-nos apenas analisar a *regra do corte*. Note que as únicas inferências de corte que ocorrem na demonstração têm fórmulas auxiliares (fórmulas do corte) Σ^0_1. A situação mais delicada ocorre quando a fórmula do corte é uma fórmula Σ^0_1, não limitada, situação essa que se analisa em seguida. Suponhamos então que temos uma inferência da forma:

$$\frac{\exists w H(w,\overline{A}), \Gamma \longrightarrow \Delta, \exists y G(y,\overline{A}), \exists z F(z,\overline{A},\overline{B}) \qquad \exists z F(z,\overline{A},\overline{B}), \exists w H(w,\overline{A}), \Gamma \longrightarrow \Delta, \exists y G(y,\overline{A})}{\exists w H(w,\overline{A}), \Gamma \longrightarrow \Delta, \exists y G(y,\overline{A})}.$$

Note que $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são parâmetros especiais nos sequentes de cima, ao passo que no sequente de baixo $\overline{A}$ são os únicos parâmetros especiais.

Por hipótese de indução, RCA_0^- demonstra as seguintes asserções:

$$\Gamma \wedge \neg\Delta \to \forall w \exists v' \forall \overline{X} \forall \overline{Y}(H(w,\overline{X}) \to \exists y \leq v' G(y,\overline{X}) \vee \exists z \leq v' F(z,\overline{X},\overline{Y})),$$

e

$$\Gamma \wedge \neg\Delta \to \forall z \forall w \exists v'' \forall \overline{X} \forall \overline{Y} (F(z, \overline{X}, \overline{Y}) \wedge H(w, \overline{X}) \to \exists y \leq v'' G(y, \overline{X})).$$

Queremos provar que RCA_0^- demonstra:

$$\Gamma \wedge \neg\Delta \to \forall w \exists v \forall \overline{X} (H(w, \overline{X}) \to \exists y \leq v G(y, \overline{X})).$$

Admitamos que $\Gamma \wedge \neg\Delta$ é válido e fixemos w.
Pela primeira asserção da hipótese de indução, existe v' tal que

$$(\$)\ \forall \overline{X} (H(w, \overline{X}) \to \exists y \leq v' G(y, \overline{X}) \vee \forall \overline{Y} \exists z \leq v' F(z, \overline{X}, \overline{Y})),$$

e pela segunda asserção temos que

$$\forall z \leq v' \exists v'' \underbrace{\forall \overline{X} \forall \overline{Y} (F(z, \overline{X}, \overline{Y}) \wedge H(w, \overline{X}) \to \exists y \leq v'' G(y, \overline{X}))}_{(\circledast)}.$$

Pelo lema 2.1, $(\circledast)$ é equivalente a uma fórmula limitada, podendo aplicar-se o esquema de colecção limitada. Por *colecção limitada* $\mathsf{B}\Sigma^{\mathsf{b}}_{\infty}$, existe $\tilde{v}$ tal que

$$\forall z \leq v' \exists v'' \leq \tilde{v} \forall \overline{X} \forall \overline{Y} (F(z, \overline{X}, \overline{Y}) \wedge H(w, \overline{X}) \to \exists y \leq v'' G(y, \overline{X})),$$

logo

$$(\$\$)\ \forall z \leq v' \forall \overline{X} \forall \overline{Y} (F(z, \overline{X}, \overline{Y}) \wedge H(w, \overline{X}) \to \exists y \leq \tilde{v} G(y, \overline{X})).$$

Tomando v como sendo o máximo entre v' e $\tilde{v}$, vejamos que tal v verifica o pretendido, ou seja $\forall \overline{X} (H(w, \overline{X}) \to \exists y \leq v G(y, \overline{X}))$.

Fixemos $\overline{X}$ e suponhamos válido $H(w, \overline{X})$. Por (\$) tem-se $\exists y \leq v' G(y, \overline{X})$ ou $\forall \overline{Y} \exists z \leq v' F(z, \overline{X}, \overline{Y})$. No primeiro caso temos o pretendido tendo em conta que $v' \leq v$, no segundo o resultado obtém-se imediatamente de (\$\$), tendo em conta que $\tilde{v} \leq v$.

$\square$

Como nota final desta secção, vejamos que o método atrás usado para provar o Teorema da Conservação de Harrington serve, mediante pequenos ajustes, para provar resultados de conservação envolvendo teorias mais fracas.

No que se segue, consideramos a teoria RCA_0^- como estando expressa numa linguagem que contém um símbolo funcional para cada função primitiva recursiva, acrescentando-se os respectivos axiomas (sem quantificações) que caracterizam tais símbolos.

Denotamos por PRA^2 a teoria que resulta de RCA_0^- (nessa linguagem estendida) impondo uma mais forte restrição sobre a indução, nomeadamente substituindo o esquema de indução Σ^0_1 pelo axioma de indução sobre conjuntos:

$$\forall X (0 \in X \wedge \forall x (x \in X \to x + 1 \in X) \to \forall x (x \in X)).$$

Após o estudo efectuado a propósito das asserções Π^1_1 em $\mathsf{RCA}_0^- + \mathsf{FAN}_0$ e RCA_0^-, facilmente se prova o seguinte resultado de conservação.

Proposição 2.2 *A teoria* $\mathsf{PRA}^2 + \mathsf{FAN}_0$ *é* Π^1_1*-conservativa sobre a teoria* $\mathsf{PRA}^2 + \mathsf{B\Sigma}^{\mathsf{b}}_{\infty}$.

Demonstração

O resultado prova-se por um processo análogo ao usado na demonstração do teorema 2.2. Tenhamos porém em conta que, na formalização da teoria $\mathsf{PRA}^2 + \mathsf{FAN}_0$ no cálculo de sequentes ($\mathsf{LK}_{\mathsf{FAN}}$), em vez da regra (Ind) temos a regra:

$$IndConj \; \frac{a \in A, \Gamma \longrightarrow a+1 \in A}{0 \in A, \Gamma \longrightarrow t \in A} \quad ,$$

com a variável própria de primeira ordem, t termo e A variável livre de segunda ordem.

E a teoria $\mathsf{PRA}^2 + \mathsf{B\Sigma}^{\mathsf{b}}_{\infty}$ é formalizada no cálculo de sequentes através de $\mathsf{LK}_{\mathsf{B\Sigma}^b_\infty}$, que resulta de $\mathsf{LK}_{\mathsf{RCA}_0^-}$ substituindo a regra (Ind) pela regra $(IndConj)$ e acrescentando a seguinte regra (correspondente ao esquema de colecção limitada):

$$\mathsf{B\Sigma}^{\mathsf{b}}_{\infty} \; \frac{a \leq t, \Gamma \longrightarrow \exists y F_0(a,y)}{\Gamma \longrightarrow \exists z \forall x \leq t \exists y \leq z F_0(x,y)} \quad ,$$

com a variável própria de primeira ordem, F_0 fórmula limitada e t termo.

A análise de que a teoria $\mathsf{PRA}^2 + \mathsf{B\Sigma}^{\mathsf{b}}_{\infty}$ pode ser formalizada através do cálculo de sequentes anterior, nomeadamente que da regra $\mathsf{B\Sigma}^{\mathsf{b}}_{\infty}$ se obtém o sequente inicial $\mathsf{B\Sigma}^{\mathsf{b}}_{\infty}$ e vice-versa, encontra-se em [22].

A menos da alteração das teorias e consequentemente das respectivas formalizações no cálculo de sequente a demonstração processa-se exactamente como em 2.2. Note porém que aquando da demonstração do lema 2.2, agora envolvendo $\mathsf{LK}_{\mathsf{B\Sigma}^b_\infty}$ e $\mathsf{PRA}^2 + \mathsf{B\Sigma}^{\mathsf{b}}_{\infty}$, em vez de se estudar a regra (Ind) observe-se que a nova regra para a indução $(IndConj)$ se analisa de forma mais imediata, visto o consequente não possuir nenhuma quantificação existencial, e é necessário proceder-se à análise de mais uma regra, a regra $\mathsf{B\Sigma}^{\mathsf{b}}_{\infty}$:

$$\frac{a \leq t, \exists w H(w, \overline{A}), \Gamma \longrightarrow \exists y F_0(a, y, \overline{A})}{\exists w H(w, \overline{A}), \Gamma \longrightarrow \exists z \forall x \leq t \exists y \leq z F_0(x, y, \overline{A})} \quad .$$

Por hipótese de indução temos que $\mathsf{PRA}^2 + \mathsf{B\Sigma}^{\mathsf{b}}_{\infty}$ demonstra:

$$\forall r(\Gamma \to \forall w \exists v' \forall \overline{X}(r \leq t \wedge H(w, \overline{X}) \to \exists y \leq v' F_0(r, y, \overline{X}))).$$

Queremos provar que $\mathsf{PRA}^2 + \mathsf{B\Sigma}^{\mathsf{b}}_{\infty}$ demonstra:

$$\Gamma \to \forall w \exists v \forall \overline{X}(H(w, \overline{X}) \to \exists z \leq v \forall x \leq t \exists y \leq z F_0(x, y, \overline{X})).$$

Para tal basta provar que

$$\Gamma \to \forall w \exists v \forall \overline{X}(H(w, \overline{X}) \to \forall x \leq t \exists y \leq v F_0(x, y, \overline{X})).$$

Admitamos Γ e fixemos w. Por hipótese de indução sabemos que

$$\forall r \leq t \exists v' \forall \overline{X}(H(w, \overline{X}) \rightarrow \exists y \leq v' F_0(r, y, \overline{X})).$$

Uma vez que pelo lema 2.1, a fórmula $\forall \overline{X}(H(w, \overline{X}) \rightarrow \exists y \leq v' F_0(r, y, \overline{X}))$ pode ser transformada numa fórmula limitada, aplicando colecção limitada $\mathsf{B\Sigma}^{\mathsf{b}}_{\infty}$, existe v tal que

$$\forall r \leq t \exists v' \leq v \forall \overline{X}(H(w, \overline{X}) \rightarrow \exists y \leq v' F_0(r, y, \overline{X})),$$

donde

$$\forall r \leq t \forall \overline{X}(H(w, \overline{X}) \rightarrow \exists y \leq v F_0(r, y, \overline{X})),$$

ou ainda

$$\forall \overline{X}(H(w, \overline{X}) \rightarrow \forall r \leq t \exists y \leq v F_0(r, y, \overline{X})),$$

o que prova o pretendido.

□

Note que o resultado anterior não pode ser melhorado retirando o esquema de colecção limitada da última teoria, pois a asserção de primeira ordem (em particular Π^1_1) que exprime colecção limitada prova-se em $\mathsf{PRA}^2 + \mathsf{FAN}_0$ (veja [17]), mas não se obtém a partir de PRA^2 (veja [28]).

Acreditamos que argumentos idênticos ao aqui apresentado funcionam ainda na demonstração de resultados de conservação (do estilo do resultado de Harrington) sobre teorias mais fracas, nomeadamente subexponenciais (i.e. que não demonstram a totalidade da função exponencial), desde que se formalize convenientemente o lema fraco de König (ou o princípio FAN_0) no contexto de tais teorias.

CAPÍTULO 3

‘Nem tudo o que pode ser contado conta,
e nem tudo o que conta pode ser contado.’

Albert Einstein

Teorias de contagem e sua meta-matemática

Após um prólogo — Capítulo 2 — direccionado para os subsistemas de aritmética de segunda ordem RCA_0 e WKL_0, relacionados com as funções primitivas recursivas, até final da tese o nosso estudo incide sobre fragmentos de aritmética bastante mais fracos, que não provam a totalidade da função exponencial, relacionados com uma classe de complexidade computacional que se encontra entre PTIME e PSPACE, mais concretamente FCH. O interesse em sistemas formais que caracterizam esta classe específica, prende-se com motivações no âmbito da formalização da análise, que se tornam evidentes no decorrer do Capítulo 4.

A teoria essencial deste capítulo, sistema base dos estudos analíticos desenvolvidos posteriormente, é a teoria TCA^2 apresentada na Secção 4. Bastante técnica, a Secção 3 pode ser encarada como precursora da seguinte, uma vez que todo o esforço aí desenvolvido, de introdução de teorias com determinadas particularidades sintácticas que permitem a aplicação de certas técnicas (eliminação do corte) para aferir a força computacional desses sistemas, tem em vista, por ‘arrastamento’ através de sucessivos resultados de conservação, caracterizar FCH como a classe das funções demonstravelmente totais de TCA^2 (e $\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN}_0$).

Iniciamos este capítulo com a descrição da classe FCH, universo computacional das teorias a seguir construídas.

3.1 Em torno de FCH

A propósito do estudo da complexidade computacional da determinação do *permanente* de uma matriz, Valiant introduziu ([41]), no final dos anos 70, a classe $\#\mathsf{P}$, que consiste na *classe das funções f, para as quais existe uma máquina de Turing não determinista (abreviadamente* MTND*) M, trabalhando em tempo polinomial, tal que para todo o x, $f(x)$ é o número de caminhos que terminam em estado de aceitação na computação de M com 'input' x.*

Existe uma grande diversidade de descrições de máquinas de Turing. A versão de MTND que adoptamos encontra-se descrita em [22].

A classe $\#\mathsf{P}$ insere-se nas chamadas *classes de contagem*, classes essas relacionadas com a questão do número de soluções de problemas em NP. Esta ideia por detrás das classes de contagem, está de alguma forma ligada ao conceito na base das classes probabilísticas, se bem que uma máquina probabilística aceita ou não determinado *input* dependendo de, a maioria do seus caminhos, terminarem ou não em estado de aceitação. Trata-se, portanto, de uma noção mais fraca, uma vez que a contagem dá o exacto número de caminhos terminando em aceitação.

3.1.1 A hierarquia das funções de contagem

Baseada em $\#\mathsf{P}$, surge a classe FCH (*hierarquia das funções de contagem*), introduzida por Wagner em [43] sob a designação de PHCF. É esta a classe alvo da nossa atenção, ponto de partida e elo de ligação das várias teorias que desenvolvemos posteriormente.

Definição 3.1 *Seja* $0\#\mathsf{P} = \mathsf{P}$ *e* $(i+1)\#\mathsf{P} = \#\mathsf{P}^{i\#\mathsf{P}}$, *para* $i \geq 0$, *i.e.* $(i+1)\#\mathsf{P}$ *é a classe de todas as funções que 'contam' o número de caminhos terminando em estado de aceitação na computação de máquinas de Turing não deterministas, em tempo polinomial, que têm uma função de* $i\#\mathsf{P}$ *como oráculo.*

A hierarquia das funções de contagem[1] FCH *é definida por:*

$$\mathsf{FCH} = \bigcup_{i \geq 0} i\#\mathsf{P}.$$

Os esforços para se obterem caracterizações de FCH independentes de máquinas não se fizeram esperar (veja [43], [42] e [27]). Uma dessas caracterizações apresenta FCH como a menor classe de funções que contém as operações 0, 1, $+$, $\dot{-}$, $\cdot$ e as projecções e é fechada para a *composição* e a *soma*, i.e.

$$\mathsf{FCH} = [0, 1, +, \dot{-}, \cdot, \pi_{\mathsf{j}}^{\mathsf{n}}]_{\mathsf{COMP,SOMA}},$$

[1] Designar FCH por 'hierarquia' das funções de contagem é um abuso de linguagem, justificado pela hierarquia $i\#\mathsf{P}$, $i \geq 0$, atrás definida.

onde *soma* é definida do seguinte modo: f é definida por *soma* a partir de g se $f(x) = \sum_{i=0}^{2^{p(|x|)}} g(x,i)$, com p um polinómio e $|x|$ o comprimento de x.

3.1.2 Nova caracterização da classe

No que se segue, apresentamos uma caracterização alternativa de FCH, também independente de máquinas, desta vez na linha das caracterizações indutivas de PTIME e PSPACE apresentadas em [13] e [33]. Em consonância com as duas referências anteriores, servimo-nos de notação binária, pelo que começamos por rever tal notação.

Sendo x e y elementos de $2^{<\omega}$ (conjunto de todas as sequências finitas — palavras — de 0's e 1's, também denotado por $\{0,1\}^*$), representamos por:

- $|x|$, o *comprimento* da sequência x, i.e. o número de 0's e 1's que a constitui
- $x\hat{\ }y$, a *concatenação* de x com y (abreviada por xy)
- $x \subseteq y$, x é *subpalavra inicial* de y, i.e. $\exists z \;\; x\hat{\ }z = y$
- $x \subseteq^* y$, x é *subpalavra* de y, i.e. $\exists z \;\; z\hat{\ }x \subseteq y$
- $x \times y$, o *produto* de x por y, i.e. $x \times y = \underbrace{x\hat{\ }x\hat{\ }\ldots\hat{\ }x}_{|y|\ vezes}$
- $x \preceq y$, o comprimento de x é *menor ou igual* que o comprimento de y, i.e. $1 \times x \subseteq 1 \times y$
- $x \equiv y$, o comprimento de x é *igual* ao comprimento de y, i.e. $1 \times x = 1 \times y$
- $x_{|_y}$, a *truncatura* de x a y, i.e. $x_{|_y} = \begin{cases} x & \text{se } x \preceq y \\ z & \text{se } z \subseteq x \wedge z \equiv y \end{cases}$
- $x <_l y$, a ordem linear (segundo o comprimento e dentro do mesmo comprimento lexicograficamente) definida por

  $$x <_l y \Leftrightarrow (x \preceq y \wedge \neg(x \equiv y)) \vee (x \equiv y \wedge \exists z \subseteq x(z0 \subseteq x \wedge z1 \subseteq y)).$$

  Também se define $x \leq_l y$ por $x <_l y \vee x = y$.

Em notação binária encaramos as funções como definidas em produtos cartesianos de $2^{<\omega}$. Note que existe uma bijecção entre $2^{<\omega}$ e $\mathbb{N}$.

Consideremos a classe das funções C definida da forma indutiva que a seguir se apresenta.

Definição 3.2 C *é a menor classe de funções que contém as funções iniciais:*

1. $C_0(x) = x0$
2. $C_1(x) = x1$
3. $P_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i \quad 1 \leq i \leq n$

4. $Q(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{se } x \subseteq y \\ 0 & \textit{c.c.} \end{cases}$

e é fechada para:

- *Composição*

  $f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_k(x_1, \ldots, x_n))$

- *Recursão limitada na notação*

  $f(\bar{x}, \epsilon) = g(\bar{x})$

  $f(\bar{x}, y0) = h_0(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y))_{|t(\bar{x},y)}$

  $f(\bar{x}, y1) = h_1(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y))_{|t(\bar{x},y)}$

  onde t é uma função limitativa[2]

- *Cardinalidade*

  $c(\bar{x}, \epsilon) = \begin{cases} 0 & \textit{se } f(\bar{x}, \epsilon) = 0 \\ \epsilon & \textit{c.c.} \end{cases}$

  $c(\bar{x}, S(y)) = \begin{cases} S(c(\bar{x}, y)) & \textit{se } f(\bar{x}, S(y)) = 0 \\ c(\bar{x}, y) & \textit{c.c.} \end{cases}$

  onde S é a função sucessor definida por $S(\epsilon) = 0$, $S(x0) = x1$ e $S(x1) = S(x)0$.

Informalmente, a ideia do anterior esquema é que

$$c(\bar{x}, y) = \#\{w \leq_l y : f(\bar{x}, w) = 0\}.$$

Para tornar claro que a função c é a função que se obtém por cardinalidade a partir de f, por vezes escrevemos c_f.

Denotando por CH a classe dos predicados, φ, tais que a sua função característica, χ_φ, pertence a C, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.1 *A classe de predicados CH é fechada para quantificações limitadas, i.e. quantificações da forma $\exists y \preceq x$ e $\forall y \preceq x$.*[3]

Demonstração

Seja $\varphi(x,y)$ um predicado em CH. Sendo $\chi_\varphi(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } \varphi(x,y) \\ \epsilon & \text{c.c.} \end{cases}$, temos que $\chi_\varphi \in \mathsf{C}$.[4]

[2]Designamos por ϵ a sequência vazia e por *classe das funções limitativas* a menor classe de funções que contém ϵ, 0, 1, $\hat{}$, $\times$, P^n_j e é fechada para a composição.

[3]$\exists y \preceq x \ldots$ abrevia $\exists y(y \preceq x \wedge \ldots)$ e $\forall y \preceq x \ldots$ abrevia $\forall y(y \preceq x \rightarrow \ldots)$.

[4]Note que em vez dos usuais valores 0, 1 como imagens de uma função característica, usamos os dois primeiros elementos de $2^{<\omega}$ (pela relação $\leq_l$) ϵ, 0.

$$\exists y \preceq x \ \ \varphi(x,y) \Leftrightarrow \#\{y \leq_l 1 \times x : \chi_\varphi(x,y) = 0\} \neq \epsilon \Leftrightarrow \underbrace{c_{\chi_\varphi}(x, 1\times x) \neq \epsilon}_{\in \mathsf{CH}}$$

$$\forall y \preceq x \ \ \varphi(x,y) \Leftrightarrow \underbrace{c_{\chi_\varphi}(x, 1\times x) = S(1 \times x)}_{\in \mathsf{CH}}.$$

Note que os anteriores predicados estão em CH, uma vez que pela definição 3.2, facilmente se observa que as suas funções característica são funções de C.

□

Na proposição seguinte, que estabelece que C = FCH, revela-se a nova caracterização indutiva da hierarquia das funções de contagem, mencionada no início desta subsecção.

Proposição 3.2 *A classe* C*, introduzida na definição 3.2, coincide com a classe* FCH*, i.e.* C = FCH*.*

Demonstração

Sabemos que $\mathsf{FCH} = \bigcup_{i \geq 0} i\#\mathsf{P} = [0, 1, +, \dot{-}, \cdot, \pi^{\mathsf{n}}_{\mathsf{j}}]_{\mathsf{COMP,SOMA}}$. Comecemos por averiguar que a classe C está contida na classe FCH.

As *funções iniciais* de C estão em P, logo estão em FCH. Sabemos que a classe FCH é fechada para a *composição* e pode constatar-se que é também fechada para a *recursão limitada na notação* pois

$$\mathsf{P} \subseteq \#\mathsf{P} \subseteq \mathsf{P}^{\#\mathsf{P}} \subseteq 2\#\mathsf{P} \subseteq \mathsf{P}^{2\#\mathsf{P}} \subseteq 3\#\mathsf{P} \subseteq \mathsf{P}^{3\#\mathsf{P}} \subseteq \ldots \subseteq \mathsf{FCH}$$

e, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$, $\mathsf{P}^{k\#\mathsf{P}}$ é fechada para a recursão limitada na notação.

Assim sendo, verificando que FCH é fechada para a *cardinalidade*, temos a inclusão pretendida.

Seja $f \in \mathsf{FCH}$, queremos verificar que $c_f \in \mathsf{FCH}$. Seja $g(\bar{x}, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(\bar{x},y) = 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$.

Temos que $g \in \mathsf{FCH}$. Ora

$$c_f(\bar{x}, y) = \#\{z \leq_l y : f(\bar{x}, z) = 0\} = \textstyle\sum_{i=0}^{y} g(\bar{x}, i).$$

E portanto $c_f \in \mathsf{FCH}$ uma vez que FCH é fechada para a soma e $g \in \mathsf{FCH}$. Logo $\mathsf{C} \subseteq \mathsf{FCH}$.

Reciprocamente vejamos que a classe FCH está contida em C.

Uma vez que $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{C}$, tem-se que $0, 1, +, \dot{-}, \cdot, \pi^n_j \subseteq \mathsf{C}$.

Como a classe C é fechada para a *composição*, resta verificarmos que é fechada para a *soma*. Para isso, e uma vez que sendo $h(x) = 2^{p(|x|)}$ se tem $h \in \mathsf{P} \subseteq \mathsf{C}$ e C é fechada para a composição, basta provarmos que, partindo de uma função arbitrária $g \in \mathsf{C}$, se tem que a função f definida por $f(x,y) := \sum_{i=0}^{y} g(x,i)$ pertence a C. Ora

$$\begin{aligned} f(x,y) = \textstyle\sum_{i=0}^{y} g(x,i) &= g(x,0) + g(x,1) + \cdots + g(x,y) = \\ &= \#\{v : v < g(x,0)\} + \#\{v : v < g(x,1)\} + \cdots + \#\{v : v < g(x,y)\} = \\ &= \#\{\langle v, i\rangle^5 : i \leq y \wedge v < g(x,i)\} = \\ &= \#\{u : \exists v, i \preceq u \ \ u = \langle v, i\rangle \wedge i \leq y \wedge v < g(x,i)\}. \end{aligned}$$

[5] Por $\langle v, i\rangle$ representamos a codificação de (v,i) feita (em PTIME) do seguinte modo: $\langle v, i\rangle = cod(v)11cod(i)$, onde $cod(\epsilon) = \epsilon$, $cod(x0) = cod(x)01_{|11\times x1}$, $cod(x1) = cod(x)10_{|11\times x1}$.

Seja $h(x,y,u) = \begin{cases} 0 & \text{se } \exists v, i \preceq u \ \ u = \langle v, i\rangle \wedge i \leq y \wedge v < g(x,i) \\ \epsilon & \text{c.c.} \end{cases}$.

Pela proposição 3.1, temos que $h \in \mathsf{C}$. Logo $f(x,y) = \#\{u : h(x,y,u) = 0\} = c_h(x,y,\underbrace{t(x,y)y11\hat{\ }t(x,y)y11}_{majorante\ para\ os\ u's})$.

Vejamos porque é possível pensarmos em tal majorante para o conjunto $\{u : h(x,y,u) = 0\}$. Ora $g \in \mathsf{C} \subseteq \bigcup_{i\geq 0} i\#\mathsf{P}$, logo existe $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ tal que $g \in k\#\mathsf{P} = \#\mathsf{P}^{(k-1)\#\mathsf{P}}$. Existe, portanto, uma máquina de Turing não determinista M, trabalhando em tempo polinomial p e com oráculo em $(k-1)\#\mathsf{P}$ tal que $g(x,i) =$ 'número de estados de aceitação de M quando iniciada com *input* x, i'. Como, sem perda de generalidade, podemos supôr que as MTND são bifurcadas (i.e., têm apenas duas possibilidades para o próximo passo), temos que $g(x,i) \leq 2^{p(|x|,|i|)}$, logo existe uma função limitativa t tal que $g(x,i) \leq t(x,i)$. Sendo t crescente, vem que $t(x,y) \geq t(x,i) \ \ \forall i \leq y$. Tendo em conta a definição de $h(x,y,u) = 0$ e a codificação que estamos a usar, $t(x,y)y11\hat{\ }t(x,y)y11$ pode ser tomado como majorante.

Mas então $f \in \mathsf{C}$, o que encerra a demonstração.

□

No decorrer do capítulo, servimo-nos também de algumas variantes das anteriores classes, que passamos a descrever.

Definição 3.3 $\mathsf{FCH}^{\bar{\mathsf{X}}}$ *é a classe de funções semelhante a* FCH *(definição 3.2), mas em que as variáveis de segunda ordem* $\bar{X}$ *(subconjuntos de* $2^{<\omega}$*), vistas como funções de* $2^{<\omega}$ *em* $\{\epsilon, 0\}$ *são também funções iniciais.*

Definição 3.4 $\mathsf{CH}^{\bar{\mathsf{X}}}$ *é a classe dos predicados cujas funções característica pertencem a* $\mathsf{FCH}^{\bar{\mathsf{X}}}$.

Lema 3.1 *Seja* $\varphi(\bar{x}, \bar{X}, y)$ *um predicado em* $\mathsf{CH}^{\bar{\mathsf{X}}}$ *tal que* $\forall \bar{x} \forall \bar{X} \exists y \preceq t(\bar{x}) \ \ \varphi(\bar{x}, \bar{X}, y)$. *Então* $f(\bar{x}, \bar{X}) := \mu y \preceq t(\bar{x}) \ \ \varphi(\bar{x}, \bar{X}, y)$ *está em* $\mathsf{FCH}^{\bar{\mathsf{X}}}$.

Demonstração

Seja $\psi(\bar{x}, \bar{X}, y) :\leftrightarrow \forall z \leq_l y \ \ \neg\varphi(\bar{x}, \bar{X}, z)$. Trata-se de um predicado em $\mathsf{CH}^{\bar{\mathsf{X}}}$, visto φ estar em $\mathsf{CH}^{\bar{\mathsf{X}}}$. Temos, portanto, que $\chi_\psi(\bar{x}, \bar{X}, y) := \begin{cases} 0 & \text{se } \psi(\bar{x}, \bar{X}, y) \\ \epsilon & \text{c.c.} \end{cases}$ pertence a $\mathsf{FCH}^{\bar{\mathsf{X}}}$.

Ora $f(\bar{x}, \bar{X}) := \mu y \preceq t(\bar{x}) \ \ \varphi(\bar{x}, \bar{X}, y) = \mu y \leq_l 1 \times t(\bar{x}) \ \ \varphi(\bar{x}, \bar{X}, y) = \#\{\omega \leq_l 1 \times t(\bar{x}) : \psi(\bar{x}, \bar{X}, \omega)\} = c_{\chi_\psi}(\bar{x}, \bar{X}, 1 \times t(\bar{x})) \in \mathsf{FCH}^{\bar{\mathsf{X}}}$.

□

3.2 Aritmética computável na hierarquia de contagem I

Uma determinada classe de complexidade computacional pode ser caracterizada de diversas formas. Essas diferentes caracterizações podem, contudo, ser 'agrupadas' segundo a abordagem seguida para as obter.

Visto serem classes de funções que têm em comum necessitarem, na sua computação, de certos recursos em termos de mecanicidade, tempo e/ou espaço, uma abordagem possível e em certo sentido a mais natural, é recorrer-se a *máquinas*, que poderão ser de Turing, registadoras ou outras. Foi o caminho seguido quando, no início da Secção 3.1, necessitámos definir $\#\mathsf{P}$ e FCH.

Outra possibilidade é a chamada *caracterização indutiva*, em que é dado um processo para obter todas as funções da classe e apenas essas, recorrendo a certas funções iniciais e permitindo criar novas funções a partir das já existentes através de determinados esquemas. A nossa caracterização alternativa de FCH, apresentada na definição 3.2, enquadra-se nesta abordagem.

Nesta e nas próximos secções a estratégia adoptada será outra. Caracterizamos a hierarquia das funções de contagem através de *esquemas formais*, isto é, introduzimos determinadas teorias cujas funções demonstravelmente totais (com gráfico apropriado) sejam exactamente as funções de FCH. Tal abordagem surge na sequência de estudos idênticos a propósito de outras classes de complexidade computacional. Veja [4] (em notação numérica) e [14], [22] (em notação binária).

Uma vez que lidamos com teorias sem exponenciação, achamos mais natural utilizar *notação binária*, i.e. servimo-nos duma linguagem que descreve directamente as sequências finitas de 0's e 1's — cuja interpretação intencionada é a árvore binária — em vez de descrever directamente os números naturais.

3.2.1 Teoria CHCA

Definição 3.5 *Seja $\mathcal{L}$ a linguagem de primeira ordem com igualdade que contém três constantes* $0, 1, \epsilon$*, dois símbolos funcionais binários* $\hat{}\,, \times$ *e um símbolo relacional binário* $\subseteq$*.*

A estrutura *standard* para esta linguagem tem domínio $2^{<\omega}$.

Nesta secção trabalhamos com uma variante da anterior linguagem — $\mathcal{L}_{\mathsf{FCH}}$ — a linguagem de primeira ordem com igualdade, que se obtém de $\mathcal{L}$, adicionando um símbolo funcional para cada descrição de uma função na hierarquia das funções de contagem FCH, de acordo com o esquema apresentado na definição 3.2 que, como vimos, gera as funções dessa classe. Adoptamos as usuais noções de *termo* e *fórmula* da linguagem.

A fim de introduzirmos a teoria CHCA, mais precisamente para definirmos a indução nela permitida, precisamos do conceito que se segue.

Definição 3.6 *A* classe das matrizes decidíveis por contagem *é a menor classe de fórmulas de $\mathcal{L}_{\mathsf{FCH}}$ que contém as fórmulas atómicas e é fechada para as operações booleanas e quantificações da forma $\forall x(x \preceq t \rightarrow \dots)$ e $\exists x(x \preceq t \wedge \dots)$, onde t é um termo de $\mathcal{L}_{\mathsf{FCH}}$ que não contém a variável x.*

Definição 3.7 CHCA *(acrónimo para* Counting Hierarchy Computable Arithmetic*) é a teoria de primeira ordem, na linguagem $\mathcal{L}_{\mathsf{FCH}}$, cujos axiomas são o fecho universal das seguintes fórmulas:*

- *Axiomas básicos*

  1. $x\epsilon = x$
  2. $x(y0) = (xy)0$
  3. $x(y1) = (xy)1$
  4. $x \times \epsilon = \epsilon$
  5. $x \times y0 = (x \times y)x$
  6. $x \times y1 = (x \times y)x$
  7. $x \subseteq \epsilon \leftrightarrow x = \epsilon$
  8. $x \subseteq y0 \leftrightarrow x \subseteq y \vee x = y0$
  9. $x \subseteq y1 \leftrightarrow x \subseteq y \vee x = y1$
  10. $x0 = y0 \rightarrow x = y$
  11. $x1 = y1 \rightarrow x = y$
  12. $x0 \neq y1$
  13. $x0 \neq \epsilon$
  14. $x1 \neq \epsilon$

- *Axiomas definidores*

  a. *Funções iniciais*

     1. $C_0(x) = x0$
     2. $C_1(x) = x1$
     3. $P_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i \quad 1 \leq i \leq n$
     4. $Q(x, y) = 1 \leftrightarrow x \subseteq y$
        $Q(x, y) = 0 \vee Q(x, y) = 1$

  b. *Funções derivadas*

     1. $f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_k(x_1, \ldots, x_n))$,
        onde f é a descrição da composição definida a partir de $g, h_1, \ldots, h_k$
     2. $f(\bar{x}, \epsilon) = g(\bar{x})$
        $f(\bar{x}, y0) = h_0(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y))_{|_{t(\bar{x},y)}}$
        $f(\bar{x}, y1) = h_1(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y))_{|_{t(\bar{x},y)}}$,
        onde f é a descrição da recursão limitada na notação a partir de g, h_0 e h_1 e t é um termo de $\mathcal{L}$
     3. $f(\bar{x}, \epsilon) = 0 \leftrightarrow g(\bar{x}, \epsilon) = 0$
        $f(\bar{x}, \epsilon) = 0 \vee f(\bar{x}, \epsilon) = \epsilon$
        $f(\bar{x}, S(y)) = S(f(\bar{x}, y)) \leftrightarrow g(\bar{x}, S(y)) = 0$
        $f(\bar{x}, S(y)) = S(f(\bar{x}, y)) \vee f(\bar{x}, S(y)) = f(\bar{x}, y)$,
        onde f é a descrição da cardinalidade a partir de g e S é a função sucessor

- *Esquema de indução na notação para matrizes decidíveis por contagem*

  $A(\epsilon) \wedge \forall x(A(x) \rightarrow A(x0) \wedge A(x1)) \rightarrow \forall x A(x),$

  onde A é uma matriz decidível por contagem, podendo ter outras variáveis livres além de x.

A teoria CHCA foi inspirada na teoria PTCA [14] (veja também [2]), relacionada com tempo polinomial e na teoria PSCA [22], relacionada com espaço polinomial.

Embora nem sempre se refira explicitamente, obviamente convencionamos que uma teoria numa linguagem com igualdade contém os *axiomas para a igualdade*: $x_1 = x_1$, $x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$, $x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \wedge R(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow R(y_1, \ldots, y_n)$ e $x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge x_1 = x_2 \rightarrow y_1 = y_2$, com x_i, y_i variáveis, f símbolo funcional n-ário e R símbolo relacional n-ário.

Observação 3.1 *Em* CHCA *é válido o seguinte esquema, que designamos por* indução lenta *para matrizes decidíveis por contagem:*

$$A(\epsilon) \wedge \forall x(A(x) \rightarrow A(S(x))) \rightarrow \forall x A(x),$$

onde A é uma matriz decidível por contagem, possivelmente com outras variáveis livres além de x. Em [13] é apresentada a demonstração de tal resultado no contexto de PTCA*, demonstração essa que continua válida para a teoria* CHCA.

3.2.2 Caracterização das funções demonstravelmente totais de CHCA

O estudo apresentado nesta subsecção resulta de uma adaptação ao caso CHCA do estudo efectuado no artigo [14], a propósito da teoria PTCA. Baseados nesse mesmo artigo, apresentámos em [22] idêntica adaptação no contexto de PSPACE.

Proposição 3.3 *Para cada matriz decidível por contagem A, existe um símbolo funcional K_A em $\mathcal{L}_{\mathsf{FCH}}$ tal que:*

$$\mathsf{CHCA} \vdash (A(\bar{x}) \rightarrow K_A(\bar{x}) = 1) \wedge (\neg A(\bar{x}) \rightarrow K_A(\bar{x}) = 0).$$

Demonstração

Comecemos por verificar que, para cada termo t de $\mathcal{L}_{\mathsf{FCH}}$ existe um símbolo funcional f_t em $\mathcal{L}_{\mathsf{FCH}}$ tal que $\mathsf{CHCA} \vdash \forall \bar{x}(f_t(\bar{x}) = t(\bar{x}))$. Pelo axioma definidor *b.1* de CHCA, basta estudar os casos em que t é uma constante e uma variável.

Para as constantes ϵ, 0 e 1, tomemos $f_\epsilon(x) = E(P_1^1(x), C_0(x))$, (onde $E(x, \epsilon) = P_1^1(x)$ e $E(x, yi) = P_1^3(y, x, E(x, y))_{|\epsilon}$ com $i = 0, 1$), $f_0(x) = C_0(f_\epsilon(x))$ e $f_1(x) = C_1(f_\epsilon(x))$ respectivamente.

Se t é a variável x, basta tomar $f_t(x)$ como sendo $P_1^1(x)$.

A demonstração da proposição processa-se agora por indução na complexidade de A. No que se segue, denotamos por $K_=(x, y) := Q(11, Q(x, y)Q(y, x))$.

No caso das fórmula atómica, se $A := t_1 \subseteq t_2$, tomamos K_A como sendo $Q(f_{t_1}, f_{t_2})$; se $A := t_1 = t_2$ tomamos K_A como sendo $K_=(f_{t_1}, f_{t_2})$.

Definimos $K_{\neg B} := K_=(0, K_B)$ e $K_{B \wedge C} := K_=(11, K_B K_C)$.

Seja $A(\bar{x})$ a fórmula $\forall y \preceq t(\bar{x}) B(\bar{x}, y)$, i.e. $\forall y \leq_l 1 \times t(\bar{x}) B(\bar{x}, y)$. Por hipótese de indução existe $K_B(\bar{x}, y)$ verificando as condições da proposição. Tomemos

$$c_{K_B}(\bar{x}, \epsilon) = \begin{cases} 0 & \text{se } K_B(\bar{x}, \epsilon) = 0 \\ \epsilon & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$c_{K_B}(\bar{x}, S(y)) = \begin{cases} S(c_{K_B}(\bar{x}, y)) & \text{se } K_B(\bar{x}, S(y)) = 0 \\ c_{K_B}(\bar{x}, y) & \text{c.c.} \end{cases},$$

i.e. $c_{K_B}(\bar{x}, y) = \#\{\omega \leq_l y : K_B(\bar{x}, \omega) = 0\}$.

Por indução lenta em x, pode ver-se que, $\forall y \leq_l x B(\bar{x}, y) \leftrightarrow c_{K_B}(\bar{x}, x) = \epsilon$, logo $\forall y \preceq t(\bar{x}) B(\bar{x}, y) \leftrightarrow c_{K_B}(\bar{x}, 1 \times t(\bar{x})) = \epsilon$. Tomemos $K_A(\bar{x}) := K_=(\epsilon, c_{K_B}(\bar{x}, 1 \times t(\bar{x})))$. Aquando da indução lenta em x, note que, sendo B uma matriz decidível por contagem, $\forall y \leq_l x B$ é equivalente a $\forall y \preceq x(y \leq_l x \to B)$, ou seja, $\forall y \preceq x[((y \preceq x \wedge \neg(y \equiv x)) \vee (y \equiv x \wedge \exists u \subseteq y(u0 \subseteq y \wedge u1 \subseteq x)) \vee (y = x)) \to B]$, equivalente a uma matriz decidível por contagem.

$\square$

Proposição 3.4 *Dadas matizes decidíveis por contagem $A_1(\bar{x}), \ldots, A_n(\bar{x})$ e símbolos funcionais $f_1(\bar{x}), \ldots, f_n(\bar{x}), f_{n+1}(\bar{x})$, existe um símbolo funcional $f(\bar{x})$ tal que:*

$$\begin{aligned} \mathsf{CHCA} \vdash\ & (A_1(\bar{x}) \wedge f(\bar{x}) = f_1(\bar{x})) \vee (\neg A_1(\bar{x}) \wedge A_2(\bar{x}) \wedge f(\bar{x}) = f_2(\bar{x})) \vee \ldots \\ & \ldots \vee (\neg A_1(\bar{x}) \wedge \ldots \wedge \neg A_n(\bar{x}) \wedge f(\bar{x}) = f_{n+1}(\bar{x})). \end{aligned}$$

Demonstração

Provamos o resultado para $n = 1$. Seja $h(y, \epsilon) = y$, $h(y, x0) = y$, $h(y, x1) = x$. Temos que $\mathsf{CHCA} \vdash h(y, x)1 = x \vee ((\forall z \subseteq x\ z1 \neq x) \wedge h(y, x) = y)$. Tomando $f(\bar{x}) = h(f_2(\bar{x}), f_1(\bar{x}) K_{A_1}(\bar{x}))$ temos o pretendido.

O caso geral prova-se facilmente por indução em n, notando que sendo g o símbolo funcional que verifica a propriedade para n, o passo de indução consegue-se tomando $f(\bar{x}) = h(f_{n+2}(\bar{x}), g(\bar{x}) K_{A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_{n+1}}(\bar{x}))$.

$\square$

Lema 3.2 *Para cada matriz decidível por contagem $A(\bar{z}, x)$ existe um símbolo funcional g em $\mathcal{L}_{\mathsf{FCH}}$ tal que:*

$$\mathsf{CHCA} \vdash (\exists y \preceq x A(\bar{z}, y)) \to g(\bar{z}, x) \preceq x \wedge A(\bar{z}, g(\bar{z}, x)).$$

Demonstração

Seja

$$f(\bar{z},x) = \begin{cases} c_{K_B}(\bar{z},x) & \text{se } \exists y \leq_l x A(\bar{z},y) \\ x1 & \text{c.c.} \end{cases},$$

onde $B(\bar{z},\omega) :\leftrightarrow \exists y \leq_l \omega A(\bar{z},y)$ e recordemos que K_B é um símbolo funcional que verifica $\mathsf{CHCA} \vdash (B(\bar{z},\omega) \to K_B(\bar{z},\omega) = 1) \wedge (\neg B(\bar{z},\omega) \to K_B(\bar{z},\omega) = 0)$ e $c_{K_B}(\bar{z},x)$ é o símbolo funcional correspondente à cardinalidade aplicada a K_B, i.e. $c_{K_B}(\bar{z},x) = \#\{\omega \leq_l x : \forall y \leq_l \omega \neg A(\bar{z},y)\}$. Para garantir a existência de tais símbolos funcionais, veja proposição 3.4, proposição 3.3 e note que (*mutatis mutandis* ao observado a propósito de $\forall y \leq_l x$ no final da demonstração da proposição 3.3) $\exists y \leq_l kA$ é equivalente a uma matriz decidível por contagem.

Vejamos que

$$(\star)\ f(\bar{z},x) \preceq x \to A(\bar{z}, f(\bar{z},x)).$$

Por indução lenta em x é fácil apercebermo-nos da veracidade dos seguintes factos.

Facto 1 $c_{K_B}(\bar{z},x) \leq_l S(x)$

Facto 2 Se $K_B(\bar{z},x) \neq 0$ então $c_{K_B}(\bar{z},x) \preceq x$

Facto 3 $(\forall y \leq_l x K_B(\bar{z},y) = 0) \to c_{K_B}(\bar{z},x) = S(x)$.

Provemos então $(\star)$ através de indução lenta em x. Para $x = \epsilon$ o resultado é imediato. Suponhamos por hipótese de indução que $f(\bar{z},x) \preceq x \to A(\bar{z}, f(\bar{z},x))$. Queremos provar que $f(\bar{z},S(x)) \preceq S(x) \to A(\bar{z}, f(\bar{z},S(x)))$.

Suponhamos que $f(\bar{z},S(x)) \preceq S(x)$. Mas então temos que $f(\bar{z},S(x)) = c_{K_B}(\bar{z},S(x))$ e $\exists y \leq_l S(x) A(\bar{z},y)$. Como $K_B(\bar{z},S(x)) \neq 0$ temos que $c_{K_B}(\bar{z},S(x)) = c_{K_B}(\bar{z},x)$.

- Se $\exists y <_l S(x) A(\bar{z},y)$ então $\exists y \leq_l x A(\bar{z},y)$, i.e. $K_B(\bar{z},x) \neq 0$. Logo $f(\bar{z},x) := \underbrace{c_{K_B}(\bar{z},x)}_{\preceq x\ (Facto\ 2)} = f(\bar{z},S(x))$. Mas então, por hipótese de indução, temos $A(\bar{z},f(\bar{z},x))$ ou seja $A(\bar{z}, f(\bar{z},S(x)))$.
- Se $\forall y \leq_l x \neg A(\bar{z},y)$, i.e. $K_B(\bar{z},x) = 0$, como $\exists y \leq_l S(x) A(\bar{z},y)$ temos que $A(\bar{z},S(x))$. Ora $f(\bar{z},S(x)) = c_{K_B}(\bar{z},S(x)) = c_{K_B}(\bar{z},x)$ que, pelo Facto 3, é igual a $S(x)$. Logo temos $A(\bar{z}, f(\bar{z},S(x)))$.

Portanto $f(\bar{z},x) \preceq x \to A(\bar{z}, f(\bar{z},x))$.

Tomando $g(\bar{z},x) := f(\bar{z}, 1 \times x)$, vejamos que temos o pretendido.

Suponhamos que $\exists y \preceq x A(\bar{z},y)$. Como por $(\star)$, $g(\bar{z},x) \preceq x \to A(\bar{z}, g(\bar{z},x))$, basta provarmos que $g(\bar{z},x) \preceq x$.

Como $\exists y \leq_l 1 \times x A(\bar{z},y)$ temos $g(\bar{z},x) := f(\bar{z}, 1 \times x) = \underbrace{c_{K_B}(\bar{z}, 1 \times x) \preceq 1 \times x}_{Facto\ 2} \equiv x$, o que conclui a demonstração.

$\square$

Proposição 3.5 *Seja M um modelo de* CHCA *e N uma subestrutura de M. As matrizes decidíveis por contagem são absolutas entre N e M, i.e. se $A(\bar{x})$ é uma matriz decidível por contagem e $\bar{a}$ são elementos de N então $N \vDash A(\bar{a})$ sse $M \vDash A(\bar{a})$.*

Demonstração

A demonstração é feita por indução na complexidade de A.

Todos os casos são triviais à excepção das quantificações limitadas.

Suponhamos que $A(\bar{x})$ tem a forma $\forall y \preceq t(\bar{x})B(\bar{x}, y)$. Sejam $\bar{a}$ elementos de N. Queremos provar que $N \vDash A(\bar{a})$ sse $M \vDash A(\bar{a})$.

Se $M \vDash A(\bar{a})$, usando a hipótese de indução e o facto de N ser subestrutura de M, temos que $N \vDash A(\bar{a})$.

Reciprocamente suponhamos que $M \nvDash A(\bar{a})$. Então $M \vDash \exists y \preceq t(\bar{a})\neg B(\bar{a}, y)$. Aplicando o lema 3.2 a $\neg B$, sabemos que existe um símbolo funcional g em $\mathcal{L}_{\mathsf{FCH}}$ tal que $M \vDash g(\bar{a}, t(\bar{a})) \preceq t(\bar{a})$ e $M \nvDash B(\bar{a}, g(\bar{a}, t(\bar{a})))$. Como $g(\bar{a}, t(\bar{a}))$ está em N, usando a hipótese de indução, temos $N \vDash g(\bar{a}, t(\bar{a})) \preceq t(\bar{a}) \wedge \neg B(\bar{a}, g(\bar{a}, t(\bar{a})))$, ou seja, $N \nvDash A(\bar{a})$.

O caso $\exists y \preceq t(\bar{x})B(\bar{x}, y)$ num sentido é óbvio e no outro torna-se imediato usando o lema 3.2.

□

Proposição 3.6 *Se M é um modelo de* CHCA *e N é uma subestrutura de M, então N é um modelo de* CHCA.

Demonstração

Sendo N uma subestrutura de uma modelo M de CHCA, obviamente os axiomas básicos e os axiomas definidores são válidos em N.

Vejamos que o esquema de indução também se verifica em N. Seja A uma matriz decidível por contagem. Queremos provar que

$$N \vDash A(\epsilon) \wedge \forall x(A(x) \to A(x0) \wedge A(x1)) \to \forall x A(x).$$

Suponhamos que $N \vDash A(\epsilon) \wedge \forall x(A(x) \to A(x0) \wedge A(x1))$. Seja a um elemento arbitrário de N. Tomemos B definida do seguinte modo $B(y) :\leftrightarrow y \subseteq a \to A(y)$. Sabemos que M é modelo de CHCA, logo temos $M \vDash B(\epsilon) \wedge \forall y(B(y) \to B(y0) \wedge B(y1)) \to \forall y B(y)$. Como por hipótese $N \vDash A(\epsilon) \wedge \forall x(A(x) \to A(x0) \wedge A(x1))$ é fácil ver que $M \vDash B(\epsilon) \wedge \forall y(B(y) \to B(y0) \wedge B(y1))$. Logo $M \vDash \forall y B(y)$. Em particular $M \vDash B(a)$. Portanto $M \vDash A(a)$. Como as matrizes decidíveis por contagem são absolutas entre M e N (proposição 3.5), temos que $N \vDash A(a)$.

□

Observação 3.2 *Por um resultado de Łós e Tarski (veja [7]), que garante que uma teoria é preservada por subestruturas sse é constituída por axiomas universais, temos que* CHCA *é uma* teoria universal.

Recorrendo ao *teorema de Herbrand* a seguir enunciado e cuja demonstração se pode encontrar em [6], temos reunidas todas as condições para caracterizar as funções demonstravelmente totais de CHCA.

Teorema 3.1 (Teorema de Herbrand) *Seja* T *uma teoria axiomatizada por fórmulas puramente universais. Suponhamos que* $\mathsf{T} \vdash (\forall \bar{x})\exists y_1 \ldots \exists y_k B(\bar{x}, \bar{y})$*, com* $B(\bar{x}, \bar{y})$ *uma fórmula sem quantificadores.*

Então existe uma sequência finita de termos $t_{i,j} = t_{i,j}(\bar{x})$ *com* $1 \leq i \leq r$ *e* $1 \leq j \leq k$ *tal que* $\mathsf{T} \vdash (\forall \bar{x})(\bigvee_{i=1}^{r} B(\bar{x}, t_{i,1}, \ldots, t_{i,k}))$.

Teorema 3.2 *Suponhamos que* $\mathsf{CHCA} \vdash \forall \bar{x} \exists y A(\bar{x}, y)$*, onde* A *é uma matriz decidível por contagem, sendo* $\bar{x}$ *e* y *as suas únicas variáveis livres.*

Então existe um símbolo funcional f *em* $\mathcal{L}_{\mathsf{FCH}}$ *tal que* $\mathsf{CHCA} \vdash \forall \bar{x} A(\bar{x}, f(\bar{x}))$.

Demonstração

Pela observação 3.2, sabemos que CHCA é uma teoria universal. Suponhamos que $\mathsf{CHCA} \vdash \forall \bar{x} \exists y A(\bar{x}, y)$ com A matriz decidível por contagem. Pela proposição 3.3, podemos substituir A por $K_A(\bar{x}, y) = 1$, que é uma fórmula sem quantificadores. Aplicando o teorema de Herbrand, existem termos $t_1, \ldots, t_r$ tais que $\mathsf{CHCA} \vdash \forall \bar{x}(\bigvee_{i=1}^{r} A(\bar{x}, t_i))$.

Sendo

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} t_1 & \text{se } A(\bar{x}, t_1) \\ t_2 & \text{se } \neg A(\bar{x}, t_1) \wedge A(\bar{x}, t_2) \\ . & \\ . & \\ t_r & \text{se } \neg A(\bar{x}, t_1) \wedge \ldots \wedge \neg A(\bar{x}, t_{r-1}) \wedge A(\bar{x}, t_r) \end{cases},$$

que pela proposição 3.4 é um símbolo funcional de $\mathcal{L}_{\mathsf{FCH}}$, verificamos, como se pretendia, que $\mathsf{CHCA} \vdash \forall \bar{x} A(\bar{x}, f(\bar{x}))$.

□

Concluimos que as funções demonstravelmente totais de CHCA, cujo gráfico é uma matriz decidível por contagem, são exactamente as funções de FCH.

3.3 Aritmética computável na hierarquia de contagem II

À semelhança do estudo efectuado na secção anterior, também nesta apresentamos uma caracterização de FCH através de esquemas formais.

Contudo, a teoria — TCA — agora introduzida e que, ainda que em estado bastante 'embrionário', é já um precursor do sistema onde mais adiante formalizamos algumas noções de análise é, ao contrário de CHCA, uma teoria numa linguagem de segunda ordem.

A estratégia seguida para provar que as funções demonstravelmente totais desta nova teoria coincidem exactamente com as funções da hierarquia de contagem baseia-se, não como anteriormente no teorema de Herbrand, mas numa variante do *cálculo de sequentes de Gentzen* e do teorema da eliminação do corte.

Uma abordagem semelhante foi adoptada em [22], no contexto de PSPACE, a propósito da teoria $\Sigma_1^{1,b}$-NIA.

No artigo [27], auto-denominado pelos autores Jan Johannsen e Chris Pollett como 'extended abstract', são introduzidas várias teorias, designadas por D_k^0. A teoria TCA corresponde à teoria D_2^0 aí apresentada.

3.3.1 Teoria TCA

Antes de definirmos a teoria central desta secção — TCA — relembramos algumas teorias de primeira ordem que, como veremos adiante, se encontram relacionadas com a primeira.

Σ_1^b-NIA, também conhecida por Σ_1^b-PIND, é a teoria de primeira ordem, na linguagem $\mathcal{L}$ (veja definição 3.5) cujos axiomas são o fecho universal das seguintes fórmulas:

- Axiomas básicos[6]
- Esquema de indução na notação para fórmulas Σ_1^b, i.e. para fórmulas da forma $\exists y \preceq t(\bar{x})A(\bar{x}, y)$ em que as únicas quantificações que ocorrem em A são quantificações de subpalavras.

Para um estudo mais cuidado desta teoria veja [13] e [14].

Σ_∞^b-NIA, é a teoria definida exactamente como a anterior, substituindo-se o esquema de indução na notação para fórmulas Σ_1^b, pelo esquema de indução na notação para fórmulas Σ_∞^b, i.e. fórmulas limitadas. Tal teoria pode ser encontrada em [12].

Algumas propriedades bem conhecidas destas teorias (veja referências acima) encontram-se listadas na observação seguinte.

Observação 3.3
- *A teoria* Σ_1^b-NIA *é interpretável na teoria* S_2^1 *de Buss e vice-versa*[7]
- *As funções demonstravelmente totais de* Σ_1^b-NIA *são as funções computáveis em tempo polinomial*
- *Podemos assumir que a teoria* Σ_1^b-NIA *contém um símbolo funcional para cada descrição de uma função computável em tempo polinomial*
- *A teoria* Σ_∞^b-NIA *é equivalente à teoria* S_2 *de Buss*

[6] Os primeiros 14 axiomas apresentados na definição 3.7, aquando da introdução da teoria CHCA.

[7] Num artigo conjunto com Isabel Oitavem [23] (recentemente aceite para publicação) apresentamos de forma explícita uma interpretação de S_2^1 em Σ_1^b-NIA. Embora tal resultado fosse aceite e amplamente usado não existia (que soubessemos) na literatura nenhuma demonstração do mesmo.

- Σ_1^b-NIA $\subseteq \Sigma_\infty^b$-NIA.

Uma vez que a teoria que pretendemos introduzir é uma teoria de segunda ordem, passamos a definir a linguagem de segunda ordem que lhe serve de suporte.

Definição 3.8 *$\mathcal{L}_2^b$ é a linguagem de segunda ordem com igualdade que resulta de $\mathcal{L}$ acrescentando variáveis de segunda ordem, denotadas por $X^t, Y^q, \ldots, G^r, F^s, \ldots$ (sendo $t, q, r, s, \ldots$ termos de $\mathcal{L}$) e um símbolo relacional binário $\in$ que opera entre um termo de $\mathcal{L}$ e uma variável de segunda ordem.*

A ideia por detrás dos dois tipos de variáveis de $\mathcal{L}_2^b$ é que, no modelo *standard*, as variáveis de primeira ordem tomam valores em $2^{<\omega}$, enquanto as variáveis de segunda ordem, digamos X^t, denotam um subconjunto de $2^{<\omega}$ que verifica $x \in X^t \to x \preceq t$, onde t é um termo que não depende de x.

Os *termos de $\mathcal{L}_2^b$* coincidem com os termos de $\mathcal{L}$.

A classe de *fórmulas de $\mathcal{L}_2^b$* pode ser definida como a menor classe de expressões que contém as fórmulas atómicas ($t_1 \subseteq t_2, t_1 = t_2, t_1 \in F^t$, com t_1 e t_2 termos e F^t uma variável de segunda ordem) e é fechada para as operações booleanas ($\neg, \wedge, \vee, \to$), para as quantificações de primeira ordem ($\forall x, \exists x$), para as quantificações limitadas de primeira ordem ($\forall x \preceq t, \exists x \preceq t$) e para as quantificações de segunda ordem ($\forall F^t, \exists F^t$).[8]

Uma fórmula de $\mathcal{L}_2^b$ é designada por *fórmula* $\Sigma_0^{1,b}$ se não tem quantificações de segunda ordem e todas as quantificações de primeira ordem são limitadas.

Estamos agora em condições de introduzir a teoria TCA (acrónimo para *Theory of Counting Arithmetic*). Antes, porém, de a definirmos rigorosamente listando os seus axiomas, vamos motivar dois desses axiomas, sendo o primeiro particularmente técnico, e o segundo o mais distintivo da teoria.

O primeiro axioma-esquema a que nos referimos é o denominado *esquema de substituição para fórmulas* $\Sigma_0^{1,b}$. A sua finalidade é assegurar que se $\forall x \preceq t \exists F^q \varphi(x, F^q)$ então é possível coleccionar tais conjuntos associados à sequência dos x's, através de um conjunto G (convenientemente limitado) tal que $\forall x \preceq t\ \bar{\varphi}(x, G)$, onde $\bar{\varphi}$ coincide com φ a menos das subfórmulas atómicas $s \in F^q$ alteradas segundo o modo como se efectua a coleccionação (veja detalhes na definição 3.9).

O segundo axioma que pretendemos motivar e que justifica o nome da teoria é o denominado *axioma da contagem*. Ele garante que, dado um conjunto limitado F^t, existe uma função f (cujo domínio são os elementos de primeira ordem de comprimento menor ou igual a t, convenientemente codificada sob a forma de conjunto limitado — veja 3.9) que, dado

[8] Note que em $\mathcal{L}_2^b$, sendo P uma fórmula, introduzimos $(\forall x \preceq t)P$ e $(\exists x \preceq t)P$ como novas fórmulas e não como meras abreviaturas de $\forall x(x \preceq t \to P)$ e $\exists x(x \preceq t \wedge P)$ respectivamente. Já em [22] utilizámos semelhante artifício por motivos técnicos relacionados com o cálculo de sequentes e no Capítulo 2, a propósito das quantificações limitadas pela relação $\leq$, também usámos semelhante convenção.

$x \preceq t$, conta o número de elementos de F^t menores ou iguais (pela ordem $\leq_l$) que x. Mais formalmente, $(\epsilon \notin F^t \to f(\epsilon) = \epsilon) \wedge (\epsilon \in F^t \to f(\epsilon) = 0) \wedge \forall x <_l 1 \times t[(S(x) \notin F^t \to f(S(x)) = f(x)) \wedge (S(x) \in F^t \to f(S(x)) = S(f(x)))]$.

Definição 3.9 TCA *é a teoria de segunda ordem na linguagem $\mathcal{L}_2^b$, cujos axiomas são o fecho universal das seguintes fórmulas:*

- *Axiomas básicos*[9]
- $\forall y \forall F^t (y \in F^t \to y \preceq t)$, *onde t é um termo onde y não ocorre*
- *Esquema de indução na notação para fórmulas $\Sigma_0^{1,b}$*

  $\varphi(\epsilon) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x0) \wedge \varphi(x1)) \to \forall x \varphi(x)$,

  com φ uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$ podendo ter outras variáveis livres além de x
- *Esquema de compreensão para fórmulas $\Sigma_0^{1,b}$*

  $\forall x \exists F^x \forall y \preceq x(y \in F^x \leftrightarrow \varphi(y))$,

  com φ uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$, podendo ter outras variáveis livres além de y, mas onde a variável F^x não ocorre
- *Esquema de substituição para fórmulas $\Sigma_0^{1,b}$*

  $\forall x \preceq t \exists F^q \, \varphi(x, F^q) \to \exists G^{(tq'1)(tq'1)} \forall x \preceq t \, \bar{\varphi}(x, G^{(tq'1)(tq'1)})$,

  com φ uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$ que pode ter outras variáveis livres além de x e F^q, t um termo onde x não ocorre, $q' := q[t/x]$[10] *e $\bar{\varphi}$ se obtém de φ substituindo todas as ocorrências de $s \in F^q$ por $\langle x, s \rangle \in G^{(tq'1)(tq'1)}$, onde $\langle , \rangle$ é a codificação dentro da teoria que decorre da codificação introduzida na demonstração da proposição 3.2*
- *Axioma da Contagem*

  $\exists C^{\overbrace{(tt11)(tt11)}^{v}} \mathsf{Count}(C^v, F^t)$,

  onde $\mathsf{Count}(C^v, F^t)$ *abrevia a seguinte fórmula*
  $(\forall x \preceq t \exists^1 j \preceq v \langle x, j \rangle \in C^v) \wedge (\epsilon \notin F^t \to \langle \epsilon, \epsilon \rangle \in C^v) \wedge (\epsilon \in F^t \to \langle \epsilon, 0 \rangle \in C^v) \wedge$
  $\forall x <_l 1 \times t[(S(x) \notin F^t \to \forall j \preceq v(\langle x, j \rangle \in C^v \to \langle S(x), j \rangle \in C^v)) \wedge$
  $(S(x) \in F^t \to \forall j \preceq v(\langle x, j \rangle \in C^v \to \langle S(x), S(j) \rangle \in C^v))]$[11],
  sendo S a função sucessor e t um termo onde x não ocorre.

A ideia por detrás da fórmula Count, é que C^v vai contando o número de elementos em F^t. Essa contagem é feita do seguinte modo: dado $x \preceq t$ temos $\langle x, j \rangle \in C^v$ sse existem j elementos menores ou iguais a x (pela ordem $\leq_l$) em F^t.

[9]Uma vez mais nos referimos aos primeiros 14 axiomas da definição 3.7.

[10]Com a notação $q' := q[t/x]$ pretendemos indicar que q' é o termo que se obtém de q substituindo todas as ocorrências de x pelo termo t.

[11]$\exists^1 j \preceq v \varphi(j)$ abrevia a fórmula $\exists j \preceq v(\varphi(j) \wedge \forall k \preceq v(\varphi(k) \to k = j))$.

Observação 3.4 *Facilmente se constata que o sistema* TCA *verifica o seguinte:*

- $\mathsf{TCA} \supseteq \Sigma^{\mathsf{b}}_{1}$-$\mathsf{NIA}$*, logo podemos supor que* TCA *contém um símbolo funcional para cada descrição de uma função computável em tempo polinomial. Mais ainda,* $\mathsf{TCA} \supseteq \Sigma^{\mathsf{b}}_{\infty}$-$\mathsf{NIA}$*, estando esta última teoria relacionada não com* PTIME *mas com toda a hierarquia polinomial*
- *Em* TCA *é válido o esquema de* indução lenta *para fórmulas* $\Sigma^{1,b}_0$*, i.e.* $\varphi(\epsilon) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(S(x))) \to \forall x \varphi(x)$*, com* φ *uma fórmula* $\Sigma^{1,b}_0$
- *Em* TCA *são válidos os esquemas de indução na notação e indução lenta na seguinte forma:*
  $\varphi(\epsilon) \wedge \forall x \subseteq a(\varphi(x) \to \varphi(x0) \wedge \varphi(x1)) \to \forall x \subseteq a\ \varphi(x)$ *e*
  $\varphi(\epsilon) \wedge \forall x \preceq a(\varphi(x) \to \varphi(S(x))) \to \forall x \preceq a\ \varphi(x)$*, com* φ *uma fórmula* $\Sigma^{1,b}_0$*.*

Observação 3.5 *Se* $\varphi(\bar{x}, \bar{X}^t)$ *é uma fórmula* $\Sigma^{1,b}_0$ *de* $\mathcal{L}^b_2$ *então* $\varphi(\bar{x}, \bar{X}^t)$ *é um predicado em* $\mathsf{CH}^{\bar{\mathsf{X}}^{\mathsf{t}}}$*. Tal verifica-se facilmente por indução na complexidade de* φ*.*

Com vista a nos apercebermos das potencialidades da teoria agora introduzida, prosseguimos com a apresentação de alguns resultados em TCA, nomeadamente extensões de certos axiomas, que nos permitem uma maior margem de manobra no âmbito de tal sistema. Antes porém, necessitamos introduzir alguma notação.

Uma *fórmula* $\Sigma^{1,b}_1$ (respectivamente *fórmula* $\Pi^{1,b}_1$) é uma fórmula de $\mathcal{L}^b_2$ da forma:

$$\exists F_1^{t_1} \ldots \exists F_k^{t_k}\ \varphi(F_1^{t_1}, \ldots, F_k^{t_k}, \bar{p}, \bar{G}^r) \text{ (respectivamente } \forall F_1^{t_1} \ldots \forall F_k^{t_k}\ \varphi(F_1^{t_1}, \ldots, F_k^{t_k}, \bar{p}, \bar{G}^r)),$$

com φ uma fórmula $\Sigma^{1,b}_0$.

Uma *fórmula* $\Sigma^{1,b}_1$*-estendida* (respectivamente *fórmula* $\Pi^{1,b}_1$*-estendida*) é uma fórmula de $\mathcal{L}^b_2$ que pode ser construída num número finito de passos, começando por fórmulas $\Sigma^{1,b}_0$ e permitindo conjunções, disjunções, quantificações limitadas de primeira ordem e quantificações existenciais de segunda ordem (respectivamente quantificações universais de segunda ordem).

Uma fórmula $\Sigma^{1,b}_1$ (respectivamente $\Sigma^{1,b}_1$-estendida), ϕ, é $\Delta^{1,b}_1$ (respectivamente $\Delta^{1,b}_1$-estendida) em TCA, se existir uma fórmula $\Pi^{1,b}_1$ (respectivamente $\Pi^{1,b}_1$-estendida), ψ, tal que $\mathsf{TCA} \vdash \phi \leftrightarrow \psi$.

Proposição 3.7 *Em* TCA *é válido o esquema de substituição para fórmulas* $\Sigma^{1,b}_1$*-estendidas.*

Demonstração

Sabemos que em TCA é válido o esquema de substituição para fórmulas $\Sigma_0^{1,b}$. Se mostrarmos que dois quantificadores existenciais de segunda ordem podem ser transformados num só, facilmente nos apercebemos que em TCA é válido o esquema de substituição para fórmulas $\Sigma_1^{1,b}$. Ora $\exists F^t \exists H^q \varphi(F^t, H^q) \leftrightarrow \exists G^{(1tq1)(1tq1)} \bar{\varphi}(G^{(1tq1)(1tq1)})$, onde $\bar{\varphi}$ se obtém de φ substituindo todas as ocorrências de $s \in F^t$ por $\langle \epsilon, s\rangle \in G$ e as ocorrências de $s \in H^q$ por $\langle 0, s\rangle \in G$. Como se pode provar (usando o esquema de substituição) que todas as fórmulas $\Sigma_1^{1,b}$-estendidas são equivalentes a fórmulas $\Sigma_1^{1,b}$, temos que TCA verifica o esquema de substituição para fórmulas $\Sigma_1^{1,b}$-estendidas.

□

Proposição 3.8 *Em* TCA *são válidos os esquemas de compreensão para fórmulas* $\Delta_1^{1,b}$*-estendidas e de indução na notação (e indução lenta) para fórmulas* $\Delta_1^{1,b}$*-estendidas.*

Demonstração

Tomemos $\varphi(x)$ uma fórmula $\Delta_1^{1,b}$-estendida. Consideremos $\psi(x, X^\epsilon)$ a fórmula $\varphi(x) \leftrightarrow \epsilon \in X^\epsilon$, que é equivalente a uma fórmula $\Sigma_1^{1,b}$-estendida.

Em TCA temos que $\forall x \preceq t \exists X^\epsilon \psi(x, X^\epsilon)$. Por substituição para fórmulas $\Sigma_1^{1,b}$-estendidas temos $\exists G^{(tq'1)(tq'1)} \forall x \preceq t(\varphi(x) \leftrightarrow \underbrace{\langle x, \epsilon\rangle \in G^{(tq'1)(tq'1)}}_{\text{fórmula aberta}})$.

Recorrendo ao esquema de compreensão para fórmulas $\Sigma_0^{1,b}$ (em particular para fórmulas abertas, i.e. sem quantificações) temos que $\exists F^t \forall x \preceq t(x \in F^t \leftrightarrow \varphi(x))$. Logo temos compreensão para fórmulas $\Delta_1^{1,b}$-estendidas.

Provemos, agora, que $\mathsf{TCA} \vdash \varphi(\epsilon) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x0) \wedge \varphi(x1)) \rightarrow \forall x \varphi(x)$, com φ uma fórmula $\Delta_1^{1,b}$-estendida.

Raciocinando em TCA, suponhamos que temos

$$(\star)\ \varphi(\epsilon) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x0) \wedge \varphi(x1)).$$

Dado a, pelo esquema de compreensão para fórmulas $\Delta_1^{1,b}$-estendidas, temos que $\exists F^{a0} \forall x \preceq a0(x \in F^{a0} \leftrightarrow \varphi(x))$. Por $(\star)$ temos $\varphi(\epsilon) \wedge \forall x \subseteq a(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x0) \wedge \varphi(x1))$. Logo $\epsilon \in F^{a0} \wedge \forall x \subseteq a(x \in F^{a0} \rightarrow x0 \in F^{a0} \wedge x1 \in F^{a0})$. Por indução na notação para fórmulas $\Sigma_0^{1,b}$ (em particular para fórmulas abertas), temos que $\forall x \subseteq a(x \in F^{a0})$ (veja observação 3.4), logo $a \in F^{a0}$ e portanto verifica-se $\varphi(a)$. Como tomámos a arbitrário temos $\forall x \varphi(x)$.

Tendo em conta novamente a observação 3.4, uma vez que em TCA é válido o esquema de indução lenta para fórmulas $\Sigma_0^{1,b}$, com um raciocínio inteiramente análogo (substituindo indução na notação por indução lenta e $x \subseteq a$ por $x \preceq a$) prova-se que é válido o esquema de indução lenta para fórmulas $\Delta_1^{1,b}$-estendidas.

□

Proposição 3.9 *O esquema de minimização para fórmulas* $\Delta_1^{1,b}$*-estendidas é válido em* TCA*, i.e.* $\mathsf{TCA} \vdash \exists x \varphi(x) \rightarrow \exists x(\varphi(x) \wedge \forall y <_l x \neg \varphi(y))$*, com* φ *uma fórmula* $\Delta_1^{1,b}$*-estendida.*

Demonstração

Sendo φ uma fórmula $\Delta_1^{1,b}$-estendida, podemos tomar $\psi(x) :\leftrightarrow \forall y <_l x \neg\varphi(y)$ como sendo uma fórmula $\Delta_1^{1,b}$-estendida. Como em TCA temos indução lenta para fórmulas $\Delta_1^{1,b}$-estendidas, temos que $\mathsf{TCA} \vdash \psi(\epsilon) \wedge \forall x(\psi(x) \rightarrow \psi(S(x))) \rightarrow \forall x\psi(x)$. Suponhamos que $\exists x\varphi(x)$. Seja b tal que $\varphi(b)$. Queremos provar que $\exists x(\varphi(x) \wedge \forall y <_l x\neg\varphi(y))$. Se $\forall y <_l b\neg\varphi(y)$ então b é o elemento pretendido. Se $\neg(\forall y <_l b\neg\varphi(y))$, i.e. $\neg\psi(b)$, como temos $\psi(\epsilon)$ vem que $\neg\forall x(\psi(x) \rightarrow \psi(S(x)))$. Logo $\exists x(\psi(x) \wedge \neg\psi(S(x)))$ ou seja $\exists x((\forall y <_l x \neg\varphi(y)) \wedge (\exists y <_l S(x)\varphi(y)))$. Temos portanto que $\exists x(\forall y <_l x\neg\varphi(y) \wedge \varphi(x))$.

□

Uma vez analisadas algumas propriedades de TCA, vamos relacionar esta teoria com uma outra, conhecida por $\Sigma_1^{1,b}$-NIA[12], que como visto em [22] caracteriza as funções de PSPACE como as funções demonstravelmente totais dessa teoria. Recordamos que $\Sigma_1^{1,b}$-NIA é a teoria de segunda ordem na linguagem $\mathcal{L}_2^b$ cujos axiomas coincidem com os de TCA, substituindo-se o esquema de indução na notação para fórmulas $\Sigma_0^{1,b}$ e o axioma da contagem por *indução na notação para fórmulas* $\Sigma_1^{1,b}$.

Proposição 3.10 $\mathsf{TCA} \subseteq \Sigma_1^{1,b}$-$\mathsf{NIA}$.

Demonstração

À excepção do axioma da contagem, todos os axiomas de TCA se encontram, de forma trivial, em $\Sigma_1^{1,b}$-NIA.

Vejamos que o *axioma da contagem* é válido em $\Sigma_1^{1,b}$-NIA, ou seja, provemos que $\Sigma_1^{1,b}$-$\mathsf{NIA} \vdash \forall F^t \exists C^v \mathsf{Count}(C^v, F^t)$.

Fixemos F^t. Consideremos as funções

$$g(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } \epsilon \in F^t \\ \epsilon & \text{c.c.} \end{cases} \quad \text{e} \quad h(y,r) = \begin{cases} r & \text{se } S(y) \notin F^t \\ S(r) & \text{c.c.} \end{cases}$$

exprimiveis na teoria $\Sigma_1^{1,b}$-NIA através de fórmulas $\Delta_1^{1,b}$-estendidas $\varphi_g(y,z)$ e $\varphi_h(y,r,z)$ com o parâmetro F^t, respectivamente.

Seguindo o raciocínio apresentado na demonstração da proposição 13 de [22] (páginas 35-40), a propósito de funções definidas por recursão limitada, é possível provar que existe uma fórmula $\Delta_1^{1,b}$-estendida φ_f tal que

$$\Sigma_1^{1,b}\text{-}\mathsf{NIA} \vdash \forall y \exists z \varphi_f(y,z)$$

$$\Sigma_1^{1,b}\text{-}\mathsf{NIA} \vdash \varphi_f(y,z) \wedge \varphi_f(y,r) \rightarrow z = r$$

$$\Sigma_1^{1,b}\text{-}\mathsf{NIA} \vdash \varphi_g(\epsilon,z) \rightarrow \varphi_f(\epsilon,z)$$

$$\Sigma_1^{1,b}\text{-}\mathsf{NIA} \vdash \varphi_f(y,r) \wedge \varphi_h(y,r,z) \rightarrow \varphi_f(S(y),z).$$

[12] Teoria introduzida e estudada em [22].

Como em $\Sigma_1^{1,b}$-NIA é válido o esquema de compreensão para fórmulas $\Delta_1^{1,b}$-estendidas, temos que $\Sigma_1^{1,b}\text{-NIA} \vdash \forall v \exists C^v \forall x \preceq v \forall j \preceq v(\langle x, j\rangle \in C^v \leftrightarrow \varphi_f(x, j))$.

Tomando $v := (tt11)(tt11)$, facilmente se prova que $\Sigma_1^{1,b}\text{-NIA} \vdash \mathsf{Count}(C^v, F^t)$.

□

3.3.2 Imersão de CHCA em TCA

Motivados pela conhecida relação entre as teorias PRA e Σ_1^0-IND e pelo estudo apresentado em [14], a propósito da relação entre as teorias PTCA e Σ_1^b-NIA, e em [22], a respeito de PSCA *versus* $\Sigma_1^{1,b}$-NIA, o objectivo central desta subsecção é relacionar CHCA, a teoria introduzida na Secção 3.2, e TCA, a teoria agora introduzida, nomeadamente (e em sentido informal visto não serem teorias na mesma linguagem) provar que CHCA‘⊆’TCA.

A ideia fundamental na base desta inclusão é a seguinte: assim como em Σ_1^0-IND se podem introduzir as funções primitivas recursivas (essencialmente um resultado de Gödel de 1931), em Σ_1^b-NIA se podem introduzir as funções computáveis em tempo polinomial e em $\Sigma_1^{1,b}$-NIA se podem introduzir as funções computáveis em espaço polinomial através de fórmulas Δ_1^0, Δ_1^b e $\Delta_1^{1,b}$ estendidas respectivamente, em TCA será possível introduzir as funções da hierarquia das funções de contagem através de fórmulas $\Delta_1^{1,b}$-estendidas.

Teorema 3.3 *Para cada descrição*[13] *f de uma função em* FCH *existem uma fórmula $\Delta_1^{1,b}$-estendida φ_f em $\mathcal{L}_2^b$ e um termo b_f em $\mathcal{L}$, tais que:*

$$\mathsf{TCA} \vdash \forall \bar{x} \exists z \preceq b_f(\bar{x}) \varphi_f(\bar{x}, z)$$

$$\mathsf{TCA} \vdash \varphi_f(\bar{x}, z) \wedge \varphi_f(\bar{x}, y) \to z = y$$

e

a) *em* TCA *tem-se que*

1. $\varphi_{C_0}(x, x0)$
2. $\varphi_{C_1}(x, x1)$
3. $\varphi_{P_i^n}(x_1, \ldots, x_n, x_i)$ *com* $1 \leq i \leq n$
4. $\varphi_Q(x, y, 1) \leftrightarrow x \subseteq y$
   $\varphi_Q(x, y, 0) \vee \varphi_Q(x, y, 1)$

b) 1. *Se f é definida a partir de g, $h_1, \ldots, h_k$ por composição então*
   $\mathsf{TCA} \vdash \varphi_{h_1}(\bar{x}, y_1) \wedge \ldots \wedge \varphi_{h_k}(\bar{x}, y_k) \wedge \varphi_g(y_1, \ldots, y_k, z) \to \varphi_f(\bar{x}, z)$

2. *Se f é definida a partir de g, h_0 e h_1 por recursão limitada na notação com limite t então*
   $\mathsf{TCA} \vdash \varphi_g(\bar{x}, z) \to \varphi_f(\bar{x}, \epsilon, z)$
   $\mathsf{TCA} \vdash \varphi_f(\bar{x}, y, r) \wedge \varphi_{h_0}(\bar{x}, y, r, u) \wedge z = u_{|_{t(\bar{x},y)}} \to \varphi_f(\bar{x}, y0, z)$
   $\mathsf{TCA} \vdash \varphi_f(\bar{x}, y, r) \wedge \varphi_{h_1}(\bar{x}, y, r, u) \wedge z = u_{|_{t(\bar{x},y)}} \to \varphi_f(\bar{x}, y1, z)$

[13] De acordo com a definição 3.2.

3. Se f é definida a partir de g por cardinalidade então

$\mathsf{TCA} \vdash \varphi_g(\bar{x}, \epsilon, 0) \leftrightarrow \varphi_f(\bar{x}, \epsilon, 0)$

$\mathsf{TCA} \vdash \varphi_f(\bar{x}, \epsilon, 0) \vee \varphi_f(\bar{x}, \epsilon, \epsilon)$

$\mathsf{TCA} \vdash \varphi_g(\bar{x}, S(y), 0) \wedge \varphi_f(\bar{x}, y, r) \rightarrow \varphi_f(\bar{x}, S(y), S(r))$

$\mathsf{TCA} \vdash u \neq 0 \wedge \varphi_g(\bar{x}, S(y), u) \wedge \varphi_f(\bar{x}, y, r) \rightarrow \varphi_f(\bar{x}, S(y), r).$

Este teorema garante que qualquer função $f \in \mathsf{FCH}$ pode ser introduzida em TCA através de φ_f, uma fórmula $\Delta_1^{1,b}$-estendida.

Demonstração

A demonstração é feita por indução na complexidade da descrição de f.

As *funções iniciais*, sendo funções de PTIME, podem evidentemente ser definidas em TCA nas condições pretendidas.

No caso de f resultar de *composição* ou de *recursão limitada na notação*, fazemos um raciocínio análogo ao apresentado no artigo [14] para a teoria Σ_1^b-PIND.

Saliente-se no entanto que no contexto presente, as fórmulas φ_f que se obtêm são $\Delta_1^{1,b}$-estendidas, o que não constitui problema visto na teoria TCA ser válida indução na notação para fórmulas desta complexidade.

Suponhamos que f é definida por *cardinalidade* a partir de g. Por hipótese de indução para $g \in \mathsf{FCH}$ existem um termo $b_g(\bar{x}, y)$ e uma fórmula $\Delta_1^{1,b}$-estendida $\varphi_g(\bar{x}, y, z)$, nas condições pretendidas. Para evitar ambiguidades, quando nos referirmos à fórmula $\Sigma_1^{1,b}$-estendida, notá-la-emos por $\varphi_g^{\Sigma}(\bar{x}, y, z)$ e a fórmula $\Pi_1^{1,b}$-estendida será notada por $\varphi_g^{\Pi}(\bar{x}, y, z)$.

Como $\varphi_g(\bar{x}, y, 0)$ é uma fórmula $\Delta_1^{1,b}$-estendida, por compreensão sabemos que $\mathsf{TCA} \vdash \forall \bar{x} \forall y \exists F^y \forall \omega \preceq y(\omega \in F^y \leftrightarrow \varphi_g(\bar{x}, \omega, 0))$. Fixemos $\bar{x}, y$. Aplicando o axioma da contagem a F^y temos que $\exists C^{\overbrace{(yy11)(yy11)}^{v}} \mathsf{Count}(C^v, F^y)$. Seja

$$\varphi_f^{\Sigma}(\bar{x}, y, z) :\leftrightarrow \exists F^y \exists C^v (\forall \omega \preceq y(\omega \in F^y \leftrightarrow \varphi_g(\bar{x}, \omega, 0)) \wedge \mathsf{Count}(C^v, F^y) \wedge \exists s \preceq v(s \in C^v \wedge s = \langle y, z \rangle)),$$

uma fórmula $\Sigma_1^{1,b}$-estendida.

Seja $b_f(\bar{x}, y) := v$. Vejamos que:

$\underline{\mathsf{TCA} \vdash \forall \bar{x} \forall y \exists z \preceq b_f(\bar{x}, y) \varphi_f^{\Sigma}(\bar{x}, y, z).}$

Pelas considerações já feitas $\mathsf{TCA} \vdash \forall \bar{x} \forall y \exists F^y \exists C^v (\forall \omega \preceq y(\omega \in F^y \leftrightarrow \varphi_g(\bar{x}, \omega, 0)) \wedge \mathsf{Count}(C^v, F^y))$. Logo, dados $\bar{x}, y$, $\exists^1 j \preceq v \langle y, j \rangle \in C^v$. Tomando z o j anterior, temos que $\mathsf{TCA} \vdash z \preceq b_f(\bar{x}, y) \wedge \langle y, z \rangle \in C^v \wedge \langle y, z \rangle \preceq v$.

Assim sendo, $\mathsf{TCA} \vdash \forall \bar{x} \forall y \exists z \preceq b_f(\bar{x}, y) \exists F^y \exists C^v (\forall \omega \preceq y(\omega \in F^y \leftrightarrow \varphi_g(\bar{x}, \omega, 0)) \wedge \mathsf{Count}(C^v, F^y) \wedge \exists s \preceq v(s \in C^v \wedge s = \langle y, z \rangle))$.

Provemos agora que:

$\underline{\mathsf{TCA} \vdash \varphi_f^{\Sigma}(\bar{x},y,z) \wedge \varphi_f^{\Sigma}(\bar{x},y,z') \to z = z'.}$

Fixemos $\bar{x}, y, z$ e z'. De $\varphi_f^{\Sigma}(\bar{x},y,z)$ temos que $\exists F^y \exists C^v (\forall \omega \preceq y(\omega \in F^y \leftrightarrow \varphi_g(\bar{x},\omega,0)) \wedge \mathsf{Count}(C^v, F^y) \wedge \underbrace{\exists s \preceq v(s \in C^v \wedge s = \langle y,z\rangle)}_{(\star)})$.

De $\varphi_f^{\Sigma}(\bar{x},y,z')$ temos que $\exists (F')^y \exists (C')^v (\forall \omega \preceq y(\omega \in (F')^y \leftrightarrow \varphi_g(\bar{x},\omega,0)) \wedge \mathsf{Count}((C')^v, (F')^y) \wedge \underbrace{\exists s' \preceq v(s' \in (C')^v \wedge s' = \langle y,z'\rangle)}_{(\star\star)})$.

Logo '$F^y = (F')^y$', i.e. $\forall \omega(\omega \in F^y \leftrightarrow \omega \in (F')^y)$.

Vejamos, por indução lenta em ω para fórmulas $\Sigma_0^{1,b}$, que

($) $\forall \omega \preceq y \forall j \preceq v(\langle \omega, j\rangle \in C^v \leftrightarrow \langle \omega, j\rangle \in (C')^v)$.

<u>Caso $\omega = \epsilon$:</u>

Se $j = \epsilon$ temos $\langle \omega, \epsilon\rangle \in C^v \leftrightarrow \epsilon \notin F^y \leftrightarrow \epsilon \notin (F')^y \leftrightarrow \langle \omega, \epsilon\rangle \in (C')^v$.

Se $j = 0$ temos $\langle \omega, 0\rangle \in C^v \leftrightarrow \epsilon \in F^y \leftrightarrow \epsilon \in (F')^y \leftrightarrow \langle \omega, 0\rangle \in (C')^v$.

Se $j \neq \epsilon \wedge j \neq 0 \wedge j \preceq v$ temos que $\langle \omega, j\rangle \notin C^v$ e $\langle \omega, j\rangle \notin (C')^v$.

Suponhamos, dado $\omega <_l 1 \times y$ que $\forall j \preceq v(\langle \omega, j\rangle \in C^v \leftrightarrow \langle \omega, j\rangle \in (C')^v)$. Vejamos que $\forall j \preceq v(\langle S(\omega), j\rangle \in C^v \leftrightarrow \langle S(\omega), j\rangle \in (C')^v)$. Ora $\omega \preceq y$, logo $\exists^1 i \preceq v \langle \omega, i\rangle \in C^v$. Fixemos tal i. Obviamente temos $\langle \omega, i\rangle \in (C')^v$.

Temos que $\langle S(\omega), i\rangle \in C^v \leftrightarrow S(\omega) \notin F^y \leftrightarrow S(\omega) \notin (F')^y \leftrightarrow \langle S(\omega), i\rangle \in (C')^v$ e $\langle S(\omega), S(i)\rangle \in C^v \leftrightarrow S(\omega) \in F^y \leftrightarrow S(\omega) \in (F')^y \leftrightarrow \langle S(\omega), S(i)\rangle \in (C')^v$.

Portanto, se $j = i$ ou $j = S(i)$ temos $\langle S(\omega), j\rangle \in C^v \leftrightarrow \langle S(\omega), j\rangle \in (C')^v$.

Se $j \neq i$, $j \neq S(i)$ e $j \preceq v$ então:

<u>Caso $S(\omega) \notin F^y$</u>, como $\langle \omega, i\rangle \in C^v$, vem $\langle S(\omega), i\rangle \in C^v$, logo $\langle S(\omega), j\rangle \notin C^v$. E como $S(\omega) \notin (F')^y$, $\langle \omega, i\rangle \in (C')^v$, vem $\langle S(\omega), i\rangle \in (C')^v$, logo $\langle S(\omega), j\rangle \notin (C')^v$.

<u>Caso $S(\omega) \in F^y$</u>, como $\langle \omega, i\rangle \in C^v$, vem $\langle S(\omega), S(i)\rangle \in C^v$, logo $\langle S(\omega), j\rangle \notin C^v$. E como $S(\omega) \in (F')^y$, $\langle \omega, i\rangle \in (C')^v$, vem $\langle S(\omega), S(i)\rangle \in (C')^v$, logo $\langle S(\omega), j\rangle \notin (C')^v$. Temos assim que $\langle S(\omega), j\rangle \in C^v \leftrightarrow \langle S(\omega), j\rangle \in (C')^v$.

Logo $\forall j \preceq v(\langle S(\omega), j\rangle \in C^v \leftrightarrow \langle S(\omega), j\rangle \in (C')^v)$, o que conclui a demonstração de ($).

Por $(\star)$ temos que $\langle y, z\rangle \in C^v$. Por $(\star\star)$ temos que $\langle y, z'\rangle \in (C')^v$. E uma vez que ($) se verifica, temos que $z = z'$.

Vejamos que:

$\underline{\mathsf{TCA} \vdash \varphi_g(\bar{x},\epsilon,0) \leftrightarrow \varphi_f^{\Sigma}(\bar{x},\epsilon,0).}$

Suponhamos que temos $\varphi_g(\bar{x},\epsilon,0)$. Sabemos que dados $\bar{x}$ e ϵ se verifica que $\exists F^\epsilon \exists C^{(11)(11)}((\epsilon \in F^\epsilon \leftrightarrow \varphi_g(\bar{x},\epsilon,0)) \wedge \mathsf{Count}(C, F^\epsilon))$. Logo $\epsilon \in F^\epsilon$ e portanto $\langle \epsilon, 0\rangle \in C$. Logo $\varphi_f^{\Sigma}(\bar{x},\epsilon,0)$.

Suponhamos que $\varphi_f^{\Sigma}(\bar{x},\epsilon,0)$. Temos que $\exists F^\epsilon \exists C^{(11)(11)}((\epsilon \in F^\epsilon \leftrightarrow \varphi_g(\bar{x},\epsilon,0)) \wedge \mathsf{Count}(C, F^\epsilon) \wedge \langle \epsilon, 0\rangle \in C)$. Como $\langle \epsilon, 0\rangle \in C$ temos que $\epsilon \in F^\epsilon$, logo verifica-se $\varphi_g(\bar{x},\epsilon,0)$.

Provemos agora que:

$\underline{\mathsf{TCA} \vdash \varphi_f^{\Sigma}(\bar{x}, \epsilon, 0) \vee \varphi_f^{\Sigma}(\bar{x}, \epsilon, \epsilon)}$.

Sabemos que dados $\bar{x}$ e ϵ temos que $\exists^1 z \preceq b_f(\bar{x}, \epsilon)\varphi_f^{\Sigma}(\bar{x}, \epsilon, z)$. Suponhamos com vista a absurdo que $z \neq 0 \wedge z \neq \epsilon$. Por $\varphi_f^{\Sigma}(\bar{x}, \epsilon, z)$ temos $\exists F^{\epsilon} \exists C^{(11)(11)}((\epsilon \in F^{\epsilon} \leftrightarrow \varphi_g(\bar{x}, \epsilon, 0)) \wedge \langle \epsilon, z\rangle \in C \wedge \mathsf{Count}(C, F^{\epsilon}))$. Se $\epsilon \notin F^{\epsilon}$ então $\langle \epsilon, \epsilon\rangle \in C$ logo $z = \epsilon$. Se $\epsilon \in F^{\epsilon}$ então $\langle \epsilon, 0\rangle \in C$ logo $z = 0$. Em qualquer dos casos chegamos a absurdo.

Vejamos agora que:

$\underline{\mathsf{TCA} \vdash \varphi_g(\bar{x}, S(y), 0) \wedge \varphi_f^{\Sigma}(\bar{x}, y, r) \rightarrow \varphi_f^{\Sigma}(\bar{x}, S(y), S(r))}$.

Fixemos $\bar{x}$, y e r. De $\varphi_f^{\Sigma}(\bar{x}, y, r)$ temos que $\exists (F')^y \exists (C')^v (\forall \omega \preceq y(\omega \in (F')^y \leftrightarrow \varphi_g(\bar{x}, \omega, 0)) \wedge \mathsf{Count}((C')^v, (F')^y) \wedge \langle y, r\rangle \in (C')^v)$.

Para $\bar{x}$ e $S(y)$ temos que $\exists F^{S(y)} \exists C^{(S(y)S(y)11)(S(y)S(y)11)}(\forall \omega \preceq S(y)(\omega \in F^{S(y)} \leftrightarrow \varphi_g(\bar{x}, \omega, 0)) \wedge \mathsf{Count}(C, F^{S(y)}))$.

De $\exists F^{S(y)} \forall \omega \preceq S(y)(\omega \in F^{S(y)} \leftrightarrow \varphi_g(\bar{x}, \omega, 0))$, vem em particular que $S(y) \in F^{S(y)} \leftrightarrow \varphi_g(\bar{x}, S(y), 0)$. Como temos $\varphi_g(\bar{x}, S(y), 0)$, sabemos que $S(y) \in F^{S(y)}$. Com um raciocínio análogo ao usado aquando da prova da unicidade, uma vez que, como na situação anterior sabemos que $\forall \omega \preceq y(\omega \in (F')^y \leftrightarrow \omega \in F^{S(y)})$ temos que $\forall \omega \preceq y \forall j \preceq v(\langle \omega, j\rangle \in C \leftrightarrow \langle \omega, j\rangle \in C')$. Como $\langle y, r\rangle \in C'$ temos $\langle y, r\rangle \in C$. De $S(y) \in F^{S(y)}$ e $\langle y, r\rangle \in C$ vem que $\langle S(y), S(r)\rangle \in C$. Logo temos $\varphi_f^{\Sigma}(\bar{x}, S(y), S(r))$.

Provemos agora que:

$\underline{\mathsf{TCA} \vdash u \neq 0 \wedge \varphi_g(\bar{x}, S(y), u) \wedge \varphi_f^{\Sigma}(\bar{x}, y, r) \rightarrow \varphi_f^{\Sigma}(\bar{x}, S(y), r)}$.

Fixemos $\bar{x}$, y, r e u. De $\varphi_f^{\Sigma}(\bar{x}, y, r)$ vem que $\exists (F')^y \exists (C')^v (\forall \omega \preceq y(\omega \in (F')^y \leftrightarrow \varphi_g(\bar{x}, \omega, 0)) \wedge \mathsf{Count}((C')^v, (F')^y) \wedge \langle y, r\rangle \in (C')^v)$. Para $\bar{x}$ e $S(y)$ temos que $\exists F^{S(y)} \exists C^{(S(y)S(y)11)(S(y)S(y)11)}(\forall \omega \preceq S(y)(\omega \in F^{S(y)} \leftrightarrow \varphi_g(\bar{x}, \omega, 0)) \wedge \mathsf{Count}(C, F^{S(y)}))$. De $\exists F^{S(y)} \forall \omega \preceq S(y)(\omega \in F^{S(y)} \leftrightarrow \varphi_g(\bar{x}, \omega, 0))$ vem que $S(y) \in F^{S(y)} \leftrightarrow \varphi_g(\bar{x}, S(y), 0)$. Como temos $\varphi_g(\bar{x}, S(y), u)$, com $u \neq 0$, pela unicidade que existe por hipótese de indução, temos que $\neg \varphi_g(\bar{x}, S(y), 0)$, logo $S(y) \notin F^{S(y)}$. Uma vez que $\forall \omega \preceq y(\omega \in (F')^y \leftrightarrow \omega \in F^{S(y)})$, novamente recorrendo a um raciocínio análogo ao usado aquando do estudo da unicidade, temos que $\forall \omega \preceq y \forall j \preceq v(\langle \omega, j\rangle \in C \leftrightarrow \langle \omega, j\rangle \in C')$. Como $\langle y, r\rangle \in C'$ temos que $\langle y, r\rangle \in C$. De $S(y) \notin F^{S(y)}$ e $\langle y, r\rangle \in C$ vem que $\langle S(y), r\rangle \in C$. Logo temos $\varphi_f^{\Sigma}(\bar{x}, S(y), r)$.

Seja $\varphi_f^{\Pi}(\bar{x}, y, z) :\leftrightarrow \forall \omega \preceq b_f(\bar{x}, y)(\varphi_f^{\Sigma}(\bar{x}, y, \omega) \rightarrow \omega = z)$ uma fórmula $\Pi_1^{1,b}$-estendida.

Como $\mathsf{TCA} \vdash \varphi_f^{\Sigma}(\bar{x}, y, z) \leftrightarrow \varphi_f^{\Pi}(\bar{x}, y, z)$ temos que $\varphi_f(\bar{x}, y, z) := \varphi_f^{\Sigma}(\bar{x}, y, z)$ é a fórmula $\Delta_1^{1,b}$-estendida que procurávamos.

$\square$

Observação 3.6 *O resultado do teorema 3.3 pode ser estendido a todos os termos, t, de $\mathcal{L}_{\mathsf{FCH}}$ de tal modo que:*

a. $\mathsf{TCA} \vdash \forall \bar{x} \exists z \preceq b_t(\bar{x})\varphi_t(\bar{x}, z)$

b. $\mathsf{TCA} \vdash \varphi_t(\bar{x}, z) \wedge \varphi_t(\bar{x}, y) \rightarrow z = y$

c. Em TCA *o seguinte é válido:*

1. $\varphi_{\frown}(x, y, x\frown y)$
2. $\varphi_{\times}(x, y, x \times y)$
3. *Se* $t(\bar{x}) = q(t_1(\bar{x}), \ldots, t_k(\bar{x}))$*, com* $q, t_1, \ldots, t_k$ *termos de* $\mathcal{L}_{\mathsf{FCH}}$ *então* $\mathsf{TCA} \vdash \varphi_{t_1}(\bar{x}, y_1) \wedge \ldots \wedge \varphi_{t_k}(\bar{x}, y_k) \wedge \varphi_q(y_1, \ldots, y_k, z) \rightarrow \varphi_t(\bar{x}, z)$.

Vejamos agora que, no sentido a seguir especificado, CHCA'⊆'TCA.

Proposição 3.11 *Seja M um modelo de* TCA*. Tendo M' o mesmo domínio de primeira ordem que M e as mesmas interpretações dos símbolos de $\mathcal{L}$, se definirmos a interpretação de cada símbolo funcional f de $\mathcal{L}_{\mathsf{FCH}} \backslash \mathcal{L}$ segundo φ_f, i.e. se interpretarmos f como sendo a função $\{(\bar{a}, b) : M \vDash \varphi_f(\bar{a}, b)\}$, então M' é um modelo de* CHCA.

Demonstração

Note que, pelo teorema 3.3, M' é uma estrutura bem definida. Como o domínio de primeira ordem é o mesmo quer em M quer em M' e os símbolos de $\mathcal{L}$ têm a mesma interpretação em ambas as estruturas, visto M ser um modelo de TCA, temos que em M' são válidos os *axiomas básicos*. O facto de os *axiomas definidores* também serem válidos resulta imediatamente da forma como interpretámos, em M', os símbolos funcionais de $\mathcal{L}_{\mathsf{FCH}} \backslash \mathcal{L}$ e do estudo atrás efectuado. Resta provar que M' verifica o *esquema de indução na notação para matrizes decidíveis por contagem*. Para tal, e uma vez que em TCA é válida indução na notação para fórmulas $\Delta_1^{1,b}$-estendidas, basta provar que a cada matriz decidível por contagem, $A'(\bar{x})$, se pode associar uma fórmula $\Delta_1^{1,b}$-estendida, $A(\bar{x})$, tal que $M' \vDash A'(\bar{a})$ sse $M \vDash A(\bar{a})$, para todos os parâmetros $\bar{a}$ em M'. Quanto aos termos t de $\mathcal{L}_{\mathsf{FCH}}$, pode provar-se, por indução na complexidade de t, que $M' \vDash t(\bar{a}) = b$ sse $M \vDash \varphi_t(\bar{a}, b)$, para quaisquer parâmetros $\bar{a}$ e b de M' (veja observação 3.6).

Seja $A'(\bar{x})$ uma matriz decidível por contagem. Sem perda de generalidade podemos supor que $A'(\bar{x})$ tem a seguinte forma: quantificações existenciais e universais limitadas de primeira ordem, $\forall x \preceq t(\bar{y})$ e/ou $\exists x \preceq t(\bar{y})$ com t um termo de $\mathcal{L}_{\mathsf{FCH}}$ em que x não ocorre, seguidas por uma fórmula aberta na forma normal conjuntiva. Vamos esboçar o modo como, a partir destas fórmulas $A'(\bar{x})$ se obtêm as fórmulas $\Delta_1^{1,b}$-estendidas $A(\bar{x})$ pretendidas.

Substituimos $\forall x \preceq t(\bar{y}) \ldots$ por $\exists z \preceq b_t(\bar{y})(\varphi_t(\bar{y}, z) \wedge \forall x \preceq z \ldots)$ e substituimos $\exists x \preceq t(\bar{y}) \ldots$ por $\exists z \preceq b_t(\bar{y})(\varphi_t(\bar{y}, z) \wedge \exists x \preceq z \ldots)$.

Se em A' aparecem as fórmulas atómicas $t(\bar{x}) = q(\bar{x})$ ou $t(\bar{x}) \subseteq q(\bar{x})$ com t e q termos de $\mathcal{L}_{\mathsf{FCH}}$, definimos A como tendo $\exists z \preceq b_t(\bar{x})(\varphi_t(\bar{x}, z) \wedge \varphi_q(\bar{x}, z))$ ou $\exists z \preceq b_t(\bar{x}) \exists \omega \preceq b_q(\bar{x})(\varphi_t(\bar{x}, z) \wedge \varphi_q(\bar{x}, \omega) \wedge z \subseteq \omega)$ respectivamente.

Se em A' figuram negações de fórmulas atómicas, $t(\bar{x}) \neq q(\bar{x})$, $\neg(t(\bar{x}) \subseteq q(\bar{x}))$, substituimo-las em A pelas fórmulas $\exists z \preceq b_t(\bar{x}) \exists \omega \preceq b_q(\bar{x})(\varphi_t(\bar{x}, z) \wedge \varphi_q(\bar{x}, \omega) \wedge z \neq \omega)$ e $\exists z \preceq b_t(\bar{x}) \exists \omega \preceq b_q(\bar{x})(\varphi_t(\bar{x}, z) \wedge \varphi_q(\bar{x}, \omega) \wedge \neg(z \subseteq \omega))$ respectivamente.

As fórmulas $A(\bar{x})$ assim construídas são fórmulas $\Delta_1^{1,b}$-estendidas na linguagem $\mathcal{L}_2^b$ e facilmente comprovamos que verificam o pretendido.

□

3.3.3 Caracterização das funções demonstravelmente totais de TCA

Com o intuito de caracterizar as funções demonstravelmente totais de TCA com gráfico $\Sigma_1^{1,b}$, vamos recorrer uma vez mais ao *cálculo de sequentes de Gentzen.* Na Secção 2.3 (no contexto de uma linguagem numérica) já introduzimos e trabalhámos com teorias formalizadas no cálculo de sequentes, altura em que relembrámos a mecânica deste tipo de sistema de demonstração e apresentámos as regras de inferência de LK. A variante do cálculo de sequentes agora usada (ainda designada por LK) coincide exactamente com a anterior, adaptando-se apenas as regras de quantificação $\forall_{\leq}$, $\exists_{\leq}$, $\forall_{2^a}$ e $\exists_{2^a}$ à actual linguagem. Assim sendo, passamos a denotar por LK o cálculo de sequentes de segunda ordem que, além das regras estruturais, da regra do corte, das regras proposicionais e das regras de quantificação $\forall : e$, $\forall : d$, $\exists : e$ e $\exists : d$ (veja Secção 2.3), contém ainda as seguintes regras de quantificação:

$$\forall_{\preceq} : e \quad \frac{A(t),\Gamma\longrightarrow\Delta}{t\preceq s,\forall x\preceq s A(x),\Gamma\longrightarrow\Delta} \qquad\qquad \forall_{\preceq} : d \quad \frac{b\preceq t,\Gamma\longrightarrow\Delta,A(b)}{\Gamma\longrightarrow\Delta,\forall x\preceq t A(x)}$$

$$\exists_{\preceq} : e \quad \frac{b\preceq t,A(b),\Gamma\longrightarrow\Delta}{\exists x\preceq t A(x),\Gamma\longrightarrow\Delta} \qquad\qquad \exists_{\preceq} : d \quad \frac{\Gamma\longrightarrow\Delta,A(t)}{t\preceq s,\Gamma\longrightarrow\Delta,\exists x\preceq s A(x)}$$

$$\forall_{2^a} : e \quad \frac{A(F^t),\Gamma\longrightarrow\Delta}{\forall X^t A(X^t),\Gamma\longrightarrow\Delta} \qquad\qquad \forall_{2^a} : d \quad \frac{\Gamma\longrightarrow\Delta,A(C^t)}{\Gamma\longrightarrow\Delta,\forall X^t A(X^t)}$$

$$\exists_{2^a} : e \quad \frac{A(C^t),\Gamma\longrightarrow\Delta}{\exists X^t A(X^t),\Gamma\longrightarrow\Delta} \qquad\qquad \exists_{2^a} : d \quad \frac{\Gamma\longrightarrow\Delta,A(F^t)}{\Gamma\longrightarrow\Delta,\exists X^t A(X^t)}$$

com b variável própria de primeira ordem, C^t variável própria de segunda ordem, A fórmula, Γ e Δ conjuntos de fórmulas e t e s termos quaisquer.

Esta variante do cálculo de sequentes é apresentada com bastante detalhe em [22], onde é usada para estabelecer a ligação entre a teoria $\Sigma_1^{1,b}$-NIA e a classe PSPACE.

Como habitualmente, sendo S um conjunto de sequentes, se permitirmos que estes também possam figurar como sequentes iniciais, dizemos que estamos perante uma LK_S-demonstração.

Uma vez mais, no que se segue, a análise das demonstrações no cálculo de sequentes assenta fortemente no *teorema da eliminação do corte livre.* Tal teorema, recordado abaixo, já enunciado no Capítulo 2 a propósito de $\mathsf{LK}_{\mathsf{FAN}}$, continua válido na presente variante do cálculo de sequentes LK_S (veja [4], [5] de Samuel Buss ou [22] na notação por nós usada).

Teorema 3.4 (Teorema da eliminação do corte livre) *Seja S um conjunto de sequentes fechado para a substituição*[14]*. Se $\Gamma\longrightarrow\Delta$ se deduz em LK_S então existe uma de-*

[14] S diz-se *fechado para a substituição* se sempre que $\Gamma(a)\longrightarrow\Delta(a)$ está em S, com a variável livre de

monstração de $\Gamma \longrightarrow \Delta$ *em* LK_S *sem cortes livres.*

Obviamente a teoria TCA podia ser formalizada no cálculo de sequentes de Gentzen através de LK_S, com S o conjunto de todos os sequentes da forma $\longrightarrow A$, com A axioma de TCA.

Optamos, para podermos usar eficientemente o teorema da eliminação do corte livre, por formalizar TCA no cálculo de sequentes dum outro modo que em seguida se descreve.

O cálculo de sequentes para TCA, que notamos por $\mathsf{LK}_{\mathsf{FCH}}$, além dos sequentes iniciais da forma $A \longrightarrow A$, com A uma fórmula atómica e dos *axiomas para a igualdade* (descritos no Capítulo 2, página 11, agora evidentemente aplicados aos símbolos da linguagem $\mathcal{L}_2^b$), admite ainda os sequentes iniciais:

1) $\longrightarrow A(\bar{s})$, com A axioma básico de TCA e $\bar{s}$ termos quaisquer

2) $s \in F^t \longrightarrow s \preceq t$, em que as variáveis no termo s não ocorrem em t

3) $\longrightarrow A(\epsilon) \wedge \forall x \prec s(A(x) \rightarrow A(x0) \wedge A(x1)) \rightarrow \forall x \preceq sA(x)$, com A fórmula $\Sigma_0^{1,b}$ onde as variáveis de s não correm

4) $\longrightarrow \exists F^s \forall y \preceq s(y \in F^s \leftrightarrow A(y))$, com A fórmula $\Sigma_0^{1,b}$ em que F^s não ocorre

5) $\longrightarrow \exists C^{\overbrace{(tt11)(tt11)}^{v}} \mathsf{Count}(C^v, F^t)$,

e além das regras de inferência de LK, contém ainda a seguinte regra (designada por *regra de substituição*):

$$\frac{\Gamma, a \preceq t \longrightarrow \exists F^q \varphi(a, F^q)}{\Gamma \longrightarrow \exists G^{\bar{q}} \forall x \preceq t \bar{\varphi}(x, G^{\bar{q}})} \quad ,$$

onde a é uma variável própria, φ uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$, $\bar{q} = (tq'1)(tq'1)$ e q' e $\bar{\varphi}$ como no esquema de substituição apresentado na definição 3.9.

Como habitualmente, estamos a considerar as seguintes abreviaturas:

- $t \prec s$ abrevia $t \preceq s \wedge \neg(t \equiv s)$
- $\forall x \prec tA(x)$ abrevia $\forall x \preceq t(\neg(x \equiv t) \rightarrow A(x))$
- $\exists x \prec tA(x)$ abrevia $\exists x \preceq t(\neg(x \equiv t) \wedge A(x))$.

Com o propósito de simplificar as demonstrações vamos ver que é possível introduzir quatro novas regras que deverão ser vistas como abreviando porções de demonstrações em $\mathsf{LK}_{\mathsf{FCH}}$.

primeira ordem, também $\Gamma(t) \longrightarrow \Delta(t)$ está em S, sendo t um termo qualquer.

Proposição 3.12 *Em* $\mathsf{LK_{FCH}}$ *são válidas as seguintes regras:*

$$\forall_{\prec} : e \quad \frac{A(t),\Gamma \longrightarrow \Delta}{t \prec s, \forall x \prec s A(x), \Gamma \longrightarrow \Delta} \qquad \forall_{\prec} : d \quad \frac{b \prec t, \Gamma \longrightarrow \Delta, A(b)}{\Gamma \longrightarrow \Delta, \forall x \prec t A(x)}$$

$$\exists_{\prec} : e \quad \frac{b \prec t, A(b), \Gamma \longrightarrow \Delta}{\exists x \prec t A(x), \Gamma \longrightarrow \Delta} \qquad \exists_{\prec} : d \quad \frac{\Gamma \longrightarrow \Delta, A(t)}{t \prec s, \Gamma \longrightarrow \Delta, \exists x \prec s A(x)}$$

onde b é uma variável própria de primeira ordem.

Demonstração

Comecemos por provar que a regra $\forall_{\prec} : e$ se deduz em $\mathsf{LK_{FCH}}$.

$$\begin{array}{rl}
\neg(t \equiv s) \longrightarrow \neg(t \equiv s) \qquad A(t), \Gamma \longrightarrow \Delta & \\
\hline\hline
\neg(t \equiv s) \to A(t), \neg(t \equiv s), \Gamma \longrightarrow \Delta & (\longrightarrow : e) \\
\hline
t \preceq s, \forall x \preceq s(\neg(x \equiv s) \to A(x)), \neg(t \equiv s), \Gamma \longrightarrow \Delta & (\forall_{\preceq} : e) \\
\hline
t \preceq s, \neg(t \equiv s), \forall x \preceq s(\neg(x \equiv s) \to A(x)), \Gamma \longrightarrow \Delta & (p : e) \\
\hline
t \preceq s \wedge \neg(t \equiv s), \forall x \preceq s(\neg(x \equiv s) \to A(x)), \Gamma \longrightarrow \Delta & (\wedge : e) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
t \prec s, \forall x \prec s A(x), \Gamma \longrightarrow \Delta &
\end{array}$$

Seguindo a notação do Capítulo 2, o duplo traço horizontal na demonstração indica que além da regra apresentada entre parêntesis utilizam-se outras regras de inferência. Já o traço ponteado indica que um dos sequentes é uma abreviatura do outro.

Vejamos que a regra $\forall_{\prec} : d$ se deduz em $\mathsf{LK_{FCH}}$.

$$\begin{array}{rl}
b \prec t, \Gamma \longrightarrow \Delta, A(b) & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
b \preceq t \wedge \neg(b \equiv t), \Gamma \longrightarrow \Delta, A(b) & \\
\hline\hline
b \preceq t, \neg(b \equiv t), \Gamma \longrightarrow \Delta, A(b) & (\text{usa corte}) \\
\hline\hline
b \preceq t, \Gamma \longrightarrow \Delta, \neg(b \equiv t) \to A(b) & (\longrightarrow : d) \\
\hline
\Gamma \longrightarrow \Delta, \forall x \preceq t(\neg(x \equiv t) \to A(x)) & (\forall_{\preceq} : d) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\Gamma \longrightarrow \Delta, \forall x \prec t A(x) &
\end{array}$$

As regras $\exists_{\prec} : e$ e $\exists_{\prec} : d$ deduzem-se em $\mathsf{LK_{FCH}}$ de forma inteiramente análoga.

□

Em [22], páginas 47-49 provou-se que, em LK, de $s \in F^t \longrightarrow s \preceq t$ se obtém $\longrightarrow s \in F^t \to s \preceq t$ e vice-versa e que sendo válida a regra de substituição temos $\longrightarrow \forall x \preceq t \exists F^q \varphi(x, F^q) \to \exists G^{\bar{q}} \forall x \preceq t \bar{\varphi}(x, G^{\bar{q}})$ e reciprocamente do sequente anterior segue-se a regra de substituição.

Assim sendo, para provarmos que de facto $\mathsf{LK_{FCH}}$ é uma formalização da teoria TCA, é suficiente verificarmos que (no sistema de demonstração $\mathsf{LK_{FCH}}$ sem axiomas de indução) se tem:

a) De $\longrightarrow A(\epsilon) \wedge \forall x \prec a(A(x) \to A(x0) \wedge A(x1)) \to \forall x \preceq a A(x)$ obtém-se $\longrightarrow A(\epsilon) \wedge \forall x(A(x) \to A(x0) \wedge A(x1)) \to \forall x A(x)$

b) De $\longrightarrow A(\epsilon) \wedge \forall x(A(x) \rightarrow A(x0) \wedge A(x1)) \rightarrow \forall x A(x)$ para toda a fórmula $\Sigma_0^{1,b}$, A, obtém-se $\longrightarrow A(\epsilon) \wedge \forall x \prec a(A(x) \rightarrow A(x0) \wedge A(x1)) \rightarrow \forall x \preceq a A(x)$ para toda a fórmula $\Sigma_0^{1,b}$, A.

Demonstração

a)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\longrightarrow A(\epsilon) \wedge \forall x \prec a(A(x) \rightarrow A(x0) \wedge A(x1)) \rightarrow \forall x \preceq a A(x)$}
\doubleLine
\UnaryInfC{$A(\epsilon) \wedge \forall x \prec a(A(x) \rightarrow A(x0) \wedge A(x1)) \longrightarrow \forall x \preceq a A(x)$}
\doubleLine
\RightLabel{(usa corte)}
\UnaryInfC{$A(\epsilon), \forall x \prec a(A(x) \rightarrow A(x0) \wedge A(x1)) \longrightarrow \forall x \preceq a A(x)$}
\RightLabel{$(p:e)$}
\UnaryInfC{$\forall x \prec a(A(x) \rightarrow A(x0) \wedge A(x1)), A(\epsilon) \longrightarrow \forall x \preceq a A(x)$}
\RightLabel{$(\forall:e)$}
\UnaryInfC{$\forall y \forall x \prec y(A(x) \rightarrow A(x0) \wedge A(x1)), A(\epsilon) \longrightarrow \forall x \preceq a A(x)$}
\doubleLine
\RightLabel{$(\star)$}
\UnaryInfC{$\forall x(A(x) \rightarrow A(x0) \wedge A(x1)), A(\epsilon) \longrightarrow \forall x \preceq a A(x)$}
\RightLabel{$(p:e)$}
\UnaryInfC{$A(\epsilon), \forall x(A(x) \rightarrow A(x0) \wedge A(x1)) \longrightarrow \forall x \preceq a A(x)$}
\RightLabel{$(\forall:d)$}
\UnaryInfC{$A(\epsilon), \forall x(A(x) \rightarrow A(x0) \wedge A(x1)) \longrightarrow \forall y \forall x \preceq y A(x)$}
\doubleLine
\RightLabel{$(\star\star)$}
\UnaryInfC{$A(\epsilon), \forall x(A(x) \rightarrow A(x0) \wedge A(x1)) \longrightarrow \forall x A(x)$}
\RightLabel{$(\wedge:e)$}
\UnaryInfC{$A(\epsilon) \wedge \forall x(A(x) \rightarrow A(x0) \wedge A(x1)) \longrightarrow \forall x A(x)$}
\RightLabel{$(\rightarrow:d)$}
\UnaryInfC{$\longrightarrow A(\epsilon) \wedge \forall x(A(x) \rightarrow A(x0) \wedge A(x1)) \rightarrow \forall x A(x)$}
\end{prooftree}
$$

$(\star)$ De $\forall y \forall x \prec y \varphi(x), \Gamma \longrightarrow \Delta$ obtém-se $\forall x \varphi(x), \Gamma \longrightarrow \Delta$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\forall x \varphi(x) \longrightarrow \forall x \varphi(x)$}
\doubleLine
\RightLabel{(usa corte)}
\UnaryInfC{$\forall x \varphi(x) \longrightarrow \varphi(b)$}
\RightLabel{$(e:e)$}
\UnaryInfC{$b \prec c, \forall x \varphi(x) \longrightarrow \varphi(b)$}
\RightLabel{$(\forall_{\prec}:d)$}
\UnaryInfC{$\forall x \varphi(x) \longrightarrow \forall x \prec c \varphi(x)$}
\RightLabel{$(\forall:d)$}
\UnaryInfC{$\forall x \varphi(x) \longrightarrow \forall y \forall x \prec y \varphi(x)$}
\AxiomC{$\forall y \forall x \prec y \varphi(x), \Gamma \longrightarrow \Delta$}
\doubleLine
\RightLabel{(corte)}
\BinaryInfC{$\forall x \varphi(x), \Gamma \longrightarrow \Delta$}
\end{prooftree}
$$

$(\star\star)$ De $\Gamma \longrightarrow \forall y \forall x \preceq y \varphi(x)$ obtém-se $\Gamma \longrightarrow \forall x \varphi(x)$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\Gamma \longrightarrow \forall y \forall x \preceq y \varphi(x)$}
\AxiomC{$\longrightarrow b \preceq b$}
\AxiomC{$\varphi(b) \longrightarrow \varphi(b)$}
\RightLabel{$(\forall_{\preceq}:e)$}
\UnaryInfC{$b \preceq b, \forall x \preceq b \varphi(x) \longrightarrow \varphi(b)$}
\doubleLine
\RightLabel{$(\forall:e)$}
\UnaryInfC{$b \preceq b, \forall y \forall x \preceq y \varphi(x) \longrightarrow \varphi(b)$}
\doubleLine
\RightLabel{(corte)}
\BinaryInfC{$\forall y \forall x \preceq y \varphi(x) \longrightarrow \varphi(b)$}
\RightLabel{$(\forall:d)$}
\UnaryInfC{$\forall y \forall x \preceq y \varphi(x) \longrightarrow \forall x \varphi(x)$}
\doubleLine
\RightLabel{(corte)}
\BinaryInfC{$\Gamma \longrightarrow \forall x \varphi(x)$}
\end{prooftree}
$$

b) Seja A uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$.

Queremos ver que $\longrightarrow \underbrace{A(\epsilon) \wedge \forall x \prec a(A(x) \to A(x0) \wedge A(x1)) \to \forall x \preceq aA(x)}_{T}$. Seja $B(x) :\leftrightarrow x \preceq a \to A(x)$. Como B é uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$, temos por hipótese, $\longrightarrow \underbrace{B(\epsilon) \wedge \forall x(B(x) \to B(x0) \wedge B(x1)) \to \forall x B(x)}_{T'}$.

$$
\begin{array}{c}
\longrightarrow T' \\
\hline\hline
B(\epsilon) \wedge \forall x(B(x) \to B(x0) \wedge B(x1)) \longrightarrow \forall x B(x) \\
\hline\hline
B(\epsilon), \forall x(B(x) \to B(x0) \wedge B(x1)) \longrightarrow \forall x B(x) \\
\hline\hline
A(\epsilon), \forall x(B(x) \to B(x0) \wedge B(x1)) \longrightarrow \forall x B(x) \quad (1) \\
\hline\hline
C \longrightarrow D \qquad A(\epsilon), \forall x(B(x) \to B(x0) \wedge B(x1)) \longrightarrow \forall x \preceq aA(x) \quad (2) \\
\hline\hline
E \longrightarrow F \qquad A(\epsilon), \forall x[x \prec a \to (A(x) \to A(x0) \wedge A(x1))] \longrightarrow \forall x \preceq aA(x) \quad (3) \\
\hline\hline
A(\epsilon), \forall x \prec a(A(x) \to A(x0) \wedge A(x1)) \longrightarrow \forall x \preceq aA(x) \quad (4) \\
\hline
A(\epsilon) \wedge \forall x \prec a(A(x) \to A(x0) \wedge A(x1)) \longrightarrow \forall x \preceq aA(x) \\
\hline
\longrightarrow T
\end{array}
$$

(1)

$$
\begin{array}{rc}
 & A(\epsilon) \longrightarrow A(\epsilon) \\
\cline{2-2}
(e:e) & \epsilon \preceq a, A(\epsilon) \longrightarrow A(\epsilon) \\
\cline{2-2}
(\to: d) & A(\epsilon) \longrightarrow \epsilon \preceq a \to A(\epsilon) \qquad \epsilon \preceq a \to A(\epsilon), \Gamma \longrightarrow \Delta \\
\hline\hline
 & A(\epsilon), \Gamma \longrightarrow \Delta \quad \text{(corte)}
\end{array}
$$

(2) Provámos em [22] que em LK se demonstram os seguintes sequentes: $\forall x \preceq tA(x) \longrightarrow \forall x(x \preceq t \to A(x))$ e $\forall x(x \preceq t \to A(x)) \longrightarrow \forall x \preceq tA(x)$. A dedução assinalada resulta deste último sequente através da regra do corte.

(3) Embora não o façamos aqui, é possível provar que o sequente $C \longrightarrow D$, com C a fórmula $\forall x[x \prec a \to (A(x) \to A(x0) \wedge A(x1))]$ e D a fórmula $\forall x[(x \preceq a \to A(x)) \to (x0 \preceq a \to A(x0)) \wedge (x1 \preceq a \to A(x1))]$, é um sequente válido em $\mathsf{LK}_{\mathsf{FCH}}$ sem axiomas de indução.

(4) Denotamos por $E \longrightarrow F$ o sequente $\forall x \prec a(A(x) \to A(x0) \wedge A(x1)) \longrightarrow \forall x[x \prec a \to (A(x) \to A(x0) \wedge A(x1))]$. A validade deste sequente prova-se com um raciocínio análogo ao referido em (2).

$\square$

Para não sobrecarregar a notação, sempre que não seja indispensável, nas variáveis de segunda ordem omitiremos os termos.

Teorema 3.5 (Teorema Fundamental) *Suponhamos que* $\mathsf{LK}_{\mathsf{FCH}} \vdash \Gamma \longrightarrow \Delta$*, onde* Γ *e* Δ *são constituídos por fórmulas* $\Sigma_1^{1,b}$*. Sejam* $\Gamma := \exists \bar{X} \varphi_1(\bar{x}, \bar{F}, \bar{X}), \ldots, \exists \bar{X} \varphi_n(\bar{x}, \bar{F}, \bar{X})$ *e* $\Delta := \exists \bar{Y} \psi_1(\bar{x}, \bar{F}, \bar{Y}), \ldots, \exists \bar{Y} \psi_m(\bar{x}, \bar{F}, \bar{Y})$ *onde* φ_i *e* ψ_i *são fórmulas* $\Sigma_0^{1,b}$*,* $\bar{Y} = Y_1, \ldots, Y_k$ *e* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$*,* $\psi_1, \ldots, \psi_m$ *têm componentes disjuntas de* $\bar{X}$*,* $\bar{Y}$ *respectivamente.*

Seja $\varphi(\bar{x},\bar{F},\bar{X}) := \bigwedge_{j=1}^{n} \varphi_j$ *e* $\psi(\bar{x},\bar{F},\bar{Y}) := \bigvee_{i=1}^{m} \psi_i$ *e notemos por* $\theta(\bar{x},\bar{F},\bar{X},\bar{Y})$ *a fórmula* $\varphi(\bar{x},\bar{F},\bar{X}) \to \psi(\bar{x},\bar{F},\bar{Y})$. *Então existem termos* $t_i(\bar{x})$ $(1 \leq i \leq k)$ *e existem fórmulas* $\Sigma_1^{1,b}$*-estendidas* $M_i^{\Sigma}(\omega,\bar{x},\bar{F},\bar{X})$ *e fórmulas* $\Pi_1^{1,b}$*-estendidas* $M_i^{\Pi}(\omega,\bar{x},\bar{F},\bar{X})$ $(1 \leq i \leq k)$*, tais que* $\mathsf{TCA} \vdash \forall\bar{x}\forall\bar{F}\forall\bar{X}\theta(\bar{x},\bar{F},\bar{X},\{\omega \preceq t_1(\bar{x}) : M_1^{\Sigma}(\omega,\bar{x},\bar{F},\bar{X})\},\ldots,\{\omega \preceq t_k(\bar{x}) : M_k^{\Sigma}(\omega,\bar{x},\bar{F},\bar{X})\})$[15] *e* $\mathsf{TCA} \vdash \forall\bar{x}\forall\bar{F}\forall\bar{X}\forall\omega \preceq t_i(\bar{x})(M_i^{\Sigma}(\omega,\bar{x},\bar{F},\bar{X})) \leftrightarrow M_i^{\Pi}(\omega,\bar{x},\bar{F},\bar{X})), (1 \leq i \leq k)$ *e os predicados* $\omega \preceq t_i(\bar{x}) \wedge M_i^{\Delta}(\omega,\bar{x},\bar{F},\bar{X})$[16] *estão em* $\mathsf{CH}^{\bar{\mathsf{X}},\bar{\mathsf{F}}}$ *(a classe dos predicados cujas funções característica pertencem a* $\mathsf{FCH}^{\bar{\mathsf{X}},\bar{\mathsf{F}}}$*).*

Demonstração

A demonstração deste resultado faz-se, com as devidas adaptações, de forma semelhante à demonstração do resultado homólogo em $\mathsf{\Sigma_1^{1,b}}$-NIA, também denominado *Teorema Fundamental* (veja [22]). Vários casos a analisar nem requerem qualquer alteração. De qualquer modo, dado o papel essencial que este teorema desempenha na caracterização das funções demonstravelmente totais de TCA, vamos apresentar uma demonstração algo detalhada.

Consideremos que $\mathsf{LK_{FCH}} \vdash \Gamma \longrightarrow \Delta$, com Γ e Δ constituídos por fórmulas $\Sigma_1^{1,b}$. Podemos supor que P, a $\mathsf{LK_{FCH}}$-demonstração de $\Gamma \longrightarrow \Delta$, é constituída apenas por fórmulas $\Sigma_1^{1,b}$. Isto porque, pelo *teorema da eliminação do corte livre*[17], podemos tomar P como sendo uma demonstração sem cortes livres. Como qualquer fórmula que figure em P ou é ascendente de fórmulas de Γ ou Δ ou é ascendente de fórmulas do corte (que sabemos serem ancoradas) temos que é uma fórmula $\Sigma_1^{1,b}$. Vamos provar, por indução no número de linhas da demonstração, que para qualquer sequente $\Pi \longrightarrow \Lambda$ em P, existem os termos e as fórmulas testemunhas nas condições do enunciado.

- Se $\Pi \longrightarrow \Lambda$ é um sequente inicial da forma $A \longrightarrow A$ com A fórmula atómica, ou é um axioma de igualdade, ou é um sequente da forma 1), 2) ou 3), segundo a definição de $\mathsf{LK_{FCH}}$, nada há a demonstrar.

- Se $\Pi \longrightarrow \Lambda$ é um sequente inicial da forma 4), isto é, $\Pi \longrightarrow \Lambda$ tem a forma $\longrightarrow \exists F^s \forall y \preceq s(y \in F^s \leftrightarrow A(y))$ com A uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$, definimos: $M_1^{\Sigma}(\omega,\bar{x},\bar{X})$ como sendo $A(\omega,\bar{x},\bar{X})$ que é uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$ logo é $\Sigma_1^{1,b}$-estendida; e definimos $M_1^{\Pi}(\omega,\bar{x},\bar{X})$ como sendo $A(\omega,\bar{x},\bar{X})$ que sendo uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$ é também $\Pi_1^{1,b}$-estendida e tomamos $t_1 := s$.

- Se $\Pi \longrightarrow \Lambda$ é um sequente inicial da forma 5), isto é, $\Pi \longrightarrow \Lambda$ é o sequente $\longrightarrow \exists C^{(tt11)(tt11)}\mathsf{Count}(C, F^t)$, definimos:

[15] Notamos por $\theta(\bar{x},\bar{F},\bar{X},\{\omega \preceq t_1(\bar{x}) : M_1^{\Sigma}(\omega,\bar{x},\bar{F},\bar{X})\},\ldots)$ a fórmula $\theta(\bar{x},\bar{F},\bar{X},G,\ldots)$ em que as ocorrências de $s \in G$ são substituídas por $s \preceq t_1(\bar{x}) \wedge M_1^{\Sigma}(s,\bar{x},\bar{F},\bar{X})$.

[16] Com $\Delta \in \{\Sigma,\Pi\}$.

[17] À semelhança do que aconteceu no Capítulo 2 a propósito de $\mathsf{LK_{FAN}}$, alteramos ligeiramente a definição de fórmula ancorada, permitindo agora que também possa ser descendente directo da fórmula principal da regra de substituição (veja [22]) por forma a garantir que em $\mathsf{LK_{FCH}}$ ainda seja válido o *teorema da eliminação do corte livre*.

$M_1^\Sigma(\omega,\bar{x},F^t) :\leftrightarrow \exists i \preceq t\exists j \preceq t1(\omega = \langle i,j\rangle \wedge \underbrace{j = c_{\chi_{F^t}}(i)}_{\varphi^\Sigma_{c_{\chi_{F^t}}}(i,j)})$, fórmula $\Sigma_1^{1,b}$-estendida.

Sendo $\chi_{F^t}(x) = \begin{cases} \epsilon & \text{se } x \notin F^t \\ 0 & \text{se } x \in F^t \end{cases}$, temos que $\chi_{F^t} \in \mathsf{FCH}^{\mathsf{F^t}}$. Logo $c_{\chi_{F^t}} \in \mathsf{FCH}^{\mathsf{F^t}}$

e portanto a última igualdade da definição de $M_1^\Sigma(\omega,\bar{x},F^t)$ pode ser expressa em TCA através de uma fórmula $\Delta_1^{1,b}$-estendida. Embora tenhamos provado tal facto apenas para FCH, para $\mathsf{FCH}^{\mathsf{F^t}}$ basta considerar apenas mais uma função inicial, a função

$\chi_{F^t}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in F^t \\ \epsilon & \text{c.c.} \end{cases}$, que é testemunhada em TCA por

$\varphi_{\chi_{F^t}}(x,y) :\leftrightarrow (x \in F^t \wedge y = 0) \vee (x \notin F^t \wedge y = \epsilon)$ com $b_{\chi_{F^t}}(x) = 0$.

E definimos

$M_1^\Pi(\omega,\bar{x},F^t) :\leftrightarrow \exists i \preceq t\exists j \preceq t1(\omega = \langle i,j\rangle \wedge \underbrace{j = c_{\chi_{F^t}}(i)}_{\varphi^\Pi_{c_{\chi_{F^t}}}(i,j)})$, fórmula $\Pi_1^{1,b}$-estendida e

$t_1(\bar{x}) := (tt11)(tt11)$.

Sabemos que $c_{\chi_{F^t}} \in \mathsf{FCH}^{\mathsf{F^t}}$, logo $\lambda(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{se } c_{\chi_{F^t}}(i) = j \\ \epsilon & \text{c.c.} \end{cases} \in \mathsf{FCH}^{\mathsf{F^t}}$, o que por sua

vez implica que $j = c_{\chi_{F^t}}(i) \in \mathsf{CH}^{\mathsf{F^t}}$ e portanto $M_1^\Delta(\omega,\bar{x},F^t) \in \mathsf{CH}^{\mathsf{F^t}}$.

- Os casos em que $\Pi{\longrightarrow}\Lambda$ se obtém por $p:e$, $p:d$, $c:e$, $c:d$, $e:e$, $e:d$, $\neg:e$, $\neg:d$, $\wedge:e$, $\vee:d$, $\rightarrow: d$, $\forall_\preceq : e$, $\exists_\preceq : d$ e $\exists_{2^a} : e$ são triviais.

- Se $\Pi{\longrightarrow}\Lambda$ se obtém por $\wedge : d$ então $\Pi{\longrightarrow}\Lambda$ é da forma $\Gamma'{\longrightarrow}\Delta', A\wedge B$.

  Trata-se da situação:
  $$\frac{\Gamma'{\longrightarrow}\Delta', A \quad \Gamma'{\longrightarrow}\Delta', B}{\Gamma'{\longrightarrow}\Delta', A\wedge B}.$$

  Como $A \wedge B$ é uma fórmula $\Sigma_1^{1,b}$, temos que A e B são ambas fórmulas $\Sigma_0^{1,b}$. Por hipótese de indução para $\Gamma'{\longrightarrow}\Delta', A$ existem $(M')_i^\Sigma(\omega,\bar{x},\bar{X})$, $(M')_i^\Pi(\omega,\bar{x},\bar{X})$ e $t'_i(\bar{x})$ nas condições pretendidas, e para $\Gamma'{\longrightarrow}\Delta', B$ existem $(M'')_i^\Sigma(\omega,\bar{x},\bar{X})$, $(M'')_i^\Pi(\omega,\bar{x},\bar{X})$ e $t''_i(\bar{x})$ nas condições pretendidas.

  Para $\Gamma'{\longrightarrow}\Delta', A\wedge B$ tomamos: $M_i^\Sigma(\omega,\bar{x},\bar{X}) :\leftrightarrow (A \vee (\omega \preceq t'_i \wedge (M')_i^\Sigma(\omega,\bar{x},\bar{X}))) \wedge (\neg A \vee B \vee (\omega \preceq t''_i \wedge (M'')_i^\Sigma(\omega,\bar{x},\bar{X})) \wedge (\neg A \vee \neg B))$, que é uma fórmula $\Sigma_1^{1,b}$-estendida;

$M_i^\Pi(\omega,\bar{x},\bar{X}) :\leftrightarrow (A \vee (\omega \preceq t_i' \wedge (M')_i^\Pi(\omega,\bar{x},\bar{X}))) \wedge (\neg A \vee B \vee (\omega \preceq t_i'' \wedge (M'')_i^\Pi(\omega,\bar{x},\bar{X})) \wedge (\neg A \vee \neg B))$, que é uma fórmula $\Pi_1^{1,b}$-estendida e $t_i := t_i' \hat{} t_i''$.

- Os casos $\vee : e$ e $\rightarrow : e$ são tratados de forma semelhante à anterior.
- Os casos $\forall : e$, $\forall : d$, $\exists : e$, $\exists : d$, $\forall_{2^a} : e$ e $\forall_{2^a} : d$ não ocorrem em P visto todas a fórmulas na demonstração serem fórmulas $\Sigma_1^{1,b}$.
- Analisemos agora o caso $\forall_\preceq : d$. Nesta situação $\Pi \longrightarrow \Lambda$ é da forma $\Gamma' \longrightarrow \Delta', \forall x \preceq t A(x)$, tratando-se da dedução:

$$\frac{b \preceq t, \Gamma' \longrightarrow \Delta', A(b)}{\Gamma' \longrightarrow \Delta', \forall x \preceq t A(x)}.$$

Como $\forall x \preceq tA(x)$ é uma fórmula $\Sigma_1^{1,b}$, temos que $A(x)$ é uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$. Por hipótese de indução, para $b \preceq t, \Gamma' \longrightarrow \Delta', A(b)$, existem $(M')_i^\Sigma(\omega, x, \bar{x}, \bar{X})$, $(M')_i^\Pi(\omega, x, \bar{x}, \bar{X})$ e $t_i'(x, \bar{x})$ nas condições pretendidas.

Para $\Gamma' \longrightarrow \Delta', \forall x \preceq tA(x)$ tomamos: $M_i^\Sigma(\omega,\bar{x},\bar{X}) :\leftrightarrow \exists x \preceq t(\neg A(x) \wedge \forall x' <_l x A(x') \wedge \omega \preceq t_i'(x,\bar{x}) \wedge (M')_i^\Sigma(\omega, x, \bar{x}, \bar{X}))$; $M_i^\Pi(\omega,\bar{x},\bar{X}) :\leftrightarrow \exists x \preceq t(\neg A(x) \wedge \forall x' <_l x A(x') \wedge \omega \preceq t_i'(x,\bar{x}) \wedge (M')_i^\Pi(\omega, x, \bar{x}, \bar{X}))$ e $t_i(\bar{x}) := t_i'(t(\bar{x}), \bar{x})$. Como em TCA é válido o esquema de minimização para fórmulas $\Delta_1^{1,b}$-estendidas, facilmente nos apercebemos que temos o pretendido.

- O caso $\exists_\preceq : e$ é análogo ao anterior.
- Estudemos o caso $\exists_{2^a} : d$. $\Pi \longrightarrow \Lambda$ é da forma $\Gamma' \longrightarrow \Delta', \exists F A(F)$, encontrando-nos na seguinte situação:

$$\frac{\Gamma' \longrightarrow \Delta', A(Z^q)}{\Gamma' \longrightarrow \Delta', \exists F A(F)}.$$

Suponhamos que $\Gamma' := \exists \bar{X} \varphi_1(\bar{x}, \bar{F}, Z^q, \bar{X}), \ldots, \exists \bar{X} \varphi_n(\bar{x}, \bar{F}, Z^q, \bar{X})$, com φ_i fórmulas $\Sigma_0^{1,b}$; $\Delta' := \exists \bar{Y} \psi_1(\bar{x}, \bar{F}, Z^q, \bar{Y}), \ldots, \exists \bar{Y} \psi_m(\bar{x}, \bar{F}, Z^q, \bar{Y})$, com ψ_i fórmulas $\Sigma_0^{1,b}$; $\bar{Y} = Y_1, \ldots, Y_k$ e $A(Z^q) := \exists \bar{Y} \gamma(\bar{x}, \bar{F}, Z^q, \bar{Y})$ com γ fórmula $\Sigma_0^{1,b}$ e sendo disjuntos os $\bar{Y}'s$ que aparecem em $\psi_1, .., \psi_m$ e γ. Por hipótese de indução, para $\Gamma' \longrightarrow \Delta', A(Z^q)$ existem $(M')_i^\Sigma(\omega, \bar{x}, \bar{F}, Z^q, \bar{X}), (M')_i^\Pi(\omega, \bar{x}, \bar{F}, Z^q, \bar{X})$ e $t_i'(\bar{x})$ nas condições pretendidas.

Para $\Gamma' \longrightarrow \Delta', \exists F A(F)$ tomemos:

$$M_i^\Sigma(\omega, \bar{x}, \bar{F}, Z^q, \bar{X}) :\leftrightarrow \begin{cases} (M')_i^\Sigma(\omega, \bar{x}, \bar{F}, Z^q, \bar{X}) & \text{se } 1 \leq i \leq k \\ \omega \in Z^q & \text{se } i = k+1 \end{cases};$$

$$M_i^{\Pi}(\omega,\bar{x},\bar{F},Z^q,\bar{X}) :\leftrightarrow \begin{cases} (M')_i^{\Pi}(\omega,\bar{x},\bar{F},Z^q,\bar{X}) & \text{se } 1 \leq i \leq k \\ \omega \in Z^q & \text{se } i = k+1 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$t_i(\bar{x}) := \begin{cases} t'_i(\bar{x}) & \text{se } 1 \leq i \leq k \\ q(\bar{x}) & \text{se } i = k+1 \end{cases}.$$

- Analisemos agora a regra do corte.

  $\Pi{\longrightarrow}\Lambda$ é da forma $\Gamma'{\longrightarrow}\Delta'$, sendo a situação a seguinte:

  $$\frac{\Gamma'{\longrightarrow}\Delta', A \quad A, \Gamma'{\longrightarrow}\Delta'}{\Gamma'{\longrightarrow}\Delta'}.$$

  Sejam $A(\bar{x},\bar{F}) :\leftrightarrow \exists G_1 \ldots \exists G_r \gamma(\bar{x},\bar{F},\bar{G})$, $\Gamma' := \exists \bar{X}\varphi_1(\bar{x},\bar{F},\bar{X}),\ldots,\exists \bar{X}\varphi_n(\bar{x},\bar{F},\bar{X})$ com γ,φ_i fórmulas $\Sigma_0^{1,b}$ e $\Delta' := \exists \bar{Y}\psi_1(\bar{x},\bar{F},\bar{Y}),\ldots,\exists \bar{Y}\psi_m(\bar{x},\bar{F},\bar{Y})$, com ψ_i fórmulas $\Sigma_0^{1,b}$ e $\bar{Y} = Y_1,\ldots,Y_k$. Por hipótese de indução, para $\Gamma'{\longrightarrow}\Delta', A$ existem fórmulas $(M')_i^{\Sigma}(\omega,\bar{x},\bar{F},\bar{X})$, $(M')_i^{\Pi}(\omega,\bar{x},\bar{F},\bar{X})$ e termos $t'_i(\bar{x})$ com $1 \leq i \leq k+r$ e para $A, \Gamma'{\longrightarrow}\Delta'$ existem fórmulas $(M'')_i^{\Sigma}(\omega,\bar{x},\bar{F},\bar{X},\bar{G})$, $(M'')_i^{\Pi}(\omega,\bar{x},\bar{F},\bar{X},\bar{G})$ e termos $t''_i(\bar{x})$ com $1 \leq i \leq k$, nas condições pretendidas.

  Para $\Gamma'{\longrightarrow}\Delta'$ e para $1 \leq i \leq k$ tomamos:

  $M_i^{\Sigma}(\omega,\bar{x},\bar{F},\bar{X}) :\leftrightarrow [\neg(\bigvee_{j=1}^{m} \psi_j(\bar{x},\bar{F}, \{\omega \preceq t'_1 : (M')_1^{\Delta}(\omega,\bar{x},\bar{F},\bar{X})\},\ldots,\{\omega \preceq t'_k : (M')_k^{\Delta}(\omega,\bar{x},\bar{F},\bar{X})\})) \vee$
  $(\omega \preceq t'_i \wedge (M')_i^{\Sigma}(\omega,\bar{x},\bar{F},\bar{X}))] \wedge [\bigvee_{j=1}^{m} \psi_j(\bar{x},\bar{F},\{\omega \preceq t'_1 : (M')_1^{\Delta}(\omega,\bar{x},\bar{F},\bar{X})\},\ldots,\{\omega \preceq t'_k : (M')_k^{\Delta}(\omega,\bar{x},\bar{F},\bar{X})\}) \vee$
  $(\omega \preceq t''_i \wedge (M'')_i^{\Sigma}(\omega,\bar{x},\bar{F},\bar{X},\{\omega \preceq t'_{k+1} : (M')_{k+1}^{\Delta}(\omega,\bar{x},\bar{F},\bar{X})\},\ldots,\{\omega \preceq t'_{k+r} : (M')_{k+r}^{\Delta}(\omega,\bar{x},\bar{F},\bar{X})\}))]$[18];

  M_i^{Π} análogo a M_i^{Σ} substituindo $(M')_i^{\Sigma}$ por $(M')_i^{\Pi}$ e $(M'')_i^{\Sigma}$ por $(M'')_i^{\Pi}$ e $t_i := t'_i{}^\frown t''_i$.

- No caso da regra de substituição, $\Pi{\longrightarrow}\Lambda$ é da forma $\Gamma'{\longrightarrow}\exists G \forall x \preceq t\bar{\varphi}(x,G)$, encontrando-nos na situação:

  $$\frac{\Gamma', a \preceq t{\longrightarrow}\exists F\varphi(a,F)}{\Gamma'{\longrightarrow}\exists G\forall x \preceq t\bar{\varphi}(x,G)}.$$

  Note que φ é uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$, uma vez que a regra da substituição só se aplica a fórmulas com esta complexidade. Por hipótese de indução, para $\Gamma', a \preceq t{\longrightarrow}\exists F\varphi(a,F)$ existem $(M')_1^{\Sigma}(\omega,\bar{x},y,\bar{X})$, $(M')_1^{\Pi}(\omega,\bar{x},y,\bar{X})$ e $t'_1(\bar{x},y)$ nas condições pretendidas.

  Para $\Gamma'{\longrightarrow}\exists G\forall x \preceq t\bar{\varphi}(x,G)$ tomamos: $M_1^{\Sigma}(\omega,\bar{x},\bar{X}) :\leftrightarrow \exists y \preceq t \exists s \preceq t'_1((M')_1^{\Sigma}(s,\bar{x},y,\bar{X}) \wedge \omega = \langle y,s\rangle)$; $M_1^{\Pi}(\omega,\bar{x},\bar{X}) :\leftrightarrow \exists y \preceq t\exists s \preceq t'_1((M')_1^{\Pi}(s,\bar{x},y,\bar{X}) \wedge \omega = \langle y,s\rangle)$ e $t_1(\bar{x}) := (t(\bar{x})^\frown t'_1(\bar{x},t(\bar{x})))1 \times 11$.

$\square$

[18] $(M')_i^{\Delta}$ é usado, neste contexto, para significar que escolhemos ocorrências de $(M')_i^{\Sigma}$ e $(M')_i^{\Pi}$ de forma a que M_i^{Σ} seja uma fórmula $\Sigma_1^{1,b}$-estendida e M_i^{Π} (situação seguinte), uma fórmula $\Pi_1^{1,b}$-estendida.

Lema 3.3 *Seja $\varphi(\bar{x}, y)$ uma fórmula $\Sigma_1^{1,b}$ e suponhamos que $\mathsf{TCA} \vdash \forall\bar{x}\exists y\varphi(\bar{x}, y)$. Então existe um termo $t(\bar{x})$ de $\mathcal{L}$ tal que $\mathsf{TCA} \vdash \forall\bar{x}\exists y \preceq t(\bar{x})\varphi(\bar{x}, y)$.*

Demonstração

A demonstração deste resultado no contexto da teoria $\mathsf{\Sigma_1^{1,b}}$-NIA encontra-se em [22], páginas 55-56. Em TCA funciona uma demonstração inteiramente análoga.

□

Estamos agora em condições de caracterizar as funções demonstravelmente totais de TCA.

Teorema 3.6 *Se $\mathsf{TCA} \vdash \forall\bar{x}\exists y\varphi(\bar{x}, y)$, com φ uma fórmula $\Sigma_1^{1,b}$, então existe uma função $f \in \mathsf{FCH}$ tal que, para todo $\bar{\sigma} \in 2^{<\omega}$, se tem $\varphi(\bar{\sigma}, f(\bar{\sigma}))$.*

Além disso, existem uma fórmula $\Delta_1^{1,b}$-estendida, θ, em TCA e um termo $t(\bar{x})$, tais que:

1) $f(\bar{\sigma}) = \tau \leftrightarrow \theta(\bar{\sigma}, \tau)$

2) $\mathsf{TCA} \vdash \forall\bar{x}\forall y(\theta(\bar{x}, y) \to \varphi(\bar{x}, y))$

3) $\mathsf{TCA} \vdash \forall\bar{x}\exists y \preceq t\ \theta(\bar{x}, y)$

4) $\mathsf{TCA} \vdash \forall\bar{x}\exists^1 y\ \theta(\bar{x}, y)$.

Demonstração

Suponhamos que $\mathsf{TCA} \vdash \forall\bar{x}\exists y\varphi(\bar{x}, y)$, com φ uma fórmula $\Sigma_1^{1,b}$. Pelo lema 3.3 existe um termo $t(\bar{x})$ tal que $\mathsf{TCA} \vdash \forall\bar{x}\exists y \preceq t(\bar{x})\varphi(\bar{x}, y)$, logo $\mathsf{LK_{FCH}} \vdash \longrightarrow \exists y \preceq t(\bar{x}) \underbrace{\varphi(\bar{x}, y)}_{\textit{fórmula } \Sigma_1^{1,b}}$. Seja

$\varphi(\bar{x}, y) :\leftrightarrow \exists U_1 \ldots \exists U_k \tilde{\varphi}(\bar{x}, y, U_1, \ldots, U_k)$, com $\tilde{\varphi}$ uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$.

$\mathsf{LK_{FCH}} \vdash \longrightarrow \exists U_1 \ldots \exists U_k \exists y \preceq t(\bar{x})\tilde{\varphi}(\bar{x}, y, U_1, \ldots, U_k)$. Pelo teorema 3.5 existem fórmulas $\Sigma_1^{1,b}$-estendidas, M_i^Σ; fórmulas $\Pi_1^{1,b}$-estendidas, M_i^Π e termos t_i, com $1 \leq i \leq k$, que verificam $\mathsf{TCA} \vdash \forall\bar{x}\exists y \preceq t(\bar{x})\tilde{\varphi}(\bar{x}, y, \{\omega \preceq t_1(\bar{x}) : M_1^\Sigma(\omega, \bar{x})\}, \ldots, \{\omega \preceq t_k(\bar{x}) : M_k^\Sigma(\omega, \bar{x})\})$ e $\mathsf{TCA} \vdash \forall\bar{x}\forall\omega \preceq t_i(\bar{x})(M_i^\Sigma(\omega, \bar{x}) \leftrightarrow M_i^\Pi(\omega, \bar{x}))$ e os predicados $\omega \preceq t_i(\bar{x}) \wedge M_i^\Delta(\omega, \bar{x})$ estão em CH. Logo $\tilde{\varphi}(\bar{x}, y, \{\omega \preceq t_1(\bar{x}) : M_1^\Sigma(\omega, \bar{x})\}, \ldots, \{\omega \preceq t_k(\bar{x}) : M_k^\Sigma(\omega, \bar{x})\})$ é um predicado de CH. Seja

$$f(\bar{\sigma}) := \mu y \preceq t(\bar{\sigma})\tilde{\varphi}(\bar{\sigma}, y, \{\omega \preceq t_1(\bar{\sigma}) : M_1^\Sigma(\omega, \bar{\sigma})\}, \ldots, \{\omega \preceq t_k(\bar{\sigma}) : M_k^\Sigma(\omega, \bar{\sigma})\}).$$

Pelo lema 3.1, temos que $f(\bar{\sigma}) \in \mathsf{FCH}$. Obviamente, por definição de f, tem-se $\varphi(\bar{\sigma}, f(\bar{\sigma}))$. Seja

$$\begin{aligned}\theta(\bar{x}, y) :\leftrightarrow\ & \tilde{\varphi}(\bar{x}, y, \{\omega \preceq t_1(\bar{x}) : M_1^\Delta(\omega, \bar{x})\}, \ldots, \{\omega \preceq t_k(\bar{x}) : M_k^\Delta(\omega, \bar{x})\}) \wedge \\ & \forall y' <_l y \neg\tilde{\varphi}(\bar{x}, y', \{\omega \preceq t_1(\bar{x}) : M_1^\Delta(\omega, \bar{x})\}, \ldots, \{\omega \preceq t_k(\bar{x}) : M_k^\Delta(\omega, \bar{x})\}),\end{aligned}$$

uma fórmula $\Delta_1^{1,b}$-estendida em TCA. Obviamente *1)* verifica-se. Como em TCA temos compreensão para fórmulas $\Delta_1^{1,b}$-estendidas, *2)* também se verifica. E uma vez que em TCA

é válida minimização para fórmulas $\Delta_1^{1,b}$-estendidas (proposição 3.9), temos que $\mathsf{TCA} \vdash \forall \bar{x} \exists y \preceq t(\bar{x})\theta(\bar{x}, y)$. A unicidade resulta da definição de θ.

□

Concluimos assim que as funções demonstravelmente totais de TCA, com gráfico $\Sigma_1^{1,b}$, são exactamente as funções da classe FCH.

3.3.4 Enriquecimento de TCA com colecção limitada

Nesta subsecção iniciamos o processo de *enriquecimento* da teoria TCA, enriquecimento esse continuado na secção seguinte e que tem como propósito a obtenção de sistemas formais que, caracterizando ainda FCH, possuam maior poder dedutivo com vista ao posterior desenvolvimento de algumas noções de análise em tais sistemas.

Por agora, o fortalecimento de TCA irá resultar da junção de apenas um esquema — *esquema de colecção limitada*, denotado $\mathsf{B}^1\Sigma_\infty^{\mathsf{1,b}}$ — num formato (a seguir apresentado) associado às variáveis de segunda ordem de $\mathcal{L}_2^b$.

A importância da introdução deste princípio tão técnico, agora provavelmente nada óbvia, prende-se com a posterior extensão da teoria introduzindo compreensão recursiva e tendo por base uma linguagem de segunda ordem mais expressiva, extensão essa apresentada já na próxima secção.

A caracterização das funções demonstravelmente totais do novo sistema acrescido de colecção é conseguida a partir de um resultado de conservação relativamente a TCA.

Começamos por estabelecer alguma notação.

Uma fórmula diz-se $\Sigma_\infty^{1,b}$ se pertencer à menor classe de fórmulas, na linguagem $\mathcal{L}_2^b$, que contém as fórmulas $\Sigma_0^{1,b}$ e é fechada para $\neg, \wedge, \vee, \exists X^t, \forall X^t, \exists x \preceq t$ e $\forall x \preceq t$.

Definição 3.10 $\mathsf{TCA}+\mathsf{B}^1\Sigma_\infty^{\mathsf{1,b}}$ *é a teoria de segunda ordem na linguagem $\mathcal{L}_2^b$, que resulta de* TCA *acrescentando o seguinte axioma-esquema de* colecção limitada*, designado por* $\mathsf{B}^1\Sigma_\infty^{\mathsf{1,b}}$*:*

$$\forall X^t \exists y \varphi(y, X^t) \to \exists z \forall X^t \exists y \preceq z \varphi(y, X^t),$$

com φ uma fórmula $\Sigma_\infty^{1,b}$ que pode ter outras variáveis livres além de y e X^t.

Observação 3.7 $\mathsf{TCA}+\mathsf{B}^1\Sigma_\infty^{\mathsf{1,b}} \vdash \forall x \preceq t \exists y \varphi(x, y) \to \exists z \forall x \preceq t \exists y \preceq z \varphi(x, y)$*, com t um termo onde x não ocorre e φ uma fórmula $\Sigma_\infty^{1,b}$ que pode ter outras variáveis livres além de x e y. Tal esquema é usualmente notado por* $\mathsf{B}\Sigma_\infty^{\mathsf{1,b}}$*.*

Consideremos o cálculo de sequentes $\mathsf{LK'}_{\mathsf{FCH}}$ que resulta de $\mathsf{LK}_{\mathsf{FCH}}$ acrescentando a seguinte regra de inferência (designada por *regra* $\mathsf{B}^1\Sigma_\infty^{\mathsf{1,b}}$):

$$\frac{\Gamma \longrightarrow \exists y \varphi(y, C^t)}{\Gamma \longrightarrow \exists z \forall X^t \exists y \preceq z \varphi(y, X^t)} \; ,$$

onde C^t é uma variável própria, t é um termo onde y não ocorre e φ é uma fórmula $\Sigma_\infty^{1,b}$ que pode ter outras variáveis livres além das apresentadas.

Do estudo efectuado em [22], página 58, resulta imediatamente que a teoria $\mathsf{TCA}+\mathsf{B}^1\Sigma_\infty^{\mathsf{1,b}}$ pode ser formulada no cálculo de sequentes de Gentzen através de $\mathsf{LK'}_{\mathsf{FCH}}$.

Com vista à caracterização das funções demonstravelmente totais da teoria $\mathsf{TCA}+\mathsf{B}^1\Sigma_\infty^{\mathsf{1,b}}$ vamos recorrer a um resultado de conservação, pelo que começamos por introduzir a noção de uma teoria ser conservativa relativamente a outra.

Definição 3.11 *Sejam* T_1 *e* T_2 *teorias na linguagem* $\mathcal{L}_2^b$ *tais que* $\mathsf{T}_1 \supseteq \mathsf{T}_2$. *Diz-se que* T_1 *é uma teoria* $\forall\exists\Sigma_\infty^{1,b}$*-conservativa sobre* T_2 *se sempre que uma sentença* ψ *da forma* $\forall\bar{x}\exists y\varphi(\bar{x},y)$, *com* φ *uma fórmula* $\Sigma_\infty^{1,b}$, *seja tal que* $\mathsf{T}_1 \vdash \psi$ *então* $\mathsf{T}_2 \vdash \psi$.

Proposição 3.13 *A teoria* $\mathsf{TCA}+\mathsf{B}^1\Sigma_\infty^{\mathsf{1,b}}$ *é* $\forall\exists\Sigma_\infty^{1,b}$*-conservativa sobre* TCA.

Demonstração

A demonstração, recorrendo ao teorema da eliminação do corte livre (baseada numa demonstração de Buss — veja [5]), é inteiramente análoga à apresentada em [22], página 59, a propósito de um resultado idêntico em $\Sigma_1^{\mathsf{1,b}}$-NIA. Embora no presente caso tenhamos entre os sequentes inicias:

- $\longrightarrow A(\epsilon) \wedge \forall x \prec s(A(x) \rightarrow A(x0) \wedge A(x1)) \rightarrow \forall x \preceq sA(x)$ e
- $\longrightarrow \exists C^{(tt11)(tt11)}\mathsf{Count}(C,F^t)$,

axiomas que não constam em $\mathsf{LK'}_{\mathsf{PS}}$, podemos continuar a afirmar que, no raciocínio por indução no número de linhas da demonstração normalizada (i.e. sem cortes livres), o caso dos sequentes iniciais continua trivialmente válido. A demonstração fica ainda facilitada, uma vez que na presente situação não temos regra de indução nem regra $\mathsf{B}\Sigma_\infty^{\mathsf{1,b}}$.

$\square$

Concluimos esta secção observando que, como consequência da proposição anterior, o teorema 3.6 (relativamente a TCA) continua válido quando aplicado a esta nova teoria $\mathsf{TCA}+\mathsf{B}^1\Sigma_\infty^{\mathsf{1,b}}$.

Teorema 3.7 *Se* $\mathsf{TCA}+\mathsf{B}^1\Sigma_\infty^{\mathsf{1,b}} \vdash \forall\bar{x}\exists y\varphi(\bar{x},y)$, *com* φ *uma fórmula* $\Sigma_1^{1,b}$, *então existe uma função* $f \in \mathsf{FCH}$ *tal que, para todo* $\bar{\sigma} \in 2^{<\omega}$, *se tem* $\varphi(\bar{\sigma}, f(\bar{\sigma}))$.

Além disso, existem uma fórmula $\Delta_1^{1,b}$*-estendida,* θ, *em* $\mathsf{TCA}+\mathsf{B}^1\Sigma_\infty^{\mathsf{1,b}}$ *e um termo* $t(\bar{x})$, *tais que:*

1) $f(\bar{\sigma}) = \tau \leftrightarrow \theta(\bar{\sigma},\tau)$

2) $\mathsf{TCA}+\mathsf{B}^1\Sigma_\infty^{\mathsf{1,b}} \vdash \forall\bar{x}\forall y(\theta(\bar{x},y) \rightarrow \varphi(\bar{x},y))$

3) $\mathsf{TCA}+\mathsf{B}^1\Sigma_\infty^{\mathsf{1,b}} \vdash \forall\bar{x}\exists y \preceq t\, \theta(\bar{x},y)$

4) $\mathsf{TCA} + \mathsf{B}^1\Sigma^{1,b}_\infty \vdash \forall \bar{x} \exists^1 y\, \theta(\bar{x}, y)$.

Demonstração

Se $\mathsf{TCA} + \mathsf{B}^1\Sigma^{1,b}_\infty \vdash \forall \bar{x} \exists y \varphi(\bar{x}, y)$, com φ uma fórmula $\Sigma^{1,b}_1$ então, pela proposição 3.13 e observando que as fórmulas $\Sigma^{1,b}_1$ são, em particular, fórmulas $\Sigma^{1,b}_\infty$, temos que $\mathsf{TCA} \vdash \forall \bar{x} \exists y \varphi(\bar{x}, y)$. O resultado segue imediatamente do teorema 3.6.

□

Concluimos, portanto, que as funções demonstravelmente totais de $\mathsf{TCA} + \mathsf{B}^1\Sigma^{1,b}_\infty$, com gráfico $\Sigma^{1,b}_1$, continuam a ser as funções de FCH.

3.4 Análise computável na hierarquia de contagem

No final da secção anterior, iniciou-se um esforço de enriquecimento da teoria TCA, com o cuidado de permanecermos num sistema formal que caracterizasse FCH.

Nesta secção termina a 'caminhada' em direcção às ambicionadas *teorias de análise*, ainda associadas à classe FCH, que resultam da introdução e/ou fortalecimento de certos princípios e do alargamento da linguagem de forma a permitir conjuntos não necessariamente limitados. Note que, querendo (como é nosso propósito) formalizar noções de análise nestes sistemas fracos, necessitamos de uma linguagem de segunda ordem em toda a sua amplitude, visto os números reais serem introduzidos como conjuntos.

As teorias de análise a que nos referiamos são TCA^2 e $\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN}_0$, que passamos a apresentar e que constituem até final da tese o nosso ambiente de trabalho.

3.4.1 Teorias TCA^2 e $\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN}_0$

Comecemos por 'alargar' a anterior linguagem $\mathcal{L}^b_2$, com vista a trabalharmos em sistemas de análise.

Definição 3.12 *Seja $\mathcal{L}_2$ a linguagem de segunda ordem com igualdade que inclui a linguagem $\mathcal{L}$ e que contém variáveis de segunda ordem denotadas por $F, G, \ldots, X, Y, \ldots$ e um símbolo relacional binário $\in$, que opera entre um termo de $\mathcal{L}$ e uma variável de segunda ordem.*

Os *termos* de $\mathcal{L}_2$ coincidem com os termos de $\mathcal{L}$ e a classe das *fórmulas* de $\mathcal{L}_2$ pode ser definida como a menor classe de expressões que contém as fórmulas atómicas ($t_1 \subseteq t_2$, $t_1 = t_2$, $t_1 \in X$, com t_1 e t_2 termos e X uma variável de segunda ordem) e é fechada para as operações booleanas ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$) e para as quantificações da forma $\forall x$, $\exists x$, $\forall X$, $\exists X$, com x uma variável de primeira ordem e X uma variável de segunda ordem[19].

Consideremos $X \preceq t$ como abreviando $\forall z(z \in X \rightarrow z \preceq t)$.

[19]Note-se que ao contrário do que acontecia em $\mathcal{L}^b_2$, nesta nova linguagem não introduzimos as quantificações limitadas de primeira ordem $\forall x \preceq tP$ e $\exists x \preceq tP$ como novas fórmulas, mas sim iremos convencionar que abreviam $\forall x(x \preceq t \rightarrow P)$ e $\exists x(x \preceq t \wedge P)$ respectivamente.

Assim sendo a fórmula $\exists X^t P$ (respectivamente $\forall X^t P$) de $\mathcal{L}_2^b$ pode ser expressa em $\mathcal{L}_2$ através da fórmula $\exists X(X \preceq t \wedge P)$ (respectivamente $\forall X(X \preceq t \to P)$) ou abreviadamente $\exists X \preceq t\ P$ (respectivamente $\forall X \preceq t\ P$).

Temos, portanto, que $\mathcal{L}_2^b$ '$\subseteq$' $\mathcal{L}_2$ no sentido em que esta última linguagem tem maior poder expressivo que a primeira.

As definições de *fórmulas* $\Sigma_0^{1,b}$, *fórmulas* $\Sigma_1^{1,b}$ ($\Sigma_1^{1,b}$-*estendidas*), *fórmulas* $\Pi_1^{1,b}$ ($\Pi_1^{1,b}$-*estendidas*) e *fórmulas* $\Sigma_\infty^{1,b}$ em $\mathcal{L}_2$, coincidem com as definições em $\mathcal{L}_2^b$, substituindo-se as quantificações de segunda ordem $\forall X^t$, $\exists X^t$ por $\forall X \preceq t$ e $\exists X \preceq t$ e tendo em conta que os parâmetros de segunda ordem não se encontram limitados por termos. Tais definições podem ser encontradas em [22], página 64.

Uma estrutura em $\mathcal{L}_2$ tem por domínio um par (M, S) com M domínio de uma estrutura para $\mathcal{L}$ e $S \subseteq \mathcal{P}(M)$. As variáveis de primeira ordem variam em M e as de segunda ordem variam em S. O modelo *standard* tem domínio $(2^{<\omega}, \mathcal{P}(2^{<\omega}))$.

Estamos agora em condições de apresentar a nossa primeira *teoria de análise* que, como veremos adiante, ainda se insere no âmbito das computações na hierarquia das funções de contagem e que constitui o suporte do estudo analítico a desenvolver no Capítulo 4.

Definição 3.13 TCA^2 *é a teoria de segunda ordem na linguagem $\mathcal{L}_2$, cujos axiomas são o fecho universal das seguintes fórmulas:*

- *Axiomas básicos*[20]
- *Esquema de indução na notação para fórmulas* $\Sigma_0^{1,b}$

  $\varphi(\epsilon) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x0) \wedge \varphi(x1)) \to \forall x \varphi(x)$,

  com φ uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$, podendo ter outras variáveis livres além de x
- *Esquema de substituição para fórmulas* $\Sigma_0^{1,b}$

  $\forall x \preceq t \exists F \preceq q\ \varphi(x, F) \to \exists G \preceq (tq'1)(tq'1) \forall x \preceq t\ \bar{\varphi}(x, G)$,

  com φ uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$ que pode ter outras variáveis livres além de x e F, t um termo onde x não ocorre, $q' := q[t/x]$ e $\bar{\varphi}$ se obtém de φ substituindo todas as ocorrências de $s \in F$ por $\langle x, s\rangle \in G$
- *Axioma da Contagem*

  $\forall F \preceq t \exists C \preceq (tt11)(tt11)\mathsf{Count}(C, F)$,

  onde $\mathsf{Count}(C, F)$ abrevia a fórmula apresentada na definição 3.9
- *Esquema de colecção limitada* $\mathsf{B}^1\Sigma_\infty^{1,\mathsf{b}}$

  $\forall X \preceq t \exists y \varphi(y, X) \to \exists z \forall X \preceq t \exists y \preceq z \varphi(y, X)$,

  com φ uma fórmula $\Sigma_\infty^{1,b}$ que pode ter outras variáveis livres além de y e X

[20] Referimo-nos, uma vez mais, aos 14 primeiros axiomas da definição 3.7.

- *Esquema de compreensão recursiva*

  $\forall x(\exists y\varphi(x,y) \leftrightarrow \forall y\psi(x,y)) \to \exists X\forall x(x \in X \leftrightarrow \exists y\varphi(x,y))$,

  com φ *uma fórmula* $\Sigma_1^{1,b}$ *e* ψ *uma fórmula* $\Pi_1^{1,b}$ *que podem ter outras variáveis livres além de* x *e* y.

O esquema de compreensão recursiva agora introduzido, mostrar-se-á muito conveniente, como veremos no Capítulo 4, para lidarmos com conceitos como o de função (formalizado por meio de um conjunto de códigos de pares ordenados), podendo, por exemplo, considerar-se a composição de duas funções ou a imagem inversa de dado conjunto por meio de determinada função.

Observação 3.8 *Tendo em conta que* $\mathcal{L}_2^b \subseteq \mathcal{L}_2$*, as teorias anteriormente estudadas,* TCA *e* $\mathsf{TCA} + \mathsf{B}^1\Sigma_\infty^{1,b}$*, estão 'contidas' em* TCA^2*, na medida em que, todo o modelo de* TCA^2 *satisfaz os axiomas de* $\mathsf{TCA} + \mathsf{B}^1\Sigma_\infty^{1,b}$*. Em sentido contrário, o próximo lema estabelece que partindo de um modelo de* $\mathsf{TCA} + \mathsf{B}^1\Sigma_\infty^{1,b}$ *é possível obtermos um modelo de* TCA^2 *com o mesmo domínio de primeira ordem e o mesmo domínio* limitado *de segunda ordem.*

Lema 3.4 (Lema Principal) *Seja* $\mathcal{M}$ *um modelo da teoria* $\mathsf{TCA} + \mathsf{B}^1\Sigma_\infty^{1,b}$ *(na linguagem* $\mathcal{L}_2^b$*) com domínio* $|\mathcal{M}| = (M, S_b)$*. Então existe* $S \subseteq \mathcal{P}(M)$ *tal que* $\mathcal{M}^*$*, com domínio* $|\mathcal{M}^*| = (M, S)$*, é um modelo da teoria* TCA^2 *(na linguagem* $\mathcal{L}_2$*) tendo-se que* $S_b = \{X^a : X \in S \wedge a \in M\}$.

Demonstração

A demonstração deste resultado faz-se de forma inteiramente análoga à apresentada em [22] (lema 6, páginas 65-69) sendo S constituído pelos subconjuntos $X \subseteq M$ para os quais existem fórmulas φ e ψ respectivamente $\Sigma_1^{1,b}$ e $\Pi_1^{1,b}$, elementos $\bar{a}, \bar{b}$ em M e $\bar{A}^p$ e $\bar{B}^u$ em S_b tais que $X = \{x \in M : \mathcal{M} \vDash \exists y\varphi(x,y,\bar{a},\bar{A}^p)\} = \{x \in M : \mathcal{M} \vDash \forall y\psi(x,y,\bar{b},\bar{B}^u)\}$. É apenas necessário estudar dois novos casos: o *esquema de substituição* e o *axioma da contagem*. Notar que embora no âmbito da nossa demonstração se tenha que provar que em $\mathcal{M}^*$ é válido o esquema de indução na notação para fórmulas $\Sigma_0^{1,b}$, e não para fórmulas $\Sigma_1^{1,b}$-estendidas como na demonstração apresentada em [22], o raciocínio a afectuar é exactamente o mesmo. Concentremo-nos então nos novos casos. Vejamos que:

<u>Em $\mathcal{M}^*$ é válido o esquema de substituição para fórmulas $\Sigma_0^{1,b}$</u>.

Suponhamos que $\mathcal{M}^* \vDash \forall x \preceq t\exists F \preceq q\varphi(x,\bar{a},F,\bar{A})$, com φ uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$. Queremos provar que $\mathcal{M}^* \vDash \exists G \preceq (tq'1)(tq'1)\forall x \preceq t\bar{\varphi}(x,\bar{a},G,\bar{A})$, com q' e $\bar{\varphi}$ nas condições do esquema de substituição. Consideremos a seguinte fórmula $\Sigma_\infty^{1,b}$: $\psi(\bar{u},\bar{U}) :\leftrightarrow \forall x \preceq t\exists F \preceq q\varphi(x,\bar{u},F,\bar{U})$. Pelo FACTO[21] ([22], página 66), existe um termo $p(\bar{u})$ tal

[21]FACTO: Dada $\varphi(\bar{u},\bar{U})$ uma fórmula $\Sigma_\infty^{1,b}$, existe um termo $t(\bar{u})$ com a seguinte propriedade: dados $\bar{c}$ em M e $\bar{C}$ em S então $\mathcal{M}^* \vDash \varphi(\bar{c},\bar{C}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \varphi(\bar{c},\bar{C}^b)$ sempre que $t(\bar{c}) \preceq b$.

Este resultado foi enunciado e demonstrado em [22], páginas 66-67.

que $\mathcal{M}^* \vDash \psi(\bar{a}, \bar{A}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \psi(\bar{a}, \bar{A}^b)$ sempre que $p(\bar{a}) \preceq b$. Logo temos $\mathcal{M} \vDash \forall x \preceq t \exists F^q \varphi(x, \bar{a}, F^q, \bar{A}^b)$, sempre que $p(\bar{a}) \preceq b$. Por substituição para fórmulas $\Sigma_0^{1,b}$ (válida em $\mathcal{M}$), temos $(\star)$ $\mathcal{M} \vDash \exists G^{(tq'1)(tq'1)} \forall x \preceq t \bar{\varphi}(x, \bar{a}, G^{(tq'1)(tq'1)}, \bar{A}^b)$ sempre que $p(\bar{a}) \preceq b$. Consideremos a seguinte fórmula $\Sigma_\infty^{1,b}$: $\theta(\bar{u}, \bar{U}) :\leftrightarrow \exists G \preceq (tq'1)(tq'1) \forall x \preceq t \bar{\varphi}(x, \bar{u}, G, \bar{U})$. Pelo FACTO, existe um termo $p'(\bar{u})$ tal que $\mathcal{M}^* \vDash \theta(\bar{a}, \bar{A}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \theta(\bar{a}, \bar{A}^{b'})$, sempre que $p'(\bar{a}) \preceq b'$. Por $(\star)$, temos $\mathcal{M} \vDash \theta(\bar{a}, \bar{A}^b)$, sempre que $p(\bar{a}) \preceq b$. Seja $\widetilde{p} := p\hat{\ }p'$, temos $\mathcal{M} \vDash \theta(\bar{a}, \bar{A}^b)$ sempre que $\widetilde{p}(\bar{a}) \preceq b$. Logo temos $\mathcal{M}^* \vDash \theta(\bar{a}, \bar{A})$, i.e. $\mathcal{M}^* \vDash \exists G \preceq (tq'1)(tq'1) \forall x \preceq t \bar{\varphi}(x, \bar{a}, G, \bar{A})$.

<u>Em $\mathcal{M}^*$ é válido o axioma da contagem</u>.

Dados $\bar{a} \in M$ e $F \preceq t(\bar{a})$ tal que $F \in S$, queremos ver que $\mathcal{M}^* \vDash \exists C \preceq (tt11)(tt11)$ $\mathsf{Count}(C, F)$.

Seja $\varphi(\bar{u}, U) :\leftrightarrow \exists C \preceq (tt11)(tt11) \underbrace{[(\forall x \preceq t(\bar{u}) \ldots]}_{\mathsf{Count}(C,U)}$, que é uma fórmula $\Sigma_\infty^{1,b}$. Queremos ver que $\mathcal{M}^* \vDash \varphi(\bar{a}, F)$. Como $F \in S$ temos que $F^{t(\bar{a})} \in S_b$. Sabemos que $\mathcal{M} \vDash \exists C^{(tt11)(tt11)} \mathsf{Count}(C, F^{t(\bar{a})})$, i.e. $\mathcal{M} \vDash \varphi(\bar{a}, F^{t(\bar{a})})$, uma vez que $\mathcal{M}$ é modelo de TCA e portanto verifica o axioma da contagem.

Pelo FACTO, existe um termo $p(\bar{u})$ tal que $\mathcal{M}^* \vDash \varphi(\bar{a}, F) \Leftrightarrow \mathcal{M} \vDash \varphi(\bar{a}, F^b)$, sempre que $p(\bar{a}) \preceq b$.

Se $t(\bar{a}) \preceq p(\bar{a})$ temos que $F^{t(\bar{a})} = F^{p(\bar{a})} = F^b$ para todo $p(\bar{a}) \preceq b$, visto $F \preceq t(\bar{a})$. Logo, de $\mathcal{M} \vDash \varphi(\bar{a}, F^{t(\bar{a})})$ temos $\mathcal{M} \vDash \varphi(\bar{a}, F^b)$ com $p(\bar{a}) \preceq b$. Temos então que $\mathcal{M}^* \vDash \varphi(\bar{a}, F)$.

Se $p(\bar{a}) \preceq t(\bar{a})$, de $\mathcal{M} \vDash \varphi(\bar{a}, F^{t(\bar{a})})$, vem imediatamente $\mathcal{M}^* \vDash \varphi(\bar{a}, F)$.

Logo $\mathcal{M}^* \vDash \exists C \preceq (tt11)(tt11) \mathsf{Count}(C, F)$.

$\square$

A partir do lema anterior provamos o resultado de conservação que a seguir se enuncia.

Teorema 3.8 *Se* $\mathsf{TCA}^2 \vdash \forall \bar{x} \exists y \varphi(\bar{x}, y)$, *com* φ *uma fórmula* $\Sigma_\infty^{1,b}$, *então* $\mathsf{TCA} \vdash \forall \bar{x} \exists y \varphi(\bar{x}, y)$.

Note-se que φ não tem outras variáveis livres além de $\bar{x}$ e y, e todas as variáveis mudas estão limitadas, logo a fórmula φ da linguagem $\mathcal{L}_2$ pode ser vista como uma fórmula em $\mathcal{L}_2^b$.

Demonstração

Seja φ uma fórmula $\Sigma_\infty^{1,b}$ tal que $\mathsf{TCA}^2 \vdash \forall \bar{x} \exists y \varphi(\bar{x}, y)$. Suponhamos com vista a absurdo que $\mathsf{TCA} + \mathsf{B}^1\mathsf{\Sigma}_\infty^{\mathsf{1,b}} \nvdash \forall \bar{x} \exists y \varphi(\bar{x}, y)$. Então existe $\mathcal{M}$, modelo de $\mathsf{TCA} + \mathsf{B}^1\mathsf{\Sigma}_\infty^{\mathsf{1,b}}$ tal que $\mathcal{M} \nvDash \forall \bar{x} \exists y \varphi(\bar{x}, y)$, i.e. $\mathcal{M} \vDash \exists \bar{x} \forall y \neg \varphi(\bar{x}, y)$. Suponhamos que $|\mathcal{M}| = (M, S_b)$. Pelo Lema Principal, existe $S \subseteq \mathcal{P}(M)$ tal que $\mathcal{M}^*$, com domínio $|\mathcal{M}^*| = (M, S)$, é um modelo de TCA^2, tendo-se $S_b = \{X^a : X \in S \wedge a \in M\}$. Sejam $\bar{a}$ elementos de M tais que $\mathcal{M} \vDash \forall y \neg \varphi(\bar{a}, y)$. Dado $c \in M$ arbitrário, temos $\mathcal{M} \vDash \neg \varphi(\bar{a}, c)$. Visto $\neg \varphi$ ser uma fórmula $\Sigma_\infty^{1,b}$, temos que $\mathcal{M}^* \vDash \neg \varphi(\bar{a}, c)$. Assim prova-se que $\mathcal{M}^* \vDash \forall y \neg \varphi(\bar{a}, y)$, logo $\mathcal{M}^* \vDash \exists \bar{x} \forall y \neg \varphi(\bar{x}, y)$, o que é absurdo, uma vez que por hipótese $\mathsf{TCA}^2 \vdash \forall \bar{x} \exists y \varphi(\bar{x}, y)$ e $\mathcal{M}^*$ é modelo de TCA^2. Logo $\mathsf{TCA} + \mathsf{B}^1\mathsf{\Sigma}_\infty^{\mathsf{1,b}} \vdash \forall \bar{x} \exists y \varphi(\bar{x}, y)$.

Como a teoria $\mathsf{TCA} + \mathsf{B}^1\Sigma^{1,\mathsf{b}}_\infty$ é $\forall\exists\Sigma^{1,b}_\infty$-conservativa sobre TCA (proposição 3.13), temos que $\mathsf{TCA} \vdash \forall\bar{x}\exists y\varphi(\bar{x}, y)$.

$\square$

Logo, o resultado já provado para TCA e $\mathsf{TCA} + \mathsf{B}^1\Sigma^{1,\mathsf{b}}_\infty$, aplica-se também a TCA^2.

Teorema 3.9 *Se* $\mathsf{TCA}^2 \vdash \forall\bar{x}\exists y\varphi(\bar{x}, y)$, *com* φ *uma fórmula* $\Sigma^{1,b}_1$, *então existe uma função* $f \in \mathsf{FCH}$ *tal que, para todo* $\bar{\sigma} \in 2^{<\omega}$, *se tem* $\varphi(\bar{\sigma}, f(\bar{\sigma}))$.

Além disso, existem uma fórmula $\Delta^{1,b}_1$*-estendida,* θ*, em* TCA^2 *e um termo* $t(\bar{x})$*, tais que:*

1) $f(\bar{\sigma}) = \tau \leftrightarrow \theta(\bar{\sigma}, \tau)$

2) $\mathsf{TCA}^2 \vdash \forall\bar{x}\forall y(\theta(\bar{x}, y) \to \varphi(\bar{x}, y))$

3) $\mathsf{TCA}^2 \vdash \forall\bar{x}\exists y \preceq t\, \theta(\bar{x}, y)$

4) $\mathsf{TCA}^2 \vdash \forall\bar{x}\exists^1 y\, \theta(\bar{x}, y)$.

Demonstração

Suponhamos que $\mathsf{TCA}^2 \vdash \forall\bar{x}\exists y\varphi(\bar{x}, y)$ com φ uma fórmula $\Sigma^{1,b}_1$. Visto φ ser uma fórmula $\Sigma^{1,b}_1$, é em particular uma fórmula $\Sigma^{1,b}_\infty$, logo aplicando o teorema 3.8 temos que $\mathsf{TCA} \vdash \forall\bar{x}\exists y\varphi(\bar{x}, y)$. O resultado obtém-se imediatamente a partir do teorema 3.6.

$\square$

Uma vez mais, as funções demonstravelmente totais de TCA^2 com gráfico $\Sigma^{1,b}_1$, são exactamente as funções de FCH.

A segunda (e última) *teoria de análise* que apresentamos, resulta do enriquecimento de TCA^2 por meio de um novo axioma-esquema designado por reflexão Π^1_1-estrita e notado por FAN_0. Tal princípio — em notação numérica — foi já considerado no Capítulo 2.

Desta vez, a estratégia para demonstrarmos que este sistema formal — $\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN}_0$ — é conservativo (para fórmulas apropriadas) sobre TCA^2 e que portanto as suas funções demonstravelmente totais continuam a ser as da classe FCH, baseia-se na extensão de modelos pelo *método do forcing*.

A propósito da demonstração de resultados de conservação de WKL_0 sobre RCA_0 (veja resultado *standard* em [38] e posterior reformulação/desenvolvimento em [9]) é bem conhecida a técnica que permite estender um modelo contável de RCA_0 a um modelo de WKL_0 através de forcing. Iremos recorrer a um raciocínio desse género. Mais concretamente, a táctica por nós adoptada será (ainda que com uma notação ligeiramente diferente e adaptada ao nosso contexto) a apontada em [8], nas considerações finais, onde António Fernandes mostra a possibilidade de se estender um modelo contável de uma dada teoria (designada por $\mathsf{\Sigma}^{\mathsf{b}}_1$-$\mathsf{NIA}$ $+\nabla^b_1$-CA$+\Diamond$) a um modelo de uma teoria com FAN_0, usando a técnica do forcing.

Uma vez que toda a parte final deste capítulo se desenvolve em torno do *esquema* FAN_0:

$$\forall X \exists x \varphi(x, X) \to \exists u \forall X \exists x \preceq u \varphi(x, X),$$

com φ uma fórmula $\Sigma_{\infty}^{1,b}$ podendo ter outras variáveis livres além de x e X, mas onde u não ocorre; apresentamos de seguida algumas propriedades da reflexão Π_1^1-estrita, que (a menos do contexto base), podem ser encontradas em [8].

Para tal recordamos certos conceitos.

Definição 3.14 *Dada ϕ uma fórmula de $\mathcal{L}_2$:*

- *Dizemos que ϕ define uma* árvore infinita binária *(situação que denotamos por $Tree_{\infty}(\phi_x)$) se $\forall x \forall y(\phi(x) \wedge y \subseteq x \to \phi(y)) \wedge \forall u \exists x \equiv u\, \phi(x)$. Nestas condições a classe $\{x : \phi(x)\}$ diz-se uma* árvore infinita binária.

- *Dizemos que ϕ define um* caminho infinito *(situação que denotamos por $Path_{\infty}(\phi_x)$) se $Tree_{\infty}(\phi_x) \wedge \forall x \forall y(\phi(x) \wedge \phi(y) \to x \subseteq y \vee y \subseteq x)$.*

- *Dizemos que X é um* caminho infinito *(situação que denotamos por $Path_{\infty}(X)$) se se tem $Path_{\infty}((x \in X)_x)$, isto é, se X é uma árvore infinita binária e $\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \to x \subseteq y \vee y \subseteq x)$.*

O *lema fraco de König para árvores infinitas binárias definidas por fórmulas $\Sigma_{\infty}^{1,b}$*, notado por $\mathsf{\Sigma_{\infty}^{1,b}}$-$\mathsf{WKL}$, é o seguinte esquema:

$$Tree_{\infty}(\phi_x) \to \exists X(Path_{\infty}(X) \wedge \forall x(x \in X \to \phi(x))),$$

com ϕ uma fórmula $\Sigma_{\infty}^{1,b}$.

Proposição 3.14 $\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN}_0 \vdash \mathsf{\Sigma_{\infty}^{1,b}}$-$\mathsf{WKL}$

Demonstração

Seja $\mathcal{M} = (M, S)$ um modelo de $\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN}_0$ e seja ϕ uma fórmula $\Sigma_{\infty}^{1,b}$ tal que $\mathcal{M} \vDash Tree_{\infty}(\phi_x)$. Queremos provar que $\mathcal{M} \vDash \exists X(Path_{\infty}(X) \wedge \forall x(x \in X \to \phi(x)))$.

Suponhamos com vista a absurdo que $\mathcal{M} \vDash \forall X(\neg Path_{\infty}(X) \vee \exists x(x \in X \wedge \neg\phi(x)))$, isto é, $\mathcal{M} \vDash \forall X(\exists x \exists y(x \in X \wedge y \subseteq x \wedge y \notin X) \vee (\exists u \forall x \equiv u\, x \notin X) \vee \exists x \exists y(x \in X \wedge y \in X \wedge x \nsubseteq y \wedge y \nsubseteq x) \vee \exists x(x \in X \wedge \neg\phi(x)))$. Temos então que $\mathcal{M} \vDash \forall X \exists x \theta(x, X)$ com θ a fórmula $\exists y \subseteq x(x \in X \wedge y \notin X) \vee (\forall z \equiv x\, z \notin X) \vee \exists x' \preceq x \exists y \preceq x(x' \in X \wedge y \in X \wedge x' \nsubseteq y \wedge y \nsubseteq x') \vee (x \in X \wedge \neg\phi(x)))$. Dado que θ é uma fórmula $\Sigma_{\infty}^{1,b}$, pelo esquema FAN_0 temos que $\mathcal{M} \vDash \exists u \forall X \exists x \preceq u \theta(x, X)$.

Fixando tal u, seja $a \in M$ um elemento de comprimento $u1$ da árvore infinita definida por ϕ, i.e. $\phi(a) \wedge a \equiv u1$. Consideremos o seguinte conjunto de S: $R = \{y \in M : y \subseteq a\}$.

Por definição de u, sabemos que existe $x \preceq u$ tal que $\theta(x, R)$ o que é absurdo pois R é um ramo finito, de comprimento $u1$, na árvore definida por ϕ.

$\square$

Acabámos de demonstrar que se em dada teoria (com requisitos mínimos de compreensão) é válido o princípio FAN_0, é também válido o lema fraco de König para fórmulas

$\Sigma^{1,b}_\infty$. O recíproco é válido na presença do axioma de exponenciação, podendo tal recíproco ser, no nosso enquadramento, formulado como:

$$\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{exp} + \mathsf{\Sigma}^{1,b}_\infty\text{-}\mathsf{WKL} \vdash \mathsf{FAN}_0,$$

onde por exp denotamos o seguinte axioma, conhecido como *axioma de exponenciação*:

$$\forall x \exists w \forall z (z \preceq x \rightarrow z \subseteq^* w).^{22}$$

Fundamentalmente tal resultado deve-se ao facto de, na presença de exponenciação, os elementos de segunda ordem (conjuntos) poderem ser codificados por caminhos infinitos, e os conjuntos limitados poderem ser codificados por palavras, implicando que, qualquer quantificação limitada de segunda ordem possa ser substituída por uma quantificação limitada de primeira ordem.

A demonstração do resultado acima, ainda que num contexto ligeiramente diferente, pode ser vista em [8].

Terminamos esta breve digressão pelas propriedades do esquema FAN_0, mostrando que tal princípio de compacidade implica a validade do esquema de colecção limitada $\mathsf{B}^1\mathsf{\Sigma}^{1,b}_\infty$. Note-se que Fernando Ferreira provou, em [17], um resultado relacionado, embora em diferente contexto, que assegura que o esquema de colecção limitada $\mathsf{B\Sigma}^{b}_\infty$ é consequência de $\mathsf{\Sigma}^{b}_1\text{-}\mathsf{NIA} + \mathsf{\Sigma}^{b}_\infty\text{-}\mathsf{WKL}$.

Proposição 3.15 *Qualquer modelo de* FAN_0 *é modelo de* $\mathsf{B}^1\mathsf{\Sigma}^{1,b}_\infty$.

Demonstração

Seja $\mathcal{M}$ um modelo de FAN_0 e suponhamos que $\mathcal{M} \vDash \forall X \preceq t \exists y \varphi(y, X)$, com φ uma fórmula $\Sigma^{1,b}_\infty$. Queremos provar que $\mathcal{M} \vDash \exists z \forall X \preceq t \exists y \preceq z \varphi(y, X)$.

Seja $\widetilde{\varphi}(y, X) :\leftrightarrow \varphi(y, X^t)$. Obviamente $\widetilde{\varphi}$ é uma fórmula $\Sigma^{1,b}_\infty$ e temos que $\mathcal{M} \vDash \forall X \exists y \widetilde{\varphi}(y, X)$ logo, por FAN_0, $\mathcal{M} \vDash \exists z \forall X \exists y \preceq z \widetilde{\varphi}(y, X)$. Tal z verifica que $\mathcal{M} \vDash \forall X \preceq t$ $\exists y \preceq z \varphi(y, X)$. Logo $\mathcal{M}$ é modelo de $\mathsf{B}^1\mathsf{\Sigma}^{1,b}_\infty$.

$\square$

A caracterização das funções demonstravelmente totais de $\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN}_0$, que já adiantámos ser a classe FCH e ser conseguida recorrendo ao método do forcing, visto requerer um trabalho bastanto morado, será levada a cabo nas duas próximas subsecções, sendo a primeira dedicada à apresentação do *forcing* com que trabalhamos e à expansão 'parcial' de modelos e a segunda à caracterização, propriamente dita, de tais funções.

[22] Como observado em [16], outra forma de apresentar o axioma de exponenciação é através da sentença $\forall x \exists u (tally(u) \wedge lh(u) = x)$, onde $tally(u)$ abrevia $1 \times u = u$ e lh é a função definida por $lh(\epsilon) = \epsilon$, $lh(x0) = lh(x1) = S(lh(x))$.

3.4.2 Método do *forcing*

O *método do forcing* foi inventado por Paul Cohen na década de 60 para demonstrar a independência da hipótese do contínuo. Tal técnica foi posteriormente simplificada e generalizada, dada a sua aplicabilidade a outros contextos, sendo actualmente uma importante ferramenta na expansão de modelos.

Como temos em vista aplicar o método do forcing na construção de modelos de reflexão Π^1_1-estrita, vamos considerar o esquema FAN_0 nesta outra forma equivalente:

$$\forall u \exists X \forall x \preceq u \varphi(x, X) \to \exists X \forall x \varphi(x, X),$$

com φ uma fórmula $\Sigma^{1,b}_\infty$.

Dado $\mathcal{M} = (M, S)$ um modelo contável de TCA^2 e dada φ uma fórmula $\Sigma^{1,b}_\infty$ tal que $\mathcal{M} \vDash \forall u \exists X \forall x \preceq u \varphi(x, X)$, o método do forcing será usado para construir um modelo $\hat{\mathcal{M}} = (M, S \cup \{C\})$ onde sejam ainda válidos os esquemas de indução na notação e substituição para fórmulas $\Sigma^{1,b}_0$, o axioma da contagem, o esquema de colecção limitada $\mathsf{B}^1\Sigma^{1,b}_\infty$ e onde se tenha que $\hat{\mathcal{M}} \vDash \forall x \varphi(x, C)$.

Seja t_φ um termo de $\mathcal{L}_2$ tal que, dados $c \in M$ e $X \in S$, $\varphi(c, X) \leftrightarrow \varphi(c, X^b)$, sempre que $t_\varphi(c) \preceq b$. Tal termo existe pois φ é uma fórmula limitada.

Por comodidade passamos a designar esse termo por t e supomos, sem perda de generalidade, que $x \preceq t(x)$.

Seja $\mathcal{B}_t$ o conjunto constituído pelos pares $(x, X^{t(x)})$ tais que $x \in M$ e $X^{t(x)} \in S$. Seja $\leq$ a ordem parcial definida em $\mathcal{B}_t$ por:

$$(u, X^{t(u)}) \leq (v, Y^{t(v)}) \;\; sse \;\; u \leq_l v \wedge \underbrace{Y^{t(u)}}_{(Y^{t(v)})_{|_{t(u)}}} = X^{t(u)}.$$ [23]

Definição 3.15 *$P \subseteq \mathcal{B}_t$ diz-se uma* árvore infinita em $\mathcal{B}_t$ definida por uma fórmula $\Sigma^{1,b}_\infty$, *ϕ, se $P = \{(x, X^{t(x)}) : \phi(x, X^{t(x)})\}$ e verifica:*

1) $\forall x \exists X^{t(x)} (x, X^{t(x)}) \in P$

2) Se $(x, X^{t(x)}) \in P$ e $(y, Y^{t(y)}) \leq (x, X^{t(x)})$ então $(y, Y^{t(y)}) \in P$.

Proposição 3.16 *$T = \{(x, X^{t(x)}) \in \mathcal{B}_t : \forall u \preceq x \varphi(u, X^{t(x)})\}$ é uma árvore infinita em $\mathcal{B}_t$ (definida pela fórmula $\forall u \preceq x \varphi(u, X^{t(x)})$).*

Demonstração

Temos que $T \subseteq \mathcal{B}_t$. Vejamos que *1)* se verifica. Como por hipótese φ é uma fórmula tal que $\mathcal{M} \vDash \forall x \exists X \forall u \preceq x \varphi(u, X)$, fixemos x e tomemos X tal que $\forall u \preceq x \varphi(u, X)$. Por definição de t, sabemos que $\forall u \preceq x \varphi(u, X^{t(u)})$. Dado que $u \preceq x$ implica $t(u) \preceq t(x)$, temos $\forall u \preceq x \varphi(u, X^{t(x)})$. Logo $\forall x \exists X^{t(x)} (x, X^{t(x)}) \in T$.

[23] Denotamos por $X_{|_b}$ o conjunto $X \cap \{y : y \preceq b\}$ que também é representado por X^b.

Com vista a verificarmos *2)* suponhamos que $(x, X^{t(x)}) \in T$ e $(y, Y^{t(y)}) \leq (x, X^{t(x)})$. Queremos provar que $(y, Y^{t(y)}) \in T$.

De $(x, X^{t(x)}) \in T$ temos que $\forall u \preceq x\varphi(u, X^{t(x)})$. Como $(y, Y^{t(y)}) \leq (x, X^{t(x)})$ vem que $y \leq_l x \wedge X^{t(y)} = Y^{t(y)}$. Logo $\forall u \preceq y\varphi(u, X^{t(x)})$ e por definição de t, $\forall u \preceq y\varphi(u, X^{t(u)})$. Novamente porque $u \preceq y$ implica $t(u) \preceq t(y)$, temos que $\forall u \preceq y\varphi(u, X^{t(y)})$, logo $\forall u \preceq y$ $\varphi(u, Y^{t(y)})$. Portanto $(y, Y^{t(y)}) \in T$.

$\square$

Seja $\mathbb{P}_t$ o *conjunto* das árvores infinitas em $\mathcal{B}_t$ definidas por fórmulas $\Sigma_\infty^{1,b}$. Consideremos $\leq$, a ordem parcial em $\mathbb{P}_t$, definida por:

$$P \leq Q \ \ sse \ \ P \subseteq Q.$$

A *noção de forcing* que iremos considerar é $(\mathbb{P}_t, \leq, 1)$, notando por 1 o elemento máximo, i.e. a árvore infinita em $\mathcal{B}_t$ definida pela fórmula $x = x$. A *linguagem de forcing* será denotada por $\mathcal{L}_{forc}$ e consistirá em $\mathcal{L}_2 \cup \{\hat{a} : a \in M\} \cup \{\hat{A} : A \in S\} \cup \{\hat{C}\}$. Devemos encarar os $\hat{a}$'s, $\hat{A}$'s e $\hat{C}$ como *novas constantes*, sendo as constantes $\hat{a}$'s e $\hat{A}$'s designadas por *nomes canónicos*, visto descreverem elementos que já se encontram no modelo, ao passo que $\hat{C}$ é um *nome não canónico*.

Denotamos por $\hat{t}, \hat{s}, \ldots$ termos fechados (i.e. sem variáveis) da linguagem de forcing.

A relação de forcing, denotada por $\Vdash$ é definida do seguinte modo: sendo P uma condição de forcing (ou seja, um elemento de $\mathbb{P}_t$) e θ uma sentença atómica de $\mathcal{L}_{forc}$

$$P \Vdash \theta :\Leftrightarrow \begin{cases} \theta' & \text{se } \hat{C} \text{ não ocorre em } \theta \\ \exists x \forall X^{t(x)}((x, X^{t(x)}) \in P \rightarrow s \in X^{t(x)}) & \text{se } \theta \text{ é da forma } \hat{s} \in \hat{C}, \end{cases}$$

onde θ' se obtém de θ substituindo os $\hat{a}$'s por a's e os $\hat{A}$'s por A's.

$P \Vdash \theta$ lê-se 'P força θ' e tal verifica-se se for verdade em $\mathcal{M}$.

Proposição 3.17 *A relação $\Vdash$ atrás definida é uma noção de* forcing fraco*, isto é, dados P uma condição de forcing e θ uma sentença atómica da linguagem de forcing, tem-se:*

1) *a)* $P \Vdash \hat{t} = \hat{t}$

b) Se $P \Vdash \hat{t} = \hat{s}$ *então* $P \Vdash \hat{s} = \hat{t}$

c) Se $P \Vdash \hat{t} = \hat{s}$ *e* $P \Vdash \hat{s} = \hat{r}$ *então* $P \Vdash \hat{t} = \hat{r}$

2) Se $P \Vdash \hat{t} = \hat{s}$ *e* $P \Vdash \hat{s} \in \hat{X}$ *então* $P \Vdash \hat{t} \in \hat{X}$*, com* $\hat{X}$ *um nome canónico (de segunda ordem) ou não canónico*

3) Sendo f um símbolo funcional n-ário então

Se $(\bigwedge_{i=1}^{n} P \Vdash \hat{t}_i = \hat{s}_i)$ *então* $P \Vdash f(\hat{t}_1, \ldots, \hat{t}_n) = f(\hat{s}_1, \ldots, \hat{s}_n)$

4) Sendo R um símbolo relacional n-ário então

Se $((\bigwedge_{i=1}^{n} P \Vdash \hat{t}_i = \hat{s}_i) \wedge P \Vdash R(\hat{t}_1, \ldots, \hat{t}_n))$ *então* $P \Vdash R(\hat{s}_1, \ldots, \hat{s}_n)$

5) A relação é monótona, isto é, se $P \Vdash \theta$ *e* $Q \leq P$ *então* $Q \Vdash \theta$

6) Se $(\forall Q \leq P)(\exists R \leq Q) R \Vdash \theta$ *então* $P \Vdash \theta$.

Demonstração

De *1)* a *4)* é imediato.

Vejamos que a relação é monótona. O caso em que $\hat{C}$ não ocorre em θ é trivial. Se θ é da forma $\hat{s} \in \hat{C}$, de $P \Vdash \theta$ temos que $\exists x \forall X^{t(x)}((x, X^{t(x)}) \in P \rightarrow \hat{s} \in X^{t(x)})$, donde (visto $Q \leq P$) fixando tal x, $\forall X^{t(x)}((x, X^{t(x)}) \in Q \rightarrow \hat{s} \in X^{t(x)})$. Logo, $Q \Vdash \theta$.

Quanto à alínea *6)*, suponhamos que $(\forall Q \leq P)(\exists R \leq Q) R \Vdash \theta$. Queremos provar que $P \Vdash \theta$. Uma vez mais a única situação não trivial é quando θ é da forma $\hat{s} \in \hat{C}$. Suponhamos, com vista a absurdo, que $P \nVdash \theta$, isto é,

$$(\star)\ \forall x \exists X^{t(x)}((x, X^{t(x)}) \in P \wedge \hat{s} \notin X^{t(x)}).$$

Seja $S = \{(x, X^{t(x)}) : (x, X^{t(x)}) \in P \wedge \hat{s} \notin X^{t(x)}\}$. Vejamos que S é uma árvore infinita em $\mathcal{B}_t$ definida por uma fórmula $\Sigma_\infty^{1,b}$.

A fórmula $(x, X^{t(x)}) \in P \wedge \hat{s} \notin X^{t(x)}$[24] enquadra-se na complexidade permitida, isto é, é uma fórmula $\Sigma_\infty^{1,b}$. Por $(\star)$, é imediato que $\forall x \exists X^{t(x)}(x, X^{t(x)}) \in S$. Resta, portanto, provar que se $(x, X^{t(x)}) \in S$ e $(y, Y^{t(y)}) \leq (x, X^{t(x)})$ então $(y, Y^{t(y)}) \in S$. De $(x, X^{t(x)}) \in S$ temos que $(x, X^{t(x)}) \in P$. Como P é uma árvore e $(y, Y^{t(y)}) \leq (x, X^{t(x)})$, vem que $(y, Y^{t(y)}) \in P$. De $(x, X^{t(x)}) \in S$ resulta também que $\hat{s} \notin X^{t(x)}$. Como todos os elementos de $Y^{t(y)}$ estão em $X^{t(x)}$ temos que $\hat{s} \notin Y^{t(y)}$. Concluimos assim que $(y, Y^{t(y)}) \in S$. Portanto S é uma árvore infinita.

Como $S \subseteq P$, temos $S \leq P$. Visto, por hipótese, $(\forall Q \leq P)(\exists R \leq Q) R \Vdash \theta$, em particular sabemos que $(\exists R \leq S) R \Vdash \theta$, isto é, $\exists R \leq S$ tal que $\exists x \forall X^{t(x)}((x, X^{t(x)}) \in R \rightarrow \hat{s} \in X^{t(x)})$.

Fixemos R e x nessas condições.

Como R é árvore, sabemos que podemos tomar $X^{t(x)}$ tal que $(x, X^{t(x)}) \in R$. Para esse $X^{t(x)}$ temos $\hat{s} \in X^{t(x)}$, o que é absurdo pois, uma vez que $R \leq S$ temos que $R \subseteq S$ e assim sendo, $(x, X^{t(x)}) \in S$, o que implica que $\hat{s} \notin X^{t(x)}$.

Portanto, $P \Vdash \theta$.

□

A relação de forcing estende-se a todas as sentenças de $\mathcal{L}_{forc}$ (veja [1], [8]), do modo usual que se apresenta de seguida:

a) $P \Vdash \neg\varphi$ *sse* $(\forall Q \leq P) \neg(Q \Vdash \varphi)$

[24] Sendo P uma árvore infinita em $\mathcal{B}_t$ definida por uma fórmula $\Sigma_\infty^{1,b}$, ϕ, $(x, X^{t(x)}) \in P$ pode ser expresso por $\phi(x, X^{t(x)})$.

b) $P \Vdash \varphi \wedge \psi$ *sse* $P \Vdash \varphi \wedge P \Vdash \psi$

c) $P \Vdash \varphi \vee \psi$ *sse* $\forall Q \leq P \exists R \leq Q (R \Vdash \varphi \vee R \Vdash \psi)$

d) $P \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ *sse* $\forall Q \leq P (Q \Vdash \varphi \rightarrow \exists R \leq Q \; R \Vdash \psi)$

e) $P \Vdash \forall x \varphi(x)$ *sse* para todo o nome de primeira ordem $\hat{x}$ se tem $P \Vdash \varphi(\hat{x})$

f) $P \Vdash \forall X \varphi(X)$ *sse* para todo o nome de segunda ordem $\hat{X}$ (que pode ou não ser canónico) se tem $P \Vdash \varphi(\hat{X})$

g) $P \Vdash \exists x \varphi(x)$ *sse* $\forall Q \leq P \exists R \leq Q \exists \hat{x} R \Vdash \varphi(\hat{x})$

h) $P \Vdash \exists X \varphi(X)$ *sse* $\forall Q \leq P \exists R \leq Q \exists \hat{X} R \Vdash \varphi(\hat{X})$.

Dado que $(\mathbb{P}_t, \leq, \Vdash)$ é uma noção de forcing fraco e a relação de forcing se encontra definida para todas as sentenças de $\mathcal{L}_{forc}$ segundo o esquema anterior, temos o seguinte resultado.

Lema 3.5 *Dadas duas quaisquer condições de forcing P, $Q \in \mathbb{P}_t$ e θ uma sentença qualquer da linguagem de forcing, temos que:*

1) Se $P \Vdash \theta$ e $Q \leq P$ então $Q \Vdash \theta$

2) $P \Vdash \theta$ sse $P \Vdash \neg\neg\theta$ (ou equivalentemente sse $(\forall Q \leq P)(\exists R \leq Q) R \Vdash \theta$).

Observação 3.9 *Pode provar-se que se $\phi(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n, \hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_m)$ é uma sentença de $\mathcal{L}_{forc}$ em que $\hat{C}$ não ocorre e sem quantificações de segunda ordem, então para qualquer $P \in \mathbb{P}_t$ tem-se: $P \Vdash \phi(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n, \hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_m)$ sse $\mathcal{M} \vDash \phi(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m)$.*

Relembremos agora alguns conceitos relacionados com *ordens parciais*.

Definição 3.16 *Dada $(\mathbb{P}_t, \leq)$ uma ordem parcial, um subconjunto $D \subseteq \mathbb{P}_t$ diz-se* denso *(em $\mathbb{P}_t$) se $(\forall Q \in \mathbb{P}_t)(\exists P \in D)(P \leq Q)$.*

Definição 3.17 *Dados $(\mathbb{P}_t, \leq)$ uma noção de forcing, $G \subseteq \mathbb{P}_t$ e $\mathcal{D}$ uma família de conjuntos densos em $\mathbb{P}_t$, dizemos que G é um* filtro $\mathcal{D}$-genérico *se*

1) G é um filtro em $\mathbb{P}_t$, isto é:

a) $1 \in G$

b) $(\forall P, Q \in G)(\exists R \in G)(R \leq P \wedge R \leq Q)$

c) $(\forall P \in \mathbb{P}_t)(\forall Q \in G)(Q \leq P \rightarrow P \in G)$ *e*

2) $(\forall D \in \mathcal{D})(G \cap D \neq \varnothing)$.

O próximo resultado que apresentamos — devido a Rasiowa e Sikorski — é bem conhecido e desempenha um papel essencial no que se segue pois garante, mediante certas condições, a existência de filtros $\mathcal{D}$-genéricos. Omitiremos a sua demonstração, visto poder ser encontrada em várias publicações, por exemplo em [8], página 17.

Lema 3.6 *Se $\mathcal{D}$ é uma família contável de conjuntos densos em $\mathbb{P}_t$ então, para qualquer $P \in \mathbb{P}_t$, existe um filtro $\mathcal{D}$-genérico, G, tal que $P \in G$.*

Como $\mathcal{M}$ é um modelo contável temos que $\mathcal{L}_{forc}$ é uma linguagem contável. Consideremos uma linguagem que contenha $\mathcal{L}_{forc}$ e que além das variáveis de primeira e segunda ordem contenha ainda novas variáveis que denotem os elementos de $\mathbb{P}_t$ e novas constantes para cada uma dessas árvores. Trata-se ainda de uma linguagem contável uma vez que os elementos de $\mathbb{P}_t$ são definíveis por fórmulas. Esta linguagem alargada estende a linguagem de $\mathcal{M}$ e descreve $\mathbb{P}_t$ e $\Vdash$.

Se pensarmos nos subconjuntos densos em $\mathbb{P}_t$ que são definíveis (nessa linguagem) (i.e. exprimíveis por meio de uma fórmula da linguagem alargada) temos uma família contável. Assim sendo, o lema anterior garante que, para qualquer $P \in \mathbb{P}_t$ existe $G \subseteq \mathbb{P}_t$ um filtro que intersecta todos os densos em $\mathbb{P}_t$ definíveis na linguagem alargada e tal que $P \in G$. Nestas condições dizemos que *G é um filtro genérico que contém P*.

Considerando a fórmula φ fixada no início desta subsecção, seja $T = \{(x, X^{t(x)}) \in \mathcal{B}_t : \forall u \preceq x \varphi(u, X^{t(x)})\}$.

Como vimos na proposição 3.16, $T \in \mathbb{P}_t$. Logo existe $G \subseteq \mathbb{P}_t$ um filtro genérico que contém T. De agora em diante, ao mencionarmos T ou G estamos a referirmos respectivamente à *árvore* ou ao *filtro acima.*

Consideremos a seguinte interpretação dos nomes de $\mathcal{L}_{forc}$, i_G, determinada pelo filtro G:

$$i_G(\hat{a}) = a \text{ se } a \in M$$

$$i_G(\hat{A}) = A \text{ se } A \in S$$

$$i_G(\hat{C}) = \{x \in M : (\exists P \in G) P \Vdash x \in \hat{C}\} = C.$$

Seja $\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}[G] = (M, S \cup \{C\})$ a estrutura na linguagem $\mathcal{L}_{forc}$ com as interpretações habituais (veja [8], página 21), que é usualmente designada por *extensão genérica de $\mathcal{M}$ determinada por G*. Para esta estrutura, dado que $(\mathbb{P}_t, \leq, \Vdash)$ é uma noção de forcing fraco, é válido o seguinte resultado[25].

[25]Este resultado essencial do forcing encontra-se demonstrado, por exemplo, em [8], página 22. Notar que é válido não apenas para este filtro particular G que contém T, mas para qualquer filtro genérico H, substituindo-se no seu enunciado $\mathcal{M}[G]$ pela extensão genérica $\mathcal{M}[H]$, C por $i_H(\hat{C})$ e $\exists P \in G$ por $\exists P \in H$. Idêntica observação é válida para a proposição seguinte.

Lema 3.7 (Teorema do forcing) *Para quaisquer fórmula* θ *de* $\mathcal{L}_2$, $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n$, $\hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_m$ *nomes canónicos e* $\hat{C}$ *nome não canónico de* $\mathcal{L}_{forc}$,

$$\mathcal{M}[G] \vDash \theta(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m, C) \text{ sse } (\exists P \in G) P \Vdash \theta(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n, \hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_m, \hat{C}).$$

Relembremos que o nosso objectivo era, partindo de $\mathcal{M}$ e φ, construir (pelo método do forcing) um modelo $\hat{\mathcal{M}}$ que verificasse determinadas condições. Após a construção de $\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}[G]$ que acabámos de efectuar, resta provar que este modelo se encontra nas condições pretendidas, i.e. verifica os esquemas de indução na notação e substituição para fórmulas $\Sigma_0^{1,b}$, o axioma da contagem, o esquema de colecção limitada $\mathsf{B}^1\Sigma_\infty^{1,\mathsf{b}}$ e é tal que $\hat{\mathcal{M}} \vDash \forall x \varphi(x, C)$.

Comecemos por demonstrar o seguinte resultado.

Proposição 3.18 *Se* $x \in M$ *e* $P \in G$ *então* $(x, C^{t(x)}) \in P$, *e traduzimos tal facto dizendo que* C *é a união de uma* $\leq_t$*-cadeia infinita ao longo de* P.

Demonstração

Tomemos $x \in M$ e $P \in G$. Fixemos σ, arbitrário, tal que $\sigma \in C^{t(x)}$. Em particular $\sigma \in C$, logo existe $V \in G$ tal que $V \Vdash \hat{\sigma} \in \hat{C}$.

Pode provar-se que, para cada $n \in M$, o conjunto D_n das condições de forcing que possuem um único elementos no nível n, isto é, tais que no nível n existe apenas um $N^{t(n)} \in S$ tal que $(n, N^{t(n)})$ está nessa condição de forcing, é definível na linguagem alargada e denso.

Justifiquemos o facto de ser denso. Dada A uma árvore qualquer em $\mathbb{P}_t$ queremos ver que existe A' uma árvore em D_n tal que $A' \subseteq A$.

Seja $(n, N^{t(n)}) \in A$ tal que existe um caminho infinito ao longo de A passando por $(n, N^{t(n)})$, i.e. $\forall y \geq_l n \exists (y, Y^{t(y)}) \in A$ tal que $(n, N^{t(n)}) \leq (y, Y^{t(y)})$. É possível considerar tal $(n, N^{t(n)})$ por colecção limitada, pois se em $\mathcal{M}$ não existisse tal $(n, N^{t(n)})$ tinhamos que $\mathcal{M} \vDash \forall X^{t(n)}[(n, X^{t(n)}) \in A \rightarrow \exists u \geq_l n \forall U^{t(u)}((u, U^{t(u)}) \geq (n, X^{t(n)}) \rightarrow (u, U^{t(u)}) \notin A)]$. Ora, por colecção limitada em $\mathcal{M}$, $\exists z \forall X^{t(n)}((n, X^{t(n)}) \in A \rightarrow \exists u \preceq z \forall U^{t(u)}(u \geq_l n \wedge (u, U^{t(u)}) \geq (n, X^{t(n)}) \rightarrow (u, U^{t(u)}) \notin A))$, o que é absurdo pois A é uma árvore, logo tem que ter elementos em todos os níveis, inclusive nos níveis z e superiores.

Logo, definindo A' como sendo $A' := \{(x, X^{t(x)}) \in A : (x \leq_l n \rightarrow (x, X^{t(x)}) \leq (n, N^{t(n)})) \wedge (n \leq_l x \rightarrow (n, N^{t(n)}) \leq (x, X^{t(x)}))\}$, verificamos que tal árvore satisfaz o pretendido.

E portanto, D_n é denso em $\mathbb{P}_t$.

Dado que G é um filtro genérico, temos que $G \cap D_x \neq \varnothing$. Seja $Q \in G \cap D_x$. Tomemos $R \in G$ tal que $R \leq P$, $R \leq Q$ e $R \leq V$.

Como $R \leq Q$, R só tem um elemento no nível x, digamos $(x, N^{t(x)})$. Como $R \leq V$, $R \Vdash \hat{\sigma} \in \hat{C}$, logo existe um nível n em que todos os elementos de R nesse nível contêm σ. Como $\sigma \preceq t(x)$, facilmente se verifica que $\sigma \in N^{t(x)}$.

Logo, qualquer elemento de $C^{t(x)}$ está em $N^{t(x)}$.

Como $R \in G$ e o único elemento dessa árvore no nível x é $(x, N^{t(x)})$, R força a que qualquer elemento de $N^{t(x)}$ esteja em C. Logo, todo o elemento de $N^{t(x)}$ está em C e, portanto, também em $C^{t(x)}$. Ou seja, $N^{t(x)}$ e $C^{t(x)}$ são o mesmo conjunto.

Uma vez que $R \leq P$, temos $(x, N^{t(x)}) \in P$, logo $(x, C^{t(x)}) \in P$.

$\square$

Da anterior proposição resulta imediatamente o seguinte corolário.

Corolário 3.1 *Para todo $x \in M$, $(x, C^{t(x)}) \in T$.*

Observação 3.10 *Dado $a \in M$, $C^{t(a)} \in S$, logo também $C^a \in S$. Assim sendo, a observação 3.9 pode ser estendida a toda a sentença ϕ de $\mathcal{L}_{forc}$ em que $\hat{C}$ não ocorra e em que todas as quantificações de segunda ordem sejam limitadas, i.e. sendo $\phi(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n, \hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_m)$ uma sentença nas condições anteriores, então para qualquer $P \in \mathbb{P}_t$ tem-se: $P \Vdash \phi(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n, \hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_m)$ sse $\mathcal{M} \vDash \phi(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m)$.*

Proposição 3.19 *Sendo $\theta(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n, \hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_m, \hat{C})$ uma sentença $\Sigma_\infty^{1,b}$ de $\mathcal{L}_{forc}$, existe um termo s, tal que*

$$\mathcal{M}[G] \vDash \theta(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m, C) \text{ sse } \mathcal{M} \vDash \theta(a_1, \ldots, a_n, A_1^b, \ldots, A_m^b, C^b),$$

sempre que $s(a_1, \ldots, a_n) \preceq b$.

Demonstração

Dado θ nas condições acima, sabemos que existe s tal que

$$\mathcal{M}[G] \vDash \theta(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m, C) \text{ sse } \mathcal{M}[G] \vDash \theta(a_1, \ldots, a_n, A_1^b, \ldots, A_m^b, C^b),$$

sempre que $s(a_1, \ldots, a_n) \preceq b$.

Pelo teorema do forcing, a última asserção é equivalente a existir $P \in G$ tal que

$$P \Vdash \theta(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n, \hat{A}_1^b, \ldots, \hat{A}_m^b, \hat{C}^b),$$

o que, pela observação 3.10, é equivalente a $\mathcal{M} \vDash \theta(a_1, \ldots, a_n, A_1^b, \ldots, A_m^b, C^b)$.

$\square$

Mostremos, condição a condição, que o modelo $\mathcal{M}[G]$ verifica o pretendido.

Proposição 3.20 $\mathcal{M}[G] \vDash \forall x \varphi(x, C)$

Demonstração

Fixemos $x \in M$ arbitrário. Temos $\varphi(x, C) \leftrightarrow \varphi(x, C^{t(x)})$. Pelo que já provámos acerca de C, $(x, C^{t(x)}) \in T$, logo $\forall y \preceq x \varphi(y, C^{t(x)})$. Em particular temos $\varphi(x, C^{t(x)})$. Logo verifica-se $\varphi(x, C)$.

$\square$

Proposição 3.21 *$\mathcal{M}[G] \vDash \theta(\epsilon) \wedge \forall x(\theta(x) \rightarrow \theta(x0) \wedge \theta(x1)) \rightarrow \forall x \theta(x)$, com θ uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$.*

Demonstração
Uma vez que $\mathcal{M}[G] \vDash \theta(\epsilon) \wedge \forall x(\theta(x) \rightarrow \theta(x0) \wedge \theta(x1)) \rightarrow \forall x \theta(x)$ é equivalente a

$$\mathcal{M}[G] \vDash \forall y[\underbrace{\theta(\epsilon) \wedge \forall x \prec y(\theta(x) \rightarrow \theta(x0) \wedge \theta(x1)) \rightarrow \forall x \preceq y \theta(x)}_{\theta'}],$$

e tendo em conta que θ pode ter outras variáveis livres além de x, vamos provar que

$$\mathcal{M}[G] \vDash \forall y \forall \bar{x} \forall \bar{X} \theta'(y, \bar{x}, \bar{X}).$$

Fixemos y, $\bar{x}$ e $\bar{X}$ (note que C é uma possibilidade para os elementos de segunda ordem). Como θ' é uma fórmula $\Sigma_\infty^{1,b}$, pela proposição 3.19, existe um termo s tal que $\mathcal{M}[G] \vDash \theta'(y, \bar{x}, \bar{X})$ é equivalente a $\mathcal{M} \vDash \theta'(y, \bar{x}, \bar{X}^b)$, sempre que $s(y, \bar{x}) \preceq b$. A última asserção é válida por indução na notação em $\mathcal{M}$.

□

Proposição 3.22 *$\mathcal{M}[G] \vDash \forall x \preceq t(\bar{a}) \exists F \preceq q \theta(x, F) \rightarrow \exists G \preceq (tq'1)(tq'1) \forall x \preceq t(\bar{a}) \bar{\theta}(x, G)$, com θ uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$, t um termo onde x não ocorre, $q' := q[t/x]$ e $\bar{\theta}$ se obtém de θ substituindo todas as ocorrências de $v \in F$ por $\langle x, v \rangle \in G$.*

Demonstração
Imediata pela proposição 3.19, uma vez que se trata de uma fórmula $\Sigma_\infty^{1,b}$ e $\mathcal{M}$, sendo modelo de TCA^2, é modelo de substituição para fórmulas dessa complexidade.

□

Proposição 3.23 *O axioma da contagem é válido em $\mathcal{M}[G]$.*

Demonstração
Imediata pela proposição 3.19, uma vez que o axioma da contagem se exprime por intermédio de uma fórmula $\Sigma_\infty^{1,b}$ e $\mathcal{M}$, sendo modelo de TCA^2, é modelo do axioma da contagem.

□

Resta-nos verificar que $\mathcal{M}[G]$ é modelo de colecção limitada. Para tal necessitamos de alguns resultados auxiliares.

Como $(\mathbb{P}_t, \leq, \Vdash)$ é uma noção de forcing fraco, é válido o seguinte resultado.

Lema 3.8 *Seja $P \in \mathbb{P}_t$ e θ uma fórmula de $\mathcal{L}_{forc}$.*

$$P \Vdash \theta(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n, \hat{A}_1, \ldots, \hat{A}_m, \hat{C}) \text{ sse } \forall H \text{ filtro genérico que contenha } P,$$
$$\mathcal{M}[H] \vDash \theta(a_1, \ldots, a_n, A_1, \ldots, A_m, i_H(\hat{C})).$$

A demonstração *standard* pode encontrar-se em [8], páginas 22-23.

Lema 3.9 *Seja $\theta(x, X)$ uma fórmula $\Sigma_\infty^{1,b}$ e $P \in \mathbb{P}_t$.*

$$P \Vdash \exists x \theta(x, \hat{C}) \text{ sse } \exists m \forall X^{t(m)}((m, X^{t(m)}) \in P \rightarrow \exists x \preceq m(s(x) \preceq t(m) \wedge \theta(x, X^{t(m)}))),$$

com s um termo tal que $\theta(x, X) \leftrightarrow \theta(x, X^b)$, sempre que $s(x) \preceq b$.

Demonstração

Consideremos, por hipótese, que

$$(\star)\ \exists m \forall X^{t(m)}((m, X^{t(m)}) \in P \rightarrow \exists x \preceq m(s(x) \preceq t(m) \wedge \theta(x, X^{t(m)}))).$$

Suponhamos, com vista a absurdo, que $P \nVdash \exists x \theta(x, \hat{C})$. Pelo lema 3.8, existe um filtro genérico H que contém P, tal que $\mathcal{M}[H] \nvDash \exists x \theta(x, i_H(\hat{C}))$ ou seja $\mathcal{M}[H] \vDash \forall x \neg \theta(x, i_H(\hat{C}))$. Por $(\star)$, em $\mathcal{M}$, existe m e existe $x \preceq m$ tal que $s(x) \preceq t(m) \wedge \theta(x, i_H(\hat{C})^{t(m)})$. Porém pelo já visto, para esse x, $\mathcal{M}[H] \vDash \neg \theta(x, i_H(\hat{C}))$ e como $s(x) \preceq t(m)$ temos $\mathcal{M}[H] \vDash \neg \theta(x, i_H(\hat{C})^{t(m)})$. Logo, dado que $i_H(\hat{C})^{t(m)} \in S$ e θ é uma fórmula limitada, temos $\mathcal{M} \vDash \neg \theta(x, i_H(\hat{C})^{t(m)})$ o que é absurdo.

Reciprocamente admitamos que $P \Vdash \exists x \theta(x, \hat{C})$. Suponhamos, com vista a absurdo, que

$$(\star\star)\ \forall m \exists X^{t(m)}((m, X^{t(m)}) \in P \wedge \forall x \preceq m(s(x) \preceq t(m) \rightarrow \neg \theta(x, X^{t(m)}))).$$

Seja $A = \{(m, X^{t(m)}) : (m, X^{t(m)}) \in P \wedge \forall x \preceq m(s(x) \preceq t(m) \rightarrow \neg \theta(x, X^{t(m)}))\}$. Vejamos que A é uma árvore.

Que $\forall m \exists X^{t(m)}(m, X^{t(m)}) \in A$ é imediato por $(\star\star)$. Resta provar que se $(m, X^{t(m)}) \in A$ e $(y, Y^{t(y)}) \leq (m, X^{t(m)})$ então $(y, Y^{t(y)}) \in A$. De $(m, X^{t(m)}) \in A$ temos que $(m, X^{t(m)}) \in P$ e como P é uma árvore e $(y, Y^{t(y)}) \leq (m, X^{t(m)})$ temos que $(y, Y^{t(y)}) \in P$. De $(m, X^{t(m)}) \in A$ resulta também que

$$(\$)\ \forall x \preceq m(s(x) \preceq t(m) \rightarrow \neg \theta(x, X^{t(m)})).$$

Seja $x \preceq y$ tal que $s(x) \preceq t(y)$. Como $y \preceq m$ temos que $x \preceq m$ e $s(x) \preceq t(m)$. Por $(\$)$ temos que $\neg \theta(x, X^{t(m)})$ e como $s(x) \preceq t(y)$ temos $\neg \theta(x, X^{t(y)})$ e portanto $\neg \theta(x, Y^{t(y)})$. Provámos assim que $\forall x \preceq y(s(x) \preceq t(y) \rightarrow \neg \theta(x, Y^{t(y)}))$, o que permite concluir que $(y, Y^{t(y)}) \in A$ e portanto A é uma árvore.

Ora $A \leq P$ e como $P \Vdash \exists x \theta(x, \hat{C})$ temos que $A \Vdash \exists x \theta(x, \hat{C})$. Pelo lema 3.8, dado H um filtro genérico que contenha A, $\mathcal{M}[H] \vDash \exists x \theta(x, i_H(\hat{C}))$. Seja $a \in M$ tal que $\mathcal{M}[H] \vDash \theta(a, i_H(\hat{C}))$. Seja m tal que $a \preceq m$ e $s(a) \preceq t(m)$. Temos $\mathcal{M}[H] \vDash \theta(a, i_H(\hat{C})^{t(m)})$. Como $i_H(\hat{C})$ é a união de uma $\leq_t$-cadeia ao longo de A, $(m, i_H(\hat{C})^{t(m)}) \in A$. Visto $\hat{C}$ não ocorrer em θ e esta ser uma fórmula limitada temos $\mathcal{M} \vDash \theta(a, i_H(\hat{C})^{t(m)})$. Chegamos a um absurdo pois de $(m, i_H(\hat{C})^{t(m)}) \in A$, de $a \preceq m$ e $s(a) \preceq t(m)$ resulta que $\neg \theta(a, i_H(\hat{C})^{t(m)})$.

Logo $\exists m \forall X^{t(m)}((m, X^{t(m)}) \in P \rightarrow \exists x \preceq m(s(x) \preceq t(m) \wedge \theta(x, X^{t(m)})))$.

□

Do lema anterior extrai-se o seguinte resultado, cuja demonstração segue imediatamente do estudo efectuado.

Corolário 3.2 *'P força uma sentença da forma $\exists x\phi$', com ϕ uma fórmula $\Sigma_\infty^{1,b}$*[26]*, exprime-se em $\mathcal{M}$ por meio de uma fórmula $\exists\Sigma_\infty^{1,b}$.*

Proposição 3.24 *Em $\mathcal{M}[G]$ é válido o esquema de colecção limitada $\mathsf{B}^1\mathsf{\Sigma}_\infty^{1,b}$. Isto é, $\mathcal{M}[G] \models \forall X \preceq p\exists y\theta(y,X) \to \exists z\forall X \preceq p\exists y \preceq z\theta(y,X)$, sendo θ uma fórmula $\Sigma_\infty^{1,b}$.*

Demonstração

Seja θ uma fórmula $\Sigma_\infty^{1,b}$. Se C não ocorre em θ, temos o pretendido, usando a observação 3.10, o teorema do forcing e notando que o esquema $\mathsf{B}^1\mathsf{\Sigma}_\infty^{1,b}$ é válido em $\mathcal{M}$. Consideremos então que C ocorre em θ.

Seja s um termo tal que $\theta(y,X,C^b) \leftrightarrow \theta(y,X,C)$, sempre que $s(y) \preceq b$. Suponhamos que $\mathcal{M}[G] \models \forall X \preceq p\exists y\theta(y,X,C)$. Queremos provar que $\mathcal{M}[G] \models \exists z\forall X \preceq p\exists y \preceq z\, \theta(y,X,C)$. Pelo teorema do forcing temos que $(\exists P \in G)P \Vdash \forall X \preceq p\exists y\theta(y,X,\hat{C})$. Consideremos uma árvore P nessas condições. Pode ver-se que, para todo o nome de segunda ordem limitado por p, $\hat{X}^p$, $\underbrace{P \Vdash \exists y\theta(y,\hat{X}^p,\hat{C})}_{\text{fórmula } \exists\Sigma_\infty^{1,b}\text{, por C.3.2}}$. Logo, pelo lema 3.9,

$$\mathcal{M} \models \forall X \preceq p\exists m\forall Y^{t(m)}((m,Y^{t(m)}) \in P \to \exists y \preceq m(s(y) \preceq t(m) \wedge \theta(y,X,Y^{t(m)}))).$$

Por colecção limitada ($\mathsf{B}^1\mathsf{\Sigma}_\infty^{1,b}$) em $\mathcal{M}$, temos que

$$\mathcal{M} \models \exists z\forall X \preceq p\exists m \preceq z\forall Y^{t(m)}((m,Y^{t(m)}) \in P \to \exists y \preceq m(s(y) \preceq t(m) \wedge \theta(y,X,Y^{t(m)}))).$$

Logo $\mathcal{M} \models \exists z\forall X \preceq p\exists m \preceq z\exists y \preceq m(s(y) \preceq t(m) \wedge \theta(y,X,C^{t(m)}))$. Pela observação 3.10 e pelo teorema do forcing temos que $\mathcal{M}[G] \models \exists z\forall X \preceq p\exists m \preceq z\exists y \preceq m(s(y) \preceq t(m) \wedge \theta(y,X,C^{t(m)}))$. Logo por definição de s temos $\mathcal{M}[G] \models \exists z\forall X \preceq p\exists y \preceq z\theta(y,X,C)$.

□

Partindo de $\mathcal{M}$ um modelo contável de TCA^2 e de φ uma fórmula $\Sigma_\infty^{1,b}$ que verifica $\mathcal{M} \models \forall u\exists X\forall x \preceq u\varphi(x,X)$, o método do forcing permitiu-nos construir uma estrutura $\hat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}[G]$, onde é válido $\exists X\forall x\varphi(x,X)$, e que para ser modelo de TCA^2 apenas lhe falta compreensão recursiva. Ultrapassamos essa limitação através do resultado que se segue.

Proposição 3.25 $\mathcal{M}[G] = (M, S \cup \{C\})$ *pode ser expandido a um modelo contável $\mathcal{M}'$ de TCA^2, cujo universo de primeira ordem é M e cujo universo de segunda ordem limitado coincide com o universo de segunda ordem limitado de $\mathcal{M}[G]$ (e consequentemente de $\mathcal{M}$), e tal que $\mathcal{M}' \models \exists X\forall x\varphi(x,X)$, com φ a fórmula introduzida no início desta subsecção.*

Demonstração

Seja S' constituído pelos subconjuntos de M que são simultaneamente definíveis em $\mathcal{M}[G]$ por uma fórmula $\exists\Sigma_1^{1,b}$ e por uma fórmula $\forall\Pi_1^{1,b}$, com parâmetros em $\mathcal{M}[G]$. Com uma demonstração inteiramente análoga à demonstração do *Lema Principal* (veja [22], página 65), pode constatar-se que:

[26]Sentenças da forma $\exists x\phi$, com ϕ uma fórmula $\Sigma_\infty^{1,b}$, serão designadas por sentenças $\exists\Sigma_\infty^{1,b}$.

- $\forall X \in S' \forall a \in M$ 'X^a pertence ao universo de segunda ordem limitado de $\mathcal{M}[G]$ e consequentemente de $\mathcal{M}$'
- $S \cup \{C\} \subseteq S'$
- $\mathcal{M}' = (M, S')$ é modelo contável de TCA^2.

Como $C \in S'$ e $\mathcal{M}' \vDash \forall x \varphi(x, C)$ temos que $\mathcal{M}' \vDash \exists X \forall x \varphi(x, X)$.

□

$\mathcal{M}'$ será designado por fecho de $\mathcal{M}[G]$ para conjuntos Δ^0_1-definíveis.

3.4.3 Caracterização das funções demonstravelmente totais de $\mathsf{TCA}^2{+}\mathsf{FAN}_0$

Com o objectivo de caracterizarmos as funções demonstravelmente totais de $\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN}_0$, vamos debruçar-nos sobre o seguinte problema: Partindo de $\mathcal{M} = (M, S)$ um modelo contável de TCA^2, construir $\mathcal{M}^*$ um modelo de $\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN}_0$ com o mesmo universo de primeira ordem e o mesmo universo de segunda ordem limitado. Lembremos que pelo método do forcing conseguimos já um resultado parcial, garantindo a validade do esquema FAN_0 para uma fórmula φ particular. A forma como iremos obter a generalização do esquema a todas as fórmulas $\Sigma^{1,b}_\infty$ encontra-se descrita em [9] e [8] a propósito de algumas aplicacões do método do forcing.

Fixemos $\mathcal{M} = (M, S)$ um modelo contável de TCA^2 e consideremos uma enumeração $f = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots\}$ de todas as fórmulas $\Sigma^{1,b}_\infty$ com parâmetros em $\mathcal{M}$, φ, que verificam: $\mathcal{M} \vDash \forall u \exists X \forall x \preceq u \varphi(x, X)$.

Consideremos a sequinte cadeia de modelos, designada por (ω, f)-*cadeia de forcing*:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{M}_n \subseteq \ldots \ (n \in \omega),$$

em que o domínio de primeira ordem é sempre M e cada $\mathcal{M}_{n+1}$ se obtém do seguinte modo: estando $\mathcal{M}_n$ já definido, consideramos o forcing $\mathbb{P}_{t_{\varphi_{n+1}}}$ e o filtro genérico G que contém a árvore definida pela fórmula $\forall u \preceq x \varphi_{n+1}(u, X^{t(x)})$. $\mathcal{M}_{n+1}$ é o fecho de $\mathcal{M}_n[G]$ para conjuntos Δ^0_1-definíveis.

Observação 3.11

- *Para qualquer n em ω, $\mathcal{M}_n$ é modelo de* TCA^2
- *As fórmulas aritméticas (no nosso contexto referimo-nos às fórmulas sem quantificações de segunda ordem não limitadas) são absolutas ao longo da cadeia.*

Nota 3.1 *Não podemos garantir que $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{M}_n$ seja o pretendido modelo de* $\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN}_0$*, pois embora para todas as fórmulas $\Sigma^{1,b}_\infty$, φ, com parâmetros em $\mathcal{M}$ que verificam $\mathcal{M} \vDash \forall u \exists X \forall x \preceq u \varphi(x, X)$, exista X tal que $\forall x \varphi(x, X)$; ao longo da cadeia, nomeadamente ao fecharmos os modelos para conjuntos Δ^0_1-definíveis, estamos a introduzir novos parâmetros que eventualmente podem dar origem a que novas fórmulas verifiquem $\forall u \exists X \forall x \preceq u \varphi(x, X)$, no modelo $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{M}_n$, fórmulas essas em relação às quais não assegurámos a validade do princípio* FAN_0.

Vejamos, então, como estender um modelo contável $\mathcal{M}$ de TCA^2 a um modelo de $\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN}_0$.

Consideremos a seguinte cadeia de modelos $\{\mathcal{M}_n^k : k, n \in \omega\}$:

$$\underbrace{\mathcal{M}_0^0 \subseteq \mathcal{M}_1^0 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{M}_n^0 \subseteq \ldots}_{(\omega, f_0)\text{-cadeia de forcing}} \subseteq \underbrace{\mathcal{M}_0^1 \subseteq \mathcal{M}_1^1 \subseteq \ldots}_{(\omega, f_1)\text{-cadeia de forcing}} \subseteq \underbrace{\mathcal{M}_0^2 \subseteq \mathcal{M}_1^2 \subseteq \ldots}_{(\omega, f_2)\text{-cadeia de forcing}} \subseteq \ldots$$

onde $\mathcal{M}_0^0 = \mathcal{M}$; $f_i =$'enumeração das fórmulas $\Sigma_\infty^{1,b}$, φ, com parâmetros em $\mathcal{M}_0^i$ que verificam $\mathcal{M}_0^i \vDash \forall u \exists X \forall x \preceq u \varphi(x, X)$' e $\mathcal{M}_0^{i+1}$ é a união dos $\mathcal{M}_n^i$ com $n \in \omega$.

Proposição 3.26 *Sendo $\mathcal{M}^*$ a união dos $\mathcal{M}_0^k$ com $k \in \omega$, temos que $\mathcal{M}^*$ é um modelo de $\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN}_0$.*

Demonstração

Vejamos que em $\mathcal{M}^*$ é válido o esquema FAN_0. Seja φ uma fórmula $\Sigma_\infty^{1,b}$ em $\mathcal{M}^*$ que verifica $\mathcal{M}^* \vDash \forall u \exists X \forall x \preceq u \varphi(x, X)$. Como φ tem um número finito de parâmetros e visto os modelos $\mathcal{M}_n^k$ estarem em cadeia, podemos supor que tais parâmetros já existem num certo $\mathcal{M}_i^n$.

Vejamos que $\mathcal{M}_i^n \vDash \forall u \exists X \forall x \preceq u \varphi(x, X)$.

Seja t_φ o termo associado à fórmula φ. Dado u, como $\mathcal{M}^* \vDash \exists X \forall x \preceq u \varphi(x, X)$ vem $\mathcal{M}^* \vDash \exists X^{t(u)} \forall x \preceq u \varphi(x, X^{t(u)})$. Como o universo de segunda ordem limitado é o mesmo em todos os modelos temos $\mathcal{M}_i^n \vDash \exists X^{t(u)} \forall x \preceq u \varphi(x, X^{t(u)})$. Portanto, $\mathcal{M}_i^n \vDash \forall u \exists X \forall x \preceq u \varphi(x, X)$.

Logo, pela forma como construimos a cadeia, em $\mathcal{M}_0^{n+2}$ existe X tal que $\mathcal{M}_0^{n+2} \vDash \forall x \varphi(x, X)$.

Portanto, $\mathcal{M}^* \vDash \exists X \forall x \varphi(x, X)$.

$\square$

Estamos agora em condições de apresentar o seguinte resultado de conservação.

Proposição 3.27 *Se $\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN}_0 \vdash \forall X A(X)$, com A uma fórmula aritmética, então $\mathsf{TCA}^2 \vdash \forall X A(X)$.*

Demonstração

Por contra-recíproco, suponhamos que $\mathsf{TCA}^2 \nvdash \forall X A(X)$. Então existe um modelo $\mathcal{M} = (M, S)$ de TCA^2 e $\Omega \in S$ tal que $\mathcal{M} \vDash \neg A(\Omega)$.

Seja $\mathcal{M}^*$ uma extensão de $\mathcal{M}$ a um modelo de $\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN}_0$, com o mesmo universo de primeira ordem e o mesmo universo de segunda ordem limitado.

Temos $\mathcal{M}^* \vDash \neg A(\Omega)$. Donde $\mathcal{M}^* \nvDash \forall X A(X)$. Logo $\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN}_0 \nvdash \forall X A(X)$.

$\square$

Atendendo ao teorema 3.9, decorre imediatamente que:

Corolário 3.3 *As funções demonstravelmente totais de $\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN}_0$, com gráfico $\Sigma_1^{1,b}$, são ainda as funções de FCH.*

CAPÍTULO 4

> ***'Embora possa parecer um paradoxo, toda a ciência exacta é dominada pela ideia de aproximação.'***
>
> *Bertrand Russell*

Integração

A *análise matemática* é o ramo da matemática vocacionado para o estudo de problemas da passagem ao limite, tais como a derivação e a integração de funções. A origem do cálculo diferencial e integral remonta ao século XVII, com Isaac Newton e Gottfried Leibniz, tendo sido desenvolvido de forma rigorosa apenas no século XIX, por matemáticos como Augustin Cauchy e Karl Weierstrass entre outros.

Entre os mais notáveis precursores da formalização da matemática em sistemas aritméticos de segunda ordem encontram-se Richard Dedekind no final do século XIX e David Hilbert e Paul Bernays em meados dos anos 30. Mais recentemente destacamos a contribuição nessa área de matemáticos como Harvey Friedman e Stephen Simpson, este último, autor de uma incontornável obra de referência na área, *Subsystems of Second Order Arithmetic* [38].

Assentando nesta tradição, surge a chamada *análise fraca*, que consiste na formalização e estudo de porções de análise matemática em sistemas aritméticos de segunda ordem muito fracos (subexponenciais), associados a classes de complexidade computacional — na linha dos sistemas de Samuel Buss ou dos desenvolvidos no capítulo anterior — dando um significado computacional a tais porções de análise. No âmbito da análise fraca destacamos o trabalho de Fernando Ferreira, António Fernandes, Andrea Cantini e Takeshi Yamazaki.

Neste capítulo estamos interessados em formalizar e desenvolver análise na teoria TCA^2, concebida precisamente para este efeito e que, como vimos, corresponde a computar na classe FCH. Mais concretamente o nosso objectivo é a formalização do integral de Riemann.

4.1 Introdução à análise em sistemas fracos

O presente estudo, no âmbito da formalização da análise, tem como ponto de partida o artigo de Fernandes e Ferreira, *Groundwork for weak analysis*, [10]. Neste artigo são introduzidas e estudadas em BTFA[1] (um subsistema de TCA^2 associado à computação em tempo polinomial), noções básicas de análise como o conceito de número real e de função contínua nos reais. Por maioria de razão, a teoria TCA^2 admite igual formalização destas noções. É esta formalização (com alguns desenvolvimentos e adaptações pontuais) que se apresenta nesta primeira secção, reportando-nos por comodidade à teoria TCA^2 (visto ser esta a teoria onde pretendemos prosseguir com a introdução de outros conceitos de análise), mas sendo como já referimos, válida em BTFA, onde foi originalmente apresentada. Única excepção é uma demonstração que recorre a um argumento de minimização, devidamente assinalada como saindo do âmbito de BTFA.

Para um estudo mais pormenorizado dos conceitos envolvidos, veja [10] e [45].

Denotamos o domínio de um modelo $\mathcal{M}$ de TCA^2 por $|\mathcal{M}| = (\mathbb{W}, S)$, sendo $\mathbb{W}$ (da palavra inglesa *words*) o domínio de primeira ordem e $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{W})$ o domínio de segunda ordem. Como observado anteriormente, o modelo *standard* desta teoria tem domínio $(2^{<\omega}, \mathcal{P}(2^{<\omega}))$.

Em TCA^2 consideramos dois tipos de números naturais:

- Os *números naturais tally*, designados por $\mathbb{T}$ ou $\mathbb{N}_1$, que são a sequência vazia ϵ e as sequências formadas apenas por 1's (rigorosamente definidos por $x = 1 \times x$, com $x \in \mathbb{W}$). A ideia é que um número natural y corresponde ao natural *tally* $\underbrace{1\hat{}\ldots\hat{}1}_{y \text{ vezes}}$.
- Os *números naturais diádicos*, notados por $\mathbb{N}_2$, que são a sequência vazia ϵ e as sequências de 0's e 1's iniciadas por 1 (rigorosamente definidos por $x = \epsilon \vee x = 1y$, com $y \in \mathbb{W}$). A ideia da introdução dos naturais desta forma é que um dado natural y corresponde exactamente à sua notação diádica habitual, i.e. $y = \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^{n-i-1}$, com $x_0 = 1$ e $x_i \in \{0, 1\}$ se $i > 0$, corresponde à sequência $1x_1 \ldots x_{n-1}$ e o natural zero corresponde à sequência vazia ϵ.

Definindo $0_{\mathbb{N}_1}$, $1_{\mathbb{N}_1}$, $\leq_{\mathbb{N}_1}$, $+_{\mathbb{N}_1}$ e $\cdot_{\mathbb{N}_1}$ como sendo $\epsilon, 1, \subseteq, \hat{}$ e $\times$ respectivamente, temos que, em TCA^2, $(\mathbb{N}_1, 0_{\mathbb{N}_1}, 1_{\mathbb{N}_1}, +_{\mathbb{N}_1}, \cdot_{\mathbb{N}_1}, \leq_{\mathbb{N}_1})$ é um semi-anel ordenado. É também possível

[1] A teoria BTFA, introduzida em [17], surge como resposta ao seguinte problema proposto por Wilfried Sieg (veja [36]): encontrar um subsistema significativo de análise cujas funções demonstravelmente totais fossem as computavelmente '*feasible*'.

definir $0_{\mathbb{N}_2}$, $1_{\mathbb{N}_2}$, $\leq_{\mathbb{N}_2}$, $+_{\mathbb{N}_2}$ e $\cdot_{\mathbb{N}_2}$, em TCA^2, de forma a reproduzir as usuais operações dos naturais em $\mathbb{N}_2$, conseguindo-se provar (em TCA^2) que $\mathbb{N}_2$ com estas operações forma um semi-anel ordenado. Os índices $\mathbb{N}_1$ e $\mathbb{N}_2$ serão omitidos sempre que seja claro o contexto a que as operações se referem.

Observação 4.1

- *Note que o axioma da contagem em* TCA^2 *garante que dado um conjunto limitado* F*, existe um outro conjunto limitado* C*, tal que* $\mathsf{Count}(C, F)$*, i.e. tal que* C *conta o número de elementos de* $\mathbb{W}$ *presentes em* F*, menores ou iguais pela ordem* $\leq_l$ *(em* $\mathbb{W}$*) que um certo elemento.*

  Visto existir uma bijecção entre $\mathbb{W}$ *e* $\mathbb{N}_2$ *que respeita as relações* $\leq_l$ *e* $\leq_{\mathbb{N}_2}$*, dado* F *um conjunto limitado de elementos de* $\mathbb{N}_2$*, existe um conjunto limitado* C *que conta (em* $\mathbb{N}_2$*) o número de elementos em* F*, menores ou iguais, pela relação* $\leq_{\mathbb{N}_2}$ *que um certo elemento. De agora em diante, consideramos o axioma da contagem,* $\forall F \preceq t$ $\exists C \preceq v \mathsf{Count}(C, F)$*, como fazendo a contagem em* $\mathbb{N}_2$*.*

- *Em* TCA^2 *já se provou que é válido o esquema de indução na notação e indução lenta (i.e. ao longo de* $\mathbb{W}$*) para fórmulas* $\Delta_1^{1,b}$*-estendidas. É possível provar que é também válido o esquema de indução em* $\mathbb{N}_2$ *para fórmulas* $\Delta_1^{1,b}$*-estendidas, i.e.* $A(0_{\mathbb{N}_2}) \wedge \forall x \in \mathbb{N}_2 (A(x) \rightarrow A(x +_{\mathbb{N}_2} 1)) \rightarrow \forall x \in \mathbb{N}_2 A(x)$*, com* A *uma fórmula* $\Delta_1^{1,b}$*--estendida.*

Em TCA^2 os *números racionais diádicos*, notados por $\mathbb{D}$, são constituídos por triplos da forma $(0, x, y)$ e $(1, x, y)$ (codificados por sequências de 0's e 1's de forma adequada), sendo x a sequência vazia ou uma sequência iniciada em 1 e y a sequência vazia ou uma sequência terminada em 1. A ideia é que o triplo $(s, x_0 \ldots x_{n-1}, y_0 \ldots y_{m-1})$ representa o número racional $(-1)^s (\sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^{n-i-1} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{y_j}{2^{j+1}})$. Notamos geralmente tal número racional diádico em TCA^2 por $\pm x_0 x_1 \ldots x_{n-1} \cdot y_0 \ldots y_{m-1}$. Observe que existe uma inclusão natural de $\mathbb{N}_2$ em $\mathbb{D}$. É possível introduzir $0_{\mathbb{D}}$, $1_{\mathbb{D}}$, $\leq_{\mathbb{D}}$, $+_{\mathbb{D}}$ e $\cdot_{\mathbb{D}}$ em TCA^2 de modo a que estendam, de forma natural, aos racionais diádicos, as operações já apresentadas no contexto dos naturais diádicos. Tais operações em $\mathbb{D}$ reproduzem as usuais operações nos racionais e tem-se (em TCA^2) que $(\mathbb{D}, 0_{\mathbb{D}}, 1_{\mathbb{D}}, +_{\mathbb{D}}, \cdot_{\mathbb{D}}, \leq_{\mathbb{D}})$ é um anel ordenado. Pode ainda introduzir-se em $\mathbb{D}$ a operação $-_{\mathbb{D}}$, correspondendo à usual subtracção nos racionais e, considerando a existência de números *tally* negativos, também se pode introduzir, nos *tally* positivos e negativos, o análogo à subtracção nos inteiros. Definimos ainda a operação valor absoluto em $\mathbb{D}$, $|x|$, da forma esperada.

Dado um número *tally* n, usamos a notação 2^n para abreviar a representação do número racional diádico da forma $+1\underbrace{00\ldots0}_{n\ zeros}\cdot\epsilon$. Note que se trata apenas de uma notação, a função exponencial (de expoente diádico) não é demonstravelmente total em TCA^2.

Sendo $n \neq \epsilon$ um número *tally*, 2^{-n} ou $\frac{1}{2^n}$ abrevia o número racional diádico $+\epsilon\cdot\underbrace{00\ldots0}_{n-1\ zeros}1$.

Facilmente nos apercebemos que as potências *tally* de 2 verificam as seguintes propriedades: $2^0 = 1$, $2^n \cdot 2^{-n} = 1$, $2^n \cdot 2^m = 2^{n+m}$, $2^{-n} \cdot 2^{-m} = 2^{-(n+m)}$, $2^n + 2^n = 2^{n+1}$,

$2^{-n}+2^{-n}=2^{-(n-1)}$, $\forall x\in\mathbb{D}^+\exists n\in\mathbb{N}_1 2^{-n}<x$, $n<m\leftrightarrow 2^n<2^m\leftrightarrow 2^{-m}<2^{-n}$, onde por $\mathbb{D}^+$ denotamos os números racionais diádicos positivos, 0 corresponde a $0_{\mathbb{N}_1}$ e 1 corresponde a $1_{\mathbb{D}}$ ou $1_{\mathbb{N}_1}$ (veja contexto), $\cdot$ corresponde a $\cdot_{\mathbb{D}}$, $-$ em $n-1$ corresponde à subtracção nos números *tally* positivos e negativos, e com os mesmos símbolos $+$ e $<$ representamos quer as operações nos *tally*, quer nos racionais diádicos (facilmente se vendo pelo contexto a qual nos referimos). Note ainda que $a<b$ abrevia $a\leq b\wedge a\neq b$.

Observação 4.2 *Os números racionais diádicos da forma $+m\cdot\epsilon$ são, ao longo deste texto, por vezes confundidos com os números naturais diádicos m, é o que acontece quando usamos a notação 2^n para nos referirmos ao elemento $1\underbrace{0\ldots0}_{n\ zeros}$ de $\mathbb{N}_2$. Pelo contexto será fácil apercebermo-nos se a notação se refere ao número racional ou ao número natural.*

No que se segue, por *função* entendemos o conjunto de palavras binárias que codificam os pares ordenados que caracterizam dada função.

Dizemos que uma função $\alpha:\mathbb{N}_1\to\mathbb{D}$ é um *número real* se $|\alpha(n)-\alpha(m)|\leq 2^{-n}$ para todo $n\leq m$. Dois números reais α e β dizem-se *iguais* e escrevemos $\alpha=\beta$ se $\forall n\in\mathbb{N}_1|\alpha(n)-\beta(n)|\leq 2^{-n+1}$.

Embora em TCA^2 não se possa falar no conjunto dos números reais (a linguagem só permite conjuntos de palavras) usamos expressões da forma $\forall\alpha\in\mathbb{R}\ldots$ querendo significar $\forall\alpha$(se α é um número real então $\ldots$).

Existe uma imersão natural de $\mathbb{D}$ em $\mathbb{R}$, considerando que cada número racional diádico x pode ser identificado com o número real α_x, definido por $\alpha_x(n)=x$ para todo $n\in\mathbb{N}_1$.

Considerando que dada uma palavra binária x, denotamos por x^* a palavra x sem os seus zeros mais à direita, se pensarmos na função $\alpha:\mathbb{N}_1\to\mathbb{D}$ tal que $\alpha(n)=\pm x\cdot X[n]^*$, sendo $x\in\mathbb{N}_2$ e $X[n]$ a palavra de comprimento n no caminho infinito X, temos que α é um número real. Estes números reais são conhecidos como *números reais diádicos* e são usualmente representados por $\pm x\cdot X$. Sendo $x=x_0x_1...x_{n-1}$, a ideia é que $\pm x\cdot X$ representa o número real $\pm(\sum_{i=0}^{n-1}x_i2^{n-i-1}+\sum_{i=0}^{\infty}\frac{X(i)}{2^{i+1}})$, onde $X(i)$ denota o $(i+1)$-ésimo *bit* de X.

No artigo [10] provou-se que todo o número real é igual a um número real diádico.

Sendo α e β números reais, definimos:

- $\alpha+\beta$ como sendo o número real $n\to\alpha(n+1)+\beta(n+1)$
- $\alpha-\beta$ como sendo o número real $n\to\alpha(n+1)-\beta(n+1)$
- $\alpha\cdot\beta$ como sendo o número real $n\to\alpha(n+k)\cdot\beta(n+k)$,

  onde k é o menor *tally* tal que $|\alpha(0)|+|\beta(0)|+2\leq 2^k$ (por vezes o símbolo $\cdot$ é omitido)
- $\alpha\leq\beta$ como significando $\forall n(\alpha(n)\leq\beta(n)+2^{-n+1})$

- $\alpha < \beta$ como significando $\alpha \leq \beta \wedge \alpha \neq \beta$
- $|\alpha|$ como sendo o número real $n \to |\alpha(n)|$.

Note que, em TCA^2, números reais são conjuntos, i.e. elementos de segunda ordem, logo é necessária alguma cautela com a existência dos mesmos. Contudo, raciocinando em TCA^2, sendo α e β números reais, a existência dos números reais destes resultantes, através da soma, subtracção, produto ou módulo (segundo as definições atrás), prova-se, de facto, em TCA^2. Vejamos, a título de exemplo, a operação soma de reais. $\alpha + \beta = \{\langle n, d\rangle : n \in \mathbb{N}_1 \wedge d = \alpha(n+1) + \beta(n+1)\} = \{\langle n, d\rangle : n \in \mathbb{N}_1 \wedge \exists a \exists b(\langle n+1, a\rangle \in \alpha \wedge \langle n+1, b\rangle \in \beta \wedge d = a + b)\} = \{\langle n, d\rangle : n \in \mathbb{N}_1 \wedge \forall a \forall b(\langle n+1, a\rangle \in \alpha \wedge \langle n+1, b\rangle \in \beta \to d = a + b)\}$. A existência do conjunto $\alpha + \beta$ é assegurada pela compreensão recursiva da teoria.

Facilmente se prova que tais conjuntos (funções) representam, de facto, números reais. No caso da operação módulo, por exemplo, basta pensarmos que $||\alpha|(n) - |\alpha|(m)| = ||\alpha(n)| - |\alpha(m)|| \leq |\alpha(n) - \alpha(m)| \leq 2^{-n}$, para todo $n \leq m$, visto α ser um número real.

No artigo [10], foram já apresentadas algumas propriedades das operações nos reais, que listamos em seguida. Sabemos que (em TCA^2):

- as operações definidas atrás são congruentes com a noção de igualdade entre números reais (veja lema 4.1 para a operação módulo, única não estudada no referido artigo)
- as relações $=$ e $\leq$ nos números reais podem ser expressas por fórmulas $\forall\Pi_1^b$ e as relações $\neq$ e $<$ podem ser expressas por fórmulas $\exists\Sigma_1^b$[2]
- sendo α, β, γ números reais e $n \in \mathbb{N}_1$ tem-se

$$\alpha = \beta \leftrightarrow \alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \alpha$$
$$\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \gamma \to \alpha \leq \gamma$$
$$\alpha(n) - 2^{-n} \leq \alpha \leq \alpha(n) + 2^{-n}$$
$$\alpha \neq \beta \to \alpha < \beta \vee \beta < \alpha$$
$$\alpha < \beta \to \exists x \in \mathbb{D}(\alpha < x < \beta)$$

- os números reais com as operações atrás formam um corpo ordenado.

Observação 4.3 *Sendo d_1 e d_2 números racionais diádicos, que podem ser vistos também como números reais da forma natural já apresentada, temos que $d_1 =_{\mathbb{D}} d_2 \Leftrightarrow d_1 =_{\mathbb{R}} d_2$, $d_1 \leq_{\mathbb{D}} d_2 \Leftrightarrow d_1 \leq_{\mathbb{R}} d_2$ e $d_1 <_{\mathbb{D}} d_2 \Leftrightarrow d_1 <_{\mathbb{R}} d_2$. Logo para provarmos igualdades ou desigualdades em TCA^2 a respeito de números racionais diádicos é indiferente encará-las como relações em $\mathbb{D}$ ou em $\mathbb{R}$.*

[2] Fórmulas $\exists\Sigma_1^b$ (respectivamente $\forall\Pi_1^b$) são asserções da forma $\exists x\varphi$ (respectivamente $\forall x\varphi$), com φ uma fórmula Σ_1^b (respectivamente Π_1^b). Note que, em particular, são fórmulas $\exists\Sigma_0^{1,b}$ (respectivamente $\forall\Sigma_0^{1,b}$).

Embora em TCA^2 não se possa falar de intervalos na recta real, usamos expressões da forma $\alpha \in [\beta, \gamma]$, com β e γ números reais para abreviar que α *é um número real e* $\beta \leq \alpha \leq \gamma$.

Vejamos que as usuais propriedades dos módulos se provam em TCA^2.

Lema 4.1 *Dados α e β números reais temos que*

a) $|\alpha| = \alpha$ *sse* $0 \leq \alpha$

b) $|\alpha| = -\alpha$ *sse* $\alpha \leq 0$

c) $0 \leq |\alpha|$, *onde* 0 *é o número real dado pela função constantemente igual ao número racional diádico* 0, *formalmente representado por* $+\epsilon \cdot \epsilon$

d) $|\alpha| = |-\alpha|$

e) $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

f) $|\alpha| = 0$ *sse* $\alpha = 0$

g) $\alpha = \beta$ *sse* $|\alpha - \beta| = 0$

h) $||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|$

i) $\alpha = \beta \rightarrow |\alpha| = |\beta|$

j) $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

k) $|\alpha| \leq \beta$ *sse* $\alpha \leq \beta \wedge -\beta \leq \alpha$

l) $\alpha \leq |\alpha|$

m) $|\alpha - \alpha(n)| \leq 2^{-n}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}_1$.

Demonstração

a) Se $|\alpha| = \alpha$ então $\forall n \in \mathbb{N}_1 ||\alpha|(n) - \alpha(n)| \leq 2^{-n+1}$, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}_1 ||\alpha(n)| - \alpha(n)| \leq 2^{-n+1}$. Fixemos $n \in \mathbb{N}_1$. Se $0 \leq \alpha(n)$ evidentemente $0 \leq \alpha(n) + 2^{-n+1}$. Caso $\alpha(n) < 0$, temos $|-2\alpha(n)| \leq 2^{-n+1}$ e portanto $-2\alpha(n) \leq 2^{-n+1}$, o que implica que $-2^{-n+1} \leq -2^{-n} \leq \alpha(n)$. Em qualquer das situações provámos que $0 \leq \alpha(n) + 2^{-n+1}$. Como tal é válido para n arbitrário, temos que $0 \leq \alpha$.

Se $0 \leq \alpha$ então $\forall m \in \mathbb{N}_1 (0 \leq \alpha(m) + 2^{-m+1})$. Fixemos $n \in \mathbb{N}_1$ e tomemos $m \in \mathbb{N}_1$ tal que $n \leq m$. $||\alpha|(n) - \alpha(n)| \leq ||\alpha|(n) - |\alpha|(m)| + ||\alpha|(m) - \alpha(m)| + |\alpha(m) - \alpha(n)| \leq 2^{-n} + ||\alpha(m)| - \alpha(m)| + 2^{-n} \leq 2^{-n+1}$, pois, se $0 \leq \alpha(m)$ então $|\alpha(m)| = \alpha(m)$ e se $\alpha(m) < 0$ então $|\alpha(m)| = -\alpha(m)$ tendo-se $||\alpha(m)| - \alpha(m)| = |-2\alpha(m)| = -2\alpha(m) \leq 2^{-m+2}$ e m pode ser escolhido tão grande quanto se queira. Portanto $|\alpha| = \alpha$.

b) Se $|\alpha| = -\alpha$ então $\forall n \in \mathbb{N}_1 ||\alpha|(n) - (-\alpha)(n)| \leq 2^{-n+1}$. Fixemos $n \in \mathbb{N}_1$. $||\alpha|(n) - (-\alpha)(n)| = ||\alpha(n)| - (-\alpha(n+1))| = ||\alpha(n)| + \alpha(n+1)| \leq 2^{-n+1}$. Se $\alpha(n) < 0$ então $\alpha(n) \leq$

2^{-n+1}. Se $0 \leq \alpha(n)$ então $|\alpha(n) + \alpha(n+1)| \leq 2^{-n+1}$. Sabemos que $2\alpha(n) - 2^{-n} = \alpha(n) + \alpha(n) - 2^{-n} \leq \alpha(n) + \alpha(n+1) \leq |\alpha(n) + \alpha(n+1)|$. Como $2\alpha(n) - 2^{-n} \leq |\alpha(n) + \alpha(n+1)| \leq 2^{-n+1}$, temos que $2\alpha(n) \leq 2^{-n+1} + 2^{-n}$ e portanto $\alpha(n) \leq 2^{-n} + 2^{-n-1} \leq 2.2^{-n} = 2^{-n+1}$. Provou-se assim que $\alpha \leq 0$.

Se $\alpha \leq 0$ então $\forall m \in \mathbb{N}_1(\alpha(m) \leq 2^{-m+1})$. Fixemos $n \in \mathbb{N}_1$ e tomemos $m \in \mathbb{N}_1$ tal que $n \leq m$. $||\alpha|(n) - (-\alpha)(n)| \leq ||\alpha|(n) - |\alpha|(m)| + ||\alpha|(m) - (-\alpha)(m)| + |(-\alpha)(m) - (-\alpha)(n)| \leq \frac{1}{2^n} + ||\alpha(m)| - (-\alpha(m+1))| + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} + ||\alpha(m)| + \alpha(m+1)|$. Se $0 \leq \alpha(m)$ então $||\alpha|(n) - (-\alpha)(n)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} + |\alpha(m) + \alpha(m+1)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} + 2\alpha(m) + \frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2^{n-1}} + 2^{-m+2} + 2^{-m} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, pois m pode ser escolhido tão grande quanto se queira. Se $\alpha(m) < 0$ então $||\alpha|(n) - (-\alpha)(n)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} + |\alpha(m+1) - \alpha(m)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, pois m pode ser escolhido tão grande quanto se queira. Portanto $|\alpha| = -\alpha$.

As alíneas c), d), e), f), g), h), i), j), k) e l) resultam das alíneas a) e b) e do facto de os números reais formarem um corpo ordenado.

m) Imediato por k), uma vez que $\alpha(n) - 2^{-n} \leq \alpha \leq \alpha(n) + 2^{-n}$, i.e. $\alpha - \alpha(n) \leq 2^{-n} \wedge -2^{-n} \leq \alpha - \alpha(n)$.

□

Noção basilar quando o propósito é desenvolver análise matemática, é a de função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Tal noção é introduzida em TCA^2 da forma que a seguir se descreve.

Uma *função contínua parcial de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$ é um conjunto Φ de códigos[3] de quintuplos que verifica:

se $\langle w, x, n, y, k \rangle \in \Phi$ então $w \in \mathbb{W}, x, y \in \mathbb{D}, n, k \in \mathbb{N}_1$

se $(x, n)\Phi(y, k)$ e $(x, n)\Phi(y', k')$ então $|y - y'| \leq 2^{-k} + 2^{-k'}$

se $(x, n)\Phi(y, k)$ e $(x', n') < (x, n)$ então $(x', n')\Phi(y, k)$

se $(x, n)\Phi(y, k)$ e $(y, k) < (y', k')$ então $(x, n)\Phi(y', k')$,

onde $(x, n)\Phi(y, k)$ abrevia a fórmula $\exists w \langle w, x, n, y, k \rangle \in \Phi$ e onde $(x', n') < (x, n)$ abrevia $|x - x'| + 2^{-n'} < 2^{-n}$.

Em [10] notou-se que, sendo α um número real, então $(\alpha(m+1), m) < (\alpha(n+1), n)$, sempre que $n + 1 < m$, tendo já sido apresentados alguns exemplos de funções contínuas, nomeadamente a função *identidade, Id*, a função *constantamente igual a um dado real* γ, C_γ, a função *soma de funções contínuas,* $\Phi_1 + \Phi_2$ e a função *produto de funções contínuas,* $\Phi_1 \cdot \Phi_2$. Vejamos um outro exemplo de função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, a função valor absoluto ou módulo.

[3] O código de um quintuplo (w, x, n, y, k) é denotado por $\langle w, x, n, y, k \rangle$.

A *função módulo*, $|.|$, é definida por $(x, n)|.|(y, k)$ se $x, y \in \mathbb{D}, n, k \in \mathbb{N}_1$ e $||x| - y| \leq 2^{-k} - 2^{-n}$. Note que a anterior fórmula, que denotamos por $\theta(x, n, y, k)$, é uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$, logo o conjunto $\{\langle \epsilon, x, n, y, k\rangle : \theta(x, n, y, k)\}$ existe em TCA^2 e é oficialmente a função módulo. Vejamos que tal conjunto é uma função contínua parcial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, segundo a definição acima.

Se $(x, n)|.|(y, k)$ e $(x, n)|.|(y', k')$ então $|y - y'| = |y - |x| + |x| - y'| \leq |y - |x|| + ||x| - y'| \leq 2^{-k} - 2^{-n} + 2^{-k'} - 2^{-n} \leq 2^{-k} + 2^{-k'}$.

Se $(x, n)|.|(y, k)$ e $(x', n') < (x, n)$ então $||x'| - y| = ||x'| - |x| + |x| - y| \leq ||x'| - |x|| + ||x| - y| \leq |x' - x| + 2^{-k} - 2^{-n} < 2^{-n} - 2^{-n'} + 2^{-k} - 2^{-n} = 2^{-k} - 2^{-n'}$. Logo $(x', n')|.|(y, k)$.

Se $(x, n)|.|(y, k)$ e $(y, k) < (y', k')$ então $||x| - y'| = ||x| - y + y - y'| \leq ||x| - y| + |y - y'| \leq 2^{-k} - 2^{-n} + 2^{-k'} - 2^{-k} = 2^{-k'} - 2^{-n}$. Logo $(x, n)|.|(y', k')$.

Sendo Φ uma função contínua parcial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dizemos que um número real α *está no domínio de* Φ, e denotamos por $\alpha \in \mathrm{dom}\Phi$, se

$$\forall k \in \mathbb{N}_1 \exists n \in \mathbb{N}_1 \exists x \in \mathbb{D} \exists y \in \mathbb{D}(|\alpha - x| < 2^{-n} \wedge (x, n)\Phi(y, k)).$$

Em [10] provou-se que a anterior condição é equivalente a

$$\forall k \in \mathbb{N}_1 \exists n \in \mathbb{N}_1 \exists y \in \mathbb{D}(\alpha(n + 1), n)\Phi(y, k).$$

Sendo Φ uma função contínua parcial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, e sendo α um número real no domínio de Φ, dizemos que um número real β *é a imagem de* α *por meio de* Φ, e denotamos por $\Phi(\alpha) = \beta$ se

$$\forall x, y \in \mathbb{D} \forall n, k \in \mathbb{N}_1((x, n)\Phi(y, k) \wedge |\alpha - x| < \tfrac{1}{2^n} \rightarrow |\beta - y| \leq \tfrac{1}{2^k}).$$

Facilmente se prova que, sendo Φ uma função contínua parcial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathrm{dom}\Phi$, existe um número real β tal que $\Phi(\alpha) = \beta$ e tal número real é único.

Vejamos uma possível demonstração.

Sendo $\alpha \in \mathrm{dom}\Phi$ temos que $\forall k \in \mathbb{N}_1 \exists n \in \mathbb{N}_1 \exists y \in \mathbb{D}(\alpha(n + 1), n)\Phi(y, k)$. Dado $m \in \mathbb{N}_1$, tomemos $\beta'(m) := \mu\langle n, y, w\rangle$ tal que $\langle w, \alpha(n + 1), n, y, m + 1\rangle \in \Phi$ — possível pois em TCA^2 temos minimização para fórmulas desta complexidade — e façamos $\beta(m) :=$ segunda componente de $\beta'(m)$. Pode ver-se que β é uma função em TCA^2 de $\mathbb{N}_1$ para $\mathbb{D}$.

Dados $n_1 \leq n_2$, por definição de $\beta'(n_1)$ e $\beta'(n_2)$ podemos tomar (n, y) e (n', y') como sendo as primeira e segunda componentes de $\beta'(n_1)$ e $\beta'(n_2)$ respectivamente, logo sabemos que verificam $(\alpha(n+1), n)\Phi(y, n_1 + 1)$ e $(\alpha(n' + 1), n')\Phi(y', n_2 + 1)$. Sendo $n'' \in \mathbb{N}_1$ tal que $n + 1 < n''$ e $n' + 1 < n''$, temos que $(\alpha(n'' + 1), n'') < (\alpha(n + 1), n)$ e $(\alpha(n'' + 1), n'') < (\alpha(n' + 1), n')$ logo $(\alpha(n'' + 1), n'')\Phi(y, n_1 + 1)$ e $(\alpha(n'' + 1), n'')\Phi(y', n_2 + 1)$ e portanto $|\beta(n_1) - \beta(n_2)| = |y - y'| \leq 2^{-(n_1+1)} + 2^{-(n_2+1)} \leq 2^{-(n_1+1)} + 2^{-(n_1+1)} = 2^{-n_1}$. Logo β é um número real.

Vejamos que $\Phi(\alpha) = \beta$. Dados $x, y \in \mathbb{D}$ e $n, k \in \mathbb{N}_1$, suponhamos que $(x, n)\Phi(y, k) \wedge |\alpha - x| < \frac{1}{2^n}$. Seja $n' \in \mathbb{N}_1$ tal que $(\alpha(n' + 1), n') < (x, n)$, logo $(\alpha(n' + 1), n')\Phi(y, k)$.

Seja $m \in \mathbb{N}_1$ arbitrariamente grande. Por definição de $\beta(m)$ existe l tal que $(\alpha(l+1), l)\Phi(\beta(m), m+1)$. Tomando n'' tal que $n'+1 < n''$ e $l+1 < n''$ temos $(\alpha(n''+1), n'')\Phi(y, k)$ e $(\alpha(n''+1), n'')\Phi(\beta(m), m+1)$, logo $|\beta(m) - y| \leq 2^{-k} + 2^{-(m+1)}$. Logo $|\beta - y| \leq |\beta - \beta(m)| + |\beta(m) - y| \leq \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{m+1}}$. Verificamos assim que $|\beta - y| \leq \frac{1}{2^k}$ visto m poder ser escolhido tão grande quanto queiramos. Portanto $\Phi(\alpha) = \beta$.

Vejamos que tal β é único. Seja $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\Phi(\alpha) = \gamma$. De $\alpha \in \text{dom}\Phi$ temos que $\forall k \exists n \exists y (\alpha(n+1), n)\Phi(y, k)$. Como $|\alpha - \alpha(n+1)| \leq 2^{-(n+1)} < 2^{-n}$, por definição de $\Phi(\alpha) = \beta$, temos que $|\beta - y| \leq 2^{-k}$, e por definição de $\Phi(\alpha) = \gamma$ temos que $|\gamma - y| \leq 2^{-k}$. Logo $|\beta - \gamma| = |\beta - y + y - \gamma| \leq |\beta - y| + |y - \gamma| \leq 2^{-k} + 2^{-k}$. Como k pode ser escolhido tão grande quanto se queira temos que $|\beta - \gamma| \leq 0$, logo $\beta = \gamma$.

Em [38], um argumento análogo é indicado para provar que o anterior resultado (existência e unicidade de imagem de uma função contínua parcial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ num ponto do seu domínio) é válido em RCA_0. Surpreendente é o facto de tal resultado ser já válido em teorias mais fracas, ligadas à computação em tempo polinomial, onde o anterior argumento de minimização não pode ser usado. Em [10], provou-se que, no contexto de BTFA, sendo Φ uma função contínua parcial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e α um número real tal que $\alpha \in \text{dom}\Phi$, existe um número real diádico β tal que $\Phi(\alpha) = \beta$ e tal real é único.

Pelo que acabámos de referir, vemos que é possível falar na imagem de uma função Φ num ponto do seu domínio α, que denotaremos por $\Phi(\alpha)$ e que fica determinada a menos da igualdade de reais. Em [10] também foi observado que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $Id(\alpha) = \alpha$, $C_\gamma(\alpha) = \gamma$, e se $\alpha \in \text{dom}\Phi_1$, $\alpha \in \text{dom}\Phi_2$, $\Phi_1(\alpha) = \beta_1$ e $\Phi_2(\alpha) = \beta_2$ então α está no domínio de $\Phi_1 + \Phi_2$ e no domínio de $\Phi_1 \cdot \Phi_2$ e $(\Phi_1 + \Phi_2)(\alpha) = \beta_1 + \beta_2$ e $(\Phi_1 \cdot \Phi_2)(\alpha) = \beta_1 \cdot \beta_2$.

Observação 4.4 *Dado $\gamma \in \mathbb{R}$, a fórmula $\Phi(\alpha) \leq \gamma$ é, em rigor, uma abreviatura de $\exists \beta(\Phi(\alpha) = \beta \wedge \beta \leq \gamma)$ $(\star)$. Pode contudo provar-se que tal fórmula é equivalente a $\forall x, y \in \mathbb{D} \forall n, k \in \mathbb{N}_1((x, n)\Phi(y, k) \wedge |\alpha - x| < \frac{1}{2^n} \to y \leq \gamma + \frac{1}{2^k})$ $(\dagger)$, equivalente, portanto, a uma fórmula de complexidade $\forall \Sigma_0^{1,b}$. Obter $(\dagger)$ a partir de $(\star)$ é imediato. A implicação recíproca resulta da possibilidade, já justificada, de fixarmos β tal que $\Phi(\alpha) = \beta$ e do facto de α pertencer ao domínio de Φ permitir deduzir que $\forall k \in \mathbb{N}_1 \exists y \in \mathbb{D}(|\beta - y| \leq \frac{1}{2^k} \wedge y \leq \gamma + \frac{1}{2^k})$, o que implica que $\forall k(\beta \leq \gamma + \frac{1}{2^{k-1}})$, resultando que $\beta \leq \gamma$ atendendo a que k pode ser tomado tão grande quanto se queira. Obviamente também $\Phi(\alpha) < \gamma$ é equivalente a uma fórmula $\exists \Sigma_0^{1,b}$ e, pela definição, $\Phi(\alpha) = \gamma$ é equivalente a uma fórmula $\forall \Sigma_0^{1,b}$.*

Definição 4.1 *Uma função contínua parcial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ diz-se* total *se todo o número real está no domínio da função. Diz-se* total no intervalo $[\alpha, \beta]$ *se todo o número real nesse intervalo está no domínio da função.*

Proposição 4.1 *A função módulo $|.|$ (atrás introduzida) é uma função contínua total e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $|.|(\alpha) = |\alpha|$.*

Demonstração

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, vejamos que $\alpha \in \mathrm{dom}|.|$.

Seja $k \in \mathbb{N}_1$. Temos que $|\alpha - \alpha(k+1)| \leq 2^{-(k+1)} < 2^{-k}$ e $||\alpha(k+1)| - |\alpha(k+1)|| = 0 = 2^{-k} - 2^{-k}$. Logo, existem $n := k \in \mathbb{N}_1$, $x := \alpha(k+1) \in \mathbb{D}$, $y := |\alpha(k+1)| \in \mathbb{D}$ tais que $(|\alpha - x| < 2^{-n} \wedge (x,n)|.|(y,k))$. Portanto $\alpha \in \mathrm{dom}|.|$.

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, provemos que $|.|(\alpha) = |\alpha|$, i.e. $\forall x, y \in \mathbb{D} \forall n, k \in \mathbb{N}_1((x,n)|.|(y,k) \wedge |\alpha - x| < \frac{1}{2^n} \rightarrow ||\alpha| - y| \leq \frac{1}{2^k})$. Sejam $x, y \in \mathbb{D}$ e $n, k \in \mathbb{N}_1$ e suponhamos que $(x,n)|.|(y,k)$ e $|\alpha - x| < \frac{1}{2^n}$. Então $||\alpha| - y| = ||\alpha| - |x| + |x| - y| \leq ||\alpha| - |x|| + ||x| - y| \leq |\alpha - x| + 2^{-k} - 2^{-n} < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^k}$. Portanto $|.|(\alpha) = |\alpha|$.

$\square$

Encerramos a apresentação das funções contínuas nesta secção introdutória, desenvolvendo a noção de *composição* no contexto das funções contínuas nos reais. Mais concretamente, mostramos que é possível definir (em TCA^2) a composta de duas funções contínuas como sendo ainda uma função contínua.

Sejam Φ_1 e Φ_2 funções contínuas parciais de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Tomemos $(x,n)(\Phi_1 \circ \Phi_2)(y,k)$ sse $x, y \in \mathbb{D} \wedge n, k \in \mathbb{N}_1 \wedge \exists x' \in \mathbb{D} \exists n' \in \mathbb{N}_1 \setminus \{0\}(x,n)\Phi_2(x',n') \wedge (x', n'-1)\Phi_1(y,k)$.

Sendo $\theta(x,n,y,k) := x, y \in \mathbb{D} \wedge n, k \in \mathbb{N}_1 \wedge \exists x' \in \mathbb{D} \exists n' \in \mathbb{N}_1 \setminus \{0\}(x,n)\Phi_2(x',n') \wedge (x', n'-1)\Phi_1(y,k)$, θ é uma fórmula $\exists\Sigma_0^{1,b}$, ou seja, pode tomar a forma $\exists w \theta'(w,x,n,y,k)$, com θ' uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$. Assim sendo, o conjunto $\{\langle w,x,n,y,k\rangle : \theta'(w,x,n,y,k)\}$ existe em TCA^2 e é oficialmente a *função composta* $\Phi_1 \circ \Phi_2$.

Vejamos que $\Phi_1 \circ \Phi_2$ é uma função contínua parcial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

- Se $(x,n)(\Phi_1 \circ \Phi_2)(y,k)$ e $(x,n)(\Phi_1 \circ \Phi_2)(y',k')$ então existem $x' \in \mathbb{D}$ e $n' \in \mathbb{N}_1 \setminus \{0\}$ tais que $(x,n)\Phi_2(x',n') \wedge (x',n'-1)\Phi_1(y,k)$ e existem $x'' \in \mathbb{D}$ e $n'' \in \mathbb{N}_1 \setminus \{0\}$ tais que $(x,n)\Phi_2(x'',n'') \wedge (x'',n''-1)\Phi_1(y',k')$.

  Sendo Φ_2 uma função contínua, temos $|x' - x''| \leq 2^{-n'} + 2^{-n''}$.

  Se $|x' - x''| < 2^{-n'} + 2^{-n''}$ então existem $z \in \mathbb{D}$ e $m \in \mathbb{N}_1$ tais que $(z,m) < (x',n') \wedge (z,m) < (x'',n'')$. Supondo, sem perda de generalidade, que $x' \leq x''$, basta que pensemos no intervalo $[x'' - 2^{-n''}, x' + 2^{-n'}]$ e tomemos z como sendo $\frac{x''-2^{-n''}+x'+2^{-n'}}{2}$ e m como sendo um elemento de $\mathbb{N}_1$ tal que $2^{-m} < \frac{x'+2^{-n'}-x''+2^{-n''}}{2}$.

  Como se tem $(x',n') < (x',n'-1) \wedge (x'',n'') < (x'',n''-1)$, vem que $(z,m)\Phi_1(y,k) \wedge (z,m)\Phi_1(y',k')$, e portanto $|y - y'| \leq 2^{-k} + 2^{-k'}$.

  Se $|x' - x''| = 2^{-n'} + 2^{-n''}$, como $(x',n') < (x',n'-1)$ e $(x'',n'') < (x'',n''-1)$ temos $(x,n)\Phi_2(x',n'-1)$ e $(x,n)\Phi_2(x'',n''-1)$, com $|x' - x''| < 2^{-(n'-1)} + 2^{-(n''-1)}$, logo pode aplicar-se o caso anterior.

- Se $(x,n)(\Phi_1 \circ \Phi_2)(y,k)$ e $(x',n') < (x,n)$ então existem $x'' \in \mathbb{D}$ e $n'' \in \mathbb{N}_1 \setminus \{0\}$ tais que $(x,n)\Phi_2(x'',n'') \wedge (x'',n''-1)\Phi_1(y,k)$. Como por hipótese $(x',n') < (x,n)$, temos que $(x',n')\Phi_2(x'',n'')$, logo $(x',n')(\Phi_1 \circ \Phi_2)(y,k)$.

- Se $(x,n)(\Phi_1 \circ \Phi_2)(y,k)$ e $(y,k) < (y',k')$ então existem $x' \in \mathbb{D}$ e $n' \in \mathbb{N}_1 \setminus \{0\}$ tais que $(x,n)\Phi_2(x',n') \wedge (x',n'-1)\Phi_1(y,k)$. Como $(y,k) < (y',k')$ temos que $(x',n'-1)\Phi_1(y',k')$, logo $(x,n)(\Phi_1 \circ \Phi_2)(y',k')$.

Provou-se assim que $\Phi_1 \circ \Phi_2$ é uma função contínua.

Proposição 4.2 *Sejam Φ_1 e Φ_2 funções contínuas parciais de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Se $\alpha \in \mathrm{dom}\Phi_2$ e $\Phi_2(\alpha) \in \mathrm{dom}\Phi_1$, então $\alpha \in \mathrm{dom}(\Phi_1 \circ \Phi_2)$ e $(\Phi_1 \circ \Phi_2)(\alpha) = \Phi_1(\Phi_2(\alpha))$.*

Demonstração

Para provarmos que $\alpha \in \mathrm{dom}(\Phi_1 \circ \Phi_2)$, fixemos $k \in \mathbb{N}_1$ e vejamos que $\exists n \in \mathbb{N}_1 \exists y \in \mathbb{D}(\alpha(n+1),n)(\Phi_1 \circ \Phi_2)(y,k)$.

Seja $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\Phi_2(\alpha) = \beta$. Como $\beta \in \mathrm{dom}\Phi_1$, existem $n' \in \mathbb{N}_1$ e $y \in \mathbb{D}$ tais que $(\beta(n'+1),n')\Phi_1(y,k)$. Como $\alpha \in \mathrm{dom}\Phi_2$, existem $n \in \mathbb{N}_1$ e $y' \in \mathbb{D}$ tais que $(\alpha(n+1),n)\Phi_2(y',n'+3)$. Vejamos que se tem $(\alpha(n+1),n)(\Phi_1 \circ \Phi_2)(y,k)$.

Por definição de $\Phi_1 \circ \Phi_2$ temos que provar que existem $w \in \mathbb{D}$ e $m \in \mathbb{N}_1 \setminus \{0\}$ tais que $(\alpha(n+1),n)\Phi_2(w,m) \wedge (w,m-1)\Phi_1(y,k)$.

Façamos $w := y'$ e $m := n'+3$. Obviamente temos $(\alpha(n+1),n)\Phi_2(w,m)$. Resta-nos provar que $(y',n'+2)\Phi_1(y,k)$. Ora $|\beta(n'+1)-y'|+\frac{1}{2^{n'+2}} \leq |\beta(n'+1)-\beta|+|\beta-y'|+\frac{1}{2^{n'+2}} \leq \frac{1}{2^{n'+1}} + \frac{1}{2^{n'+3}} + \frac{1}{2^{n'+2}} < \frac{1}{2^{n'+1}} + \frac{1}{2^{n'+1}} = \frac{1}{2^{n'}}$. Logo $(y',n'+2) < (\beta(n'+1),n')$ e como $(\beta(n'+1),n')\Phi_1(y,k)$ temos que $(y',n'+2)\Phi_1(y,k)$.

Vejamos que $(\Phi_1 \circ \Phi_2)(\alpha) = \Phi_1(\Phi_2(\alpha))$, ou seja, sendo λ, β, γ números reais tais que $\lambda = (\Phi_1 \circ \Phi_2)(\alpha)$, $\beta = \Phi_2(\alpha)$ e $\gamma = \Phi_1(\beta)$ vejamos que se tem $\lambda = \gamma$.

Pelo visto acima, dado $k \in \mathbb{N}_1$, existem $n, n' \in \mathbb{N}_1$ e $y \in \mathbb{D}$ tais que $(\alpha(n+1),n)(\Phi_1 \circ \Phi_2)(y,k) \wedge (\beta(n'+1),n')\Phi_1(y,k)$.

Como $\lambda = (\Phi_1 \circ \Phi_2)(\alpha)$ e $(\alpha(n+1),n)(\Phi_1 \circ \Phi_2)(y,k)$ e $|\alpha - \alpha(n+1)| \leq \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}$ temos que $|\lambda - y| \leq \frac{1}{2^k}$.

Como $\Phi_1(\beta) = \gamma$ e $(\beta(n'+1),n')\Phi_1(y,k)$ e $|\beta - \beta(n'+1)| \leq \frac{1}{2^{n'+1}} < \frac{1}{2^{n'}}$, temos que $|\gamma - y| \leq \frac{1}{2^k}$.

Ora $|\lambda - \gamma| = |\lambda - y + y - \gamma| \leq |\lambda - y| + |y - \gamma| \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$. Logo $|\lambda - \gamma| \leq 0$, pois k pode ser escolhido tão grande quanto se queira, e portanto $\lambda = \gamma$.

□

Corolário 4.1 *Sendo Φ uma função contínua total no intervalo $[\alpha_1, \alpha_2]$, a função $|.| \circ \Phi$, notada abreviadamente por $|\Phi|$, é uma função contínua total no intervalo $[\alpha_1, \alpha_2]$ e $|\Phi|(\alpha) = |\Phi(\alpha)|$, $\forall \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$.*

Em relação à continuidade de funções nos reais, necessitamos ainda de uma noção mais forte, a de *módulo de continuidade uniforme*.

Definição 4.2 *Sendo Φ uma função contínua total (respectivamente contínua total em $[\alpha_1, \alpha_2]$, com $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$), um* módulo de continuidade uniforme para Φ *(respectivamente* de continuidade uniforme para Φ em $[\alpha_1, \alpha_2]$*) é uma função h de $\mathbb{N}_1$ para $\mathbb{N}_1$ estritamente* *crescente tal que para todo $n \in \mathbb{N}_1$ e para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (respectivamente $\alpha, \beta \in [\alpha_1, \alpha_2]$), se $|\alpha - \beta| < 2^{-h(n)}$ então $|\Phi(\alpha) - \Phi(\beta)| < 2^{-n}$.*

Note que na anterior definição não existe qualquer ambiguidade, uma vez que $|\Phi(\alpha) - \Phi(\beta)| < 2^{-n}$ é independente do representante escolhido para $\Phi(\alpha)$ e $\Phi(\beta)$, pois, como já observámos, $-$, $<$ e $|.|$ são congruentes com a igualdade de reais.

Proposição 4.3 *a) As funções contínuas totais Id, $|.|$, C_γ e $C_\gamma \cdot Id$, com $\gamma \in \mathbb{R}$, são funções com módulo de continuidade uniforme.*

b) Se Φ_1 e Φ_2 são funções contínuas totais (respectivamente funções contínuas totais em $[\alpha_1, \alpha_2]$) com módulo de continuidade uniforme (respectivamente módulo de continuidade uniforme em $[\alpha_1, \alpha_2]$) então $\Phi_1 + \Phi_2$ tem módulo de continuidade uniforme (respectivamente módulo de continuidade uniforme em $[\alpha_1, \alpha_2]$).

c) Se Φ_2 é uma função contínua total (respectivamente contínua total em $[\alpha_1, \alpha_2]$) com módulo de continuidade uniforme (respectivamente módulo de continuidade uniforme em $[\alpha_1, \alpha_2]$) e Φ_1 é uma função contínua total (respectivamente contínua total em $[\beta_1, \beta_2]$) com módulo de continuidade uniforme (respectivamente módulo de continuidade uniforme em $[\beta_1, \beta_2]$ e tal que $\forall \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ $\Phi_2(\alpha) \in [\beta_1, \beta_2]$), então $\Phi_1 \circ \Phi_2$ tem módulo de continuidade uniforme (respectivamente módulo de continuidade uniforme em $[\alpha_1, \alpha_2]$). Em particular, se Φ é uma função contínua total (respectivamente contínua total em $[\alpha_1, \alpha_2]$) com módulo de continuidade uniforme (respectivamente módulo de continuidade uniforme em $[\alpha_1, \alpha_2]$) então $|\Phi|$ tem módulo de continuidade uniforme (respectivamente módulo de continuidade uniforme em $[\alpha_1, \alpha_2]$).

Demonstração

$a)$ Trivialmente a função $h : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_1$ definida por $h(n) = n$ $\forall n \in \mathbb{N}_1$ é um módulo de continuidade uniforme para Id. Tal função é também um módulo de continuidade uniforme para a função $|.|$ pois, dados $n \in \mathbb{N}_1$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se $|\alpha - \beta| < 2^{-n}$ então $||.|(\alpha) - |.|(\beta)| = ||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta| < 2^{-n}$. A função h é ainda um módulo de continuidade uniforme para C_γ (com $\gamma \in \mathbb{R}$), uma vez que, se $|\alpha - \beta| < 2^{-n}$ então $|C_\gamma(\alpha) - C_\gamma(\beta)| = 0 < 2^{-n}$.

Sendo $\gamma \in \mathbb{R}$ analisemos a função $C_\gamma \cdot Id$.

Tomemos $m \in \mathbb{N}_1$ tal que $|\gamma| < 2^m$. A função $h : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_1$ definida por $h(n) = n + m$ é um módulo de continuidade uniforme para $C_\gamma \cdot Id$ pois, dados $n \in \mathbb{N}_1$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se $|\alpha - \beta| < 2^{-h(n)} = 2^{-n-m}$ então $|(C_\gamma \cdot Id)(\alpha) - (C_\gamma \cdot Id)(\beta)| = |\gamma \cdot \alpha - \gamma \cdot \beta| = |\gamma(\alpha - \beta)| = |\gamma| \cdot |\alpha - \beta| < 2^m 2^{-n-m} = 2^{-n}$.

$b)$ Sejam Φ_1 e Φ_2 funções contínuas totais com módulos de continuidade uniforme h_1 e h_2 respectivamente.

Seja $h' : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_1$ a função definida por $h'(n) = h_1(n) + h_2(n)$. Pode provar-se que h' é um módulo de continuidade uniforme para Φ_1 e Φ_2. Para verificarmos o caso de Φ_1 (o outro caso é análogo), tomemos $n \in \mathbb{N}_1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e suponhamos que $|\alpha - \beta| < 2^{-h'(n)}$. Por definição de h, $2^{-h(n)} \leq 2^{-h_1(n)}$. Logo $|\alpha - \beta| < 2^{-h_1(n)}$. Como h_1 é módulo de continuidade uniforme para Φ_1, sabemos que $|\Phi_1(\alpha) - \Phi_1(\beta)| < 2^{-n}$. E portanto h' é um módulo de continuidade uniforme para Φ_1.

Seja h a função de $\mathbb{N}_1$ para $\mathbb{N}_1$ definida por $h(n) = h'(n+1)$ e provemos que tal função é um módulo de continuidade uniforme para $\Phi_1 + \Phi_2$.

Sejam $n \in \mathbb{N}_1$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $|\alpha - \beta| < 2^{-h(n)} = 2^{-h'(n+1)}$. Mas então, $|(\Phi_1+\Phi_2)(\alpha) - (\Phi_1 + \Phi_2)(\beta)| = |\Phi_1(\alpha) - \Phi_1(\beta) + \Phi_2(\alpha) - \Phi_2(\beta)| \leq |\Phi_1(\alpha) - \Phi_1(\beta)| + |\Phi_2(\alpha) - \Phi_2(\beta)| < 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+1)} = 2^{-n}$, tendo-se o pretendido. No caso de nos restringirmos a um certo intervalo $[\alpha_1, \alpha_2]$ a prova é, *mutatis mutandis*, a anterior.

c) Sejam Φ_1 e Φ_2 funções contínuas totais com módulos de continuidade uniforme h_1 e h_2 respectivamente. Uma vez mais, no caso dos domínios serem subintervalos de $\mathbb{R}$ a demonstração é idêntica. A função $h : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_1$ definida por $h(n) = h_2(h_1(n))$ é uma função estritamente crescente, que provamos ser módulo de continuidade uniforme para $\Phi_1 \circ \Phi_2$.

Tomemos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}_1$ tais que $|\alpha - \beta| < 2^{-h(n)}$. Uma vez que h_2 é um módulo de continuidade uniforme para Φ_2 e $|\alpha - \beta| < 2^{-h_2(h_1(n))}$, temos que $|\Phi_2(\alpha) - \Phi_2(\beta)| < 2^{-h_1(n)}$. Da anterior desigualdade e do facto de h_1 ser módulo de continuidade uniforme para Φ_1, resulta que $|\Phi_1(\Phi_2(\alpha)) - \Phi_1(\Phi_2(\beta))| < 2^{-n}$, ou seja, $|\Phi_1 \circ \Phi_2(\alpha) - \Phi_1 \circ \Phi_2(\beta)| < 2^{-n}$, tendo-se o pretendido.

$\square$

4.2 A necessidade de contagem para a integração

Nesta secção fazemos uma breve pausa na formalização de conceitos de análise em sistemas fracos de segunda ordem (com vista à formalização do integral de Riemann), para tentarmos motivar o porquê da necessidade de uma teoria com *contagem* para introduzir *integração*.

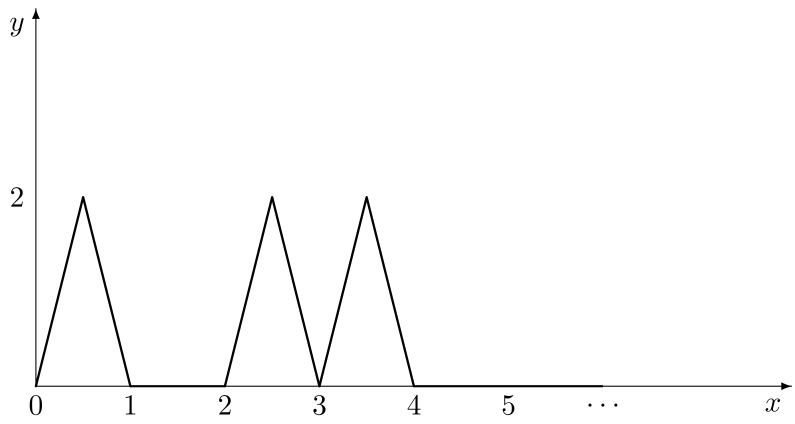
Já em [10] Fernandes e Ferreira se tinham apercebido das limitações de BTFA a esse nível:

'*Presumably,* BTFA *is sufficient for the development of some transcendental function theory, but insufficient for developing Riemannian integration for (general) continuous functions with a modulus of uniform continuity*'.

Também Harvey Friedman e Ker-I Ko, no contexto da *análise computável* (com restrições de complexidade), sugerem a necessidade de se estender BTFA, ao relacionarem a integração à Riemann com a classe das funções computáveis em espaço polimonial (veja [30] e [29]).

Ainda que na Secção 4 deste capítulo se prove que, para o desenvolvimento do integral de Riemann não seja necessário irmos tão longe quanto PSPACE, sendo suficiente uma teoria relacionada com FCH, a necessidade de contagem torna-se evidente se provarmos (como faremos em seguida) que a teoria BTFA enriquecida com a possibilidade de *integração* sobre as funções contínuas com módulo de continuidade uniforme implica *contagem*.

À primeira vista pode parecer intuitivo que havendo *integração existe contagem*, nomeadamente se pensarmos que dado um conjunto (exemplo $X := \{0, 2, 3\}$) existe uma função contínua com módulo de continuidade uniforme (Φ_X conforme figura abaixo) cujo integral definia o que podiamos chamar de *função contagem*, i.e. $f(n) := \int_0^{n+1} \Phi_X(t)\, dt$.



Repare contudo que, assegurar que tal função tem imagem em $\mathbb{N}_2$ e verifica o pretendido, requer indução que poderia não estar disponível no sistema em que trabalhamos. Para melhor motivarmos esta questão e nos convencermos que BTFA + *integração* → *contagem* não é algo completamente trivial, debrucemo-nos sobre a problemática da função contagem f (que podemos supor definida apenas nos elementos de $\mathbb{N}_2$ que não excedem um certo número natural diádico a) ter imagem em $\mathbb{N}_2$.

É evidente que $\forall n \in \mathbb{N}_2 (\int_n^{n+1} \Phi_X(t)\, dt \in \mathbb{N}_2)$, sendo inclusive 0 ou 1, e $\forall n \in \mathbb{N}_2$ $(\int_0^n \Phi_X(t)\, dt \in \mathbb{N}_2 \to \int_0^{n+1} \Phi_X(t)\, dt \in \mathbb{N}_2)$. Porém, para daí inferirmos que $\forall n \in \mathbb{N}_2$ $(\int_0^{n+1} \Phi_X(t)\, dt \in \mathbb{N}_2)$, precisamos de facto de *indução*, e indução em n sobre a fórmula $\exists x \leq n + 1 (x \in \mathbb{N}_2 \wedge x =_{\mathbb{R}} \int_0^{n+1} \Phi_X(t)\, dt)$ não está disponível em BTFA.

Mais, pensando em definir a função de contagem f como

$$f := \{\langle n, x\rangle : n, x \in \mathbb{N}_2 \wedge n \leq a \wedge x \leq n + 1 \wedge \int_0^{n+1} \Phi_X(t)\, dt =_{\mathbb{R}} x\},$$

sendo o conjunto definido por uma fórmula $\forall\Pi_1^b$, não podemos garantir a sua existência em BTFA. E ainda que escrevendo f na forma

$$f := \{\langle n, x\rangle : n, x \in \mathbb{N}_2 \wedge n \leq a \wedge x \leq n + 1 \wedge x - \tfrac{1}{2} <_{\mathbb{R}} \int_0^{n+1} \Phi_X(t)\, dt <_{\mathbb{R}} x + \tfrac{1}{2}\},$$

i.e. por intermédio de uma fórmula $\exists\Sigma_1^b$, para a compreensão de BTFA garantir a existência do conjunto f torna-se necessário provar, em BTFA, que ambos os conjuntos coincidem, conduzindo novamente à questão: $\int_0^{n+1} \Phi_X(t)\, dt \in \mathbb{N}_2$?

Apesar da existência de contagem em BTFA + *integração* não ser completamente trivial (como tentámos evidenciar), provamos em seguida que, na teoria BTFA acrescida de *integração* existe indução suficiente para estabelecer a *contagem*.

Este estudo é também apresentado num artigo conjunto com Fernando Ferreira, intitulado '*Counting as integration in feasible analysis*' [19], recentemente aceite para publicação.

O primeiro passo, com vista a estabelecer que $\mathsf{BTFA} + \textit{integração} \rightarrow \textit{contagem}$, consiste em explicitar o que entendemos por *existir integração* e *existir contagem.*

Por *existir integração* entendemos que para toda a função contínua total em $[0, \beta]$, Φ, com módulo de continuidade uniforme nesse intervalo, existe uma função contínua total em $[0, \beta]$, G_Φ, denotada por $G_\Phi(\alpha) = \int_0^\alpha \Phi(t)\, dt$ e que designamos por *função integral de* Φ, verificando as seguintes propriedades que passarão a ser conhecidas por *propriedades da integração*:

- $G_\Phi(0) = 0 \qquad [\int_0^0 \Phi(t)\, dt = 0]$
- $G_{C_\gamma}(\alpha) = \gamma \cdot \alpha \qquad [\int_0^\alpha \gamma\, dt = \gamma\alpha]$
- $G_{Id}(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} \qquad [\int_0^\alpha t\, dt = \frac{\alpha^2}{2}]$
- $G_{C_\gamma Id}(\alpha) = \gamma \cdot G_{Id}(\alpha) \qquad [\int_0^\alpha \gamma t\, dt = \gamma \int_0^\alpha t\, dt]$
- $G_{\Phi+\Psi}(\alpha) = G_\Phi(\alpha) + G_\Psi(\alpha) \qquad [\int_0^\alpha (\Phi + \Psi)(t)\, dt = \int_0^\alpha \Phi(t)\, dt + \int_0^\alpha \Psi(t)\, dt]$
- $(\forall \delta \in [\alpha_1, \alpha_2] \Phi(\delta) = \Psi(\delta)) \rightarrow G_\Phi(\alpha_2) - G_\Phi(\alpha_1) = G_\Psi(\alpha_2) - G_\Psi(\alpha_1)$
- $(\forall \delta \in [\alpha_1, \alpha_2] \Phi(\delta) \leq \Psi(\delta)) \rightarrow G_\Phi(\alpha_2) - G_\Phi(\alpha_1) \leq G_\Psi(\alpha_2) - G_\Psi(\alpha_1)$,

com $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in [0, \beta]$ e Ψ função contínua total em $[0, \beta]$ com módulo de continuidade uniforme nesse intervalo.

Observe que, embora de forma laboriosa, é possível expressar a existência de integração através de uma fórmula na linguagem $\mathcal{L}_2$.

Notação 4.1 $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Phi(t)\, dt := \int_0^{\alpha_2} \Phi(t)\, dt - \int_0^{\alpha_1} \Phi(t)\, dt.$

Usando a notação acima, das propriedades da integração deduzem-se imediatamente as seguintes propriedades:

- $\forall \delta \in [\alpha_1, \alpha_2], \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Phi(t)\, dt = \int_{\alpha_1}^{\delta} \Phi(t)\, dt + \int_{\delta}^{\alpha_2} \Phi(t)\, dt$
- $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \gamma\, dt = \gamma \cdot (\alpha_2 - \alpha_1)$
- $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} t\, dt = \frac{{\alpha_2}^2}{2} - \frac{{\alpha_1}^2}{2}$
- $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \gamma \cdot t\, dt = \gamma \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} t\, dt$
- $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\Phi + \Psi)(t)\, dt = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Phi(t)\, dt + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Psi(t)\, dt$
- $(\forall \delta \in [\alpha_1, \alpha_2] \Phi(\delta) = \Psi(\delta)) \rightarrow \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Phi(t)\, dt = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Psi(t)\, dt$

- $(\forall \delta \in [\alpha_1, \alpha_2]\Phi(\delta) \leq \Psi(\delta)) \to \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Phi(t)\, dt \leq \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Psi(t)\, dt$.

Por seu turno, *existir contagem* significa que é válido o axioma da contagem considerando, segundo a observação 4.1, que tal contagem se faz em $\mathbb{N}_2$.

O estudo (introdutório) que se segue, tem em vista provar que, de facto, em BTFA é possível associar a cada conjunto de elementos de $\mathbb{N}_2$ uma função contínua com módulo de continuidade uniforme segundo o gráfico da figura anterior.

Seja X um conjunto de elementos de $\mathbb{N}_2$. Consideremos Φ_X definida do seguinte modo:

$(x, n)\Phi_X(y, k)$ se $x, y \in \mathbb{D} \wedge n, k \in \mathbb{N}_1 \wedge [(0 \leq x \wedge \exists m \in \mathbb{N}_2[m \leq x \wedge x - m < 1 \wedge (m \in X \wedge x \leq m + \frac{1}{2} \to |y - (4x - 4m)| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}}) \wedge (m \in X \wedge m + \frac{1}{2} < x \to |y - (-4x + 4(m+1))| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} \wedge (m \notin X \to |y| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}})]) \vee (x < 0 \wedge |y| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}})]$.

Proposição 4.4 *Φ_X é uma função contínua parcial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.*

Demonstração

Note que a asserção $0 \leq x \wedge \exists m \in \mathbb{N}_2[m \leq x \wedge x - m < 1 \wedge \ldots]$ é equivalente à asserção $0 \leq x \wedge \forall m \in \mathbb{N}_2[(m \leq x \wedge x - m < 1) \to \ldots]$, logo pode formar-se o conjunto Φ_X dos códigos dos quintuplos (ϵ, x, n, y, k) verificando a condição anterior.

• Vejamos que se $(x, n)\Phi_X(y, k)$ e $(x, n)\Phi_X(y', k')$ então $|y - y'| \leq 2^{-k} + 2^{-k'}$.

Suponhamos que $0 \leq x$. Seja m o elemento de $\mathbb{N}_2$ tal que $m \leq x \wedge x - m < 1$. Note que tal m é único.

Suponhamos que $m \in X \wedge x \leq m + \frac{1}{2}$. Por hipótese, $|y - 4x + 4m| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}}$ e $|y' - 4x + 4m| < \frac{1}{2^{k'}} - \frac{1}{2^{n-2}}$.

Logo $|y - y'| \leq |y - 4x + 4m| + |4x - 4m - y'| = |y - 4x + 4m| + |y' - 4x + 4m| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{k'}} - \frac{1}{2^{n-2}} \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k'}}$.

Caso $m \in X \wedge m + \frac{1}{2} < x$, a resolução é idêntica.

Suponhamos agora que $m \notin X$. Por hipótese $|y| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}}$ e $|y'| < \frac{1}{2^{k'}} - \frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y - y'| \leq |y| + |y'| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{k'}} - \frac{1}{2^{n-2}} < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k'}}$.

Caso $x < 0$ a resolução é idêntica.

• Vejamos que se $(x, n)\Phi_X(y, k)$ e $(x', n') < (x, n)$ então $(x', n')\Phi_X(y, k)$.

Estudamos apenas o caso em que $0 \leq x$, $0 \leq x'$ e $x' < x$. Os outros casos apresentam problemas idênticos.

Seja $m \in \mathbb{N}_2$ tal que $m \leq x \wedge x - m < 1$ e $m' \in \mathbb{N}_2$ tal que $m' \leq x' \wedge x' - m' < 1$.

Três situações podem ocorrer:

a) $m' \in X \wedge x' \leq m' + \frac{1}{2}$

b) $m' \in X \wedge m' + \frac{1}{2} < x'$

c) $m' \notin X$.

Como $x' < x$ temos que $m' = m$ ou $m = m' + 1$.

Suponhamos que $m = m'$.

Na situação $a)$, ou $m \in X \wedge x \leq m + \frac{1}{2}$, ou $m \in X \wedge m + \frac{1}{2} < x$.

No primeiro caso $|y - (4x - 4m)| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y - 4x' + 4m| \leq |y - 4x + 4m| + |4x - 4m - 4x' + 4m| \leq \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|x - x'| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n'}}) = \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n'-2}}$. Note que a última desigualdade resulta de, por hipótese, $(x', n') < (x, n)$, ou seja $|x - x'| + \frac{1}{2^{n'}} < \frac{1}{2^n}$.

No segundo caso temos $|y + 4x - 4(m + 1)| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}}$. Então $|y - 4x' + 4m| \leq |y + 4x - 4m - 4| + |-4x + 4m + 4 - 4x' + 4m| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|m + 1 - x + m - x'|$. Provando que $|m+1-x+m-x'| \leq |x-x'|$ vem que $|y-4x'+4m| \leq \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|x-x'| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n'}}) = \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n'-2}}$.

Para a situação $a)$ ficar completa, resta provar que $|m + 1 - x + m - x'| \leq x - x'$.

Seja $x' - m = a$, $m + \frac{1}{2} - x' = b$, $x - (m + \frac{1}{2}) = c$ e $m + 1 - x = d$. Sabemos que $0 \leq a, b, c, d$, $a + b + c + d = 1$, $a + b = \frac{1}{2}$ e $c + d = \frac{1}{2}$. Temos então que $|m + 1 - x + m - x'| = |d - a|$ e $x - x' = b + c$ e queremos provar que $|d - a| \leq b + c$. Suponhamos com vista a absurdo que $b + c < d - a$. Então $a + b + c < d$, o que é absurdo visto $d < \frac{1}{2} < a + b + c$. Suponhamos com vista a absurdo que $d - a < -b - c$. Tal é equivalente a $b + c < a - d$, ou seja $b + c + d < a$, o que é absurdo visto $a \leq \frac{1}{2} \leq b + c + d$.

Na situação $b)$, como $x' < x$, temos que $m \in X \wedge m + \frac{1}{2} < x$ e portanto $|y - (-4x + 4(m + 1))| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y - (-4x' + 4(m + 1))| \leq |y + 4x - 4(m + 1)| + |-4x + 4(m + 1) + 4x' - 4(m + 1)| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|x - x'| \leq \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n'-2}}$.

Na situação $c)$, como $m \notin X$ temos $|y| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n'-2}}$.

Suponhamos agora que $m' = m - 1$.

Na situação $a)$, como $m' \in X \wedge x' \leq m' + \frac{1}{2}$, ou $m \notin X$ ou $m \in X \wedge x \leq m + \frac{1}{2}$, pois se $m + \frac{1}{2} < x$ então $1 < |x - x'|$ o que não acontece.

No primeiro caso, como $m \notin X$ então $|y| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}}$. Mas então $|y - (4x' - 4m')| \leq |y| + |4x' - 4m'| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|x' - m'| \leq \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|x - x'| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n'-2}}$. A penúltima desigualdade resulta do facto de $|x' - m'| \leq \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} \leq |x - x'|$.

No segundo caso, como $m \in X \wedge x \leq m + \frac{1}{2}$, temos $|y - (4x - 4m)| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y - (4x' - 4m')| \leq |y - 4x + 4m| + |4x - 4m - 4x' + 4m'| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|x - 1 - x'| = \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|x - (x' + 1)| \leq \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|x - x'| \leq \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n'-2}}$. Na penúltima desigualdade, note que $|x - (x' + 1)| \leq \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} \leq |x - x'|$.

Nas situações $b)$ e $c)$, os três casos podem ocorrer: $m \in X \wedge x \leq m + \frac{1}{2}$ ou $m \in X \wedge m + \frac{1}{2} < x$ ou $m \notin X$. Em todos eles se usam raciocínios idênticos aos anteriores.

• Vejamos agora que se $(x, n)\Phi_X(y, k) \wedge (y, k) < (y', k')$ então $(x, n)\Phi_X(y', k')$.

Se $x < 0$, por hipótese sabemos que $|y| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}}$. Ainda por hipótese também sabemos que $|y' - y| + \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^{k'}}$.

Logo $|y'| \leq |y' - y| + |y| < \frac{1}{2^{k'}} - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{2^{k'}} - \frac{1}{2^{n-2}}$.

Se $0 \leq x$, seja $m \in \mathbb{N}_2$ tal que $m \leq x \wedge x - m < 1$. Três situações podem acontecer:

a) $m \in X \wedge x \leq m + \frac{1}{2}$

b) $m \in X \wedge m + \frac{1}{2} < x$

c) $m \notin X$.

Se ocorrer *a*), por hipótese $|y - (4x - 4m)| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y' - (4x - 4m)| \leq |y' - y| + |y - 4x + 4m| < \frac{1}{2^{k'}} - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{2^{k'}} - \frac{1}{2^{n-2}}$.

Se ocorrer *b*) a resolução é análoga à anterior e o caso *c*) resulta de um raciocínio idêntico ao já apresentado aquando do caso $x < 0$.

Portanto Φ_X é uma função contínua parcial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

□

Proposição 4.5 *A função* Φ_X *atrás definida é uma função contínua total, isto é,* $\forall\alpha \in \mathbb{R}(\alpha \in \mathrm{dom}\Phi_X)$.

Demonstração

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Queremos provar que $\alpha \in \mathrm{dom}\Phi_X$, i.e. $\forall k \in \mathbb{N}_1 \exists n \in \mathbb{N}_1 \exists y \in \mathbb{D}(\alpha(n+1), n)\Phi_X(y, k)$.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que α é um número real diádico e que se $\alpha = +x \cdot X$ então o caminho X não é um caminho infinito de 1's.

Se $\alpha < 0$, basta tomar $n := k + 3$ e $y := 0$.

Consideremos que $0 \leq \alpha$.

Seja m o maior número natural diádico tal que $m \leq \alpha$. Três situações podem ocorrer:

a) $m \in X \wedge \alpha \leq m + \frac{1}{2}$

b) $m \in X \wedge m + \frac{1}{2} < \alpha$

c) $m \notin X$.

• Suponhamos que se verifica *a*).

Fixemos $k \in \mathbb{N}_1$. Tomemos $n := k + 3 \in \mathbb{N}_1$ e $y := 4\alpha(n + 1) - 4m \in \mathbb{D}$ e vejamos que $(\alpha(k + 4), k + 3)\Phi_X(4\alpha(k + 4) - 4m, k)$.

Tem-se que $m \leq \alpha(k + 4)$ (note que α é um número real diádico nas condições atrás e $m \leq \alpha$) e também $\alpha(k + 4) - m < 1$ (note que $\alpha(0) = m$ e $m \leq \alpha(j) \leq \alpha, \forall j \in \mathbb{N}_1$).

Sabemos que $m \in X$ e $\alpha \leq m + \frac{1}{2}$, logo $\alpha(k + 4) \leq m + \frac{1}{2}$.

Resta provar que $|4\alpha(k + 4) - 4m - 4\alpha(k + 4) + 4m| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}$, o que se verifica visto a expressão à esquerda da desigualdade ser igual a zero.

• Suponhamos que se verifica *b*).

Fixemos $k \in \mathbb{N}_1$. Vejamos que tomando $n := k+3$ e $y := -4\alpha(n+1)+4(m+1)$ se tem $(\alpha(k + 4), k + 3)\Phi_X(-4\alpha(k + 4) + 4(m + 1), k)$.

Sabemos que $m \leq \alpha(k + 4)$, uma vez que $m \leq \alpha$ e α é um número real diádico nas condições anteriores, e também sabemos que $\alpha(k+4)-m < 1$ pois $m \leq \alpha(k+4) \leq \alpha < m+1$.

Por outro lado estamos na situação em que $m \in X$ e $m + \frac{1}{2} < \alpha$. Duas situações podem ocorrer: $\alpha(k + 4) \leq m + \frac{1}{2}$ ou $m + \frac{1}{2} < \alpha(k + 4)$.

Na primeira situação temos $\alpha(k+4) = m + \frac{1}{2}$.

$|-4\alpha(k+4)+4-4\alpha(k+4)+8m| = |-8\alpha(k+4)+8m+4| = |-8m-4+8m+4| = 0 < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}$.

Na segunda situação $|-4\alpha(k+4)+4(m+1)-(-4\alpha(k+4)+4(m+1))| = 0$ logo é também estritamente menor que $\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}$.

• Suponhamos que se verifica c).

Fixemos $k \in \mathbb{N}_1$. Tomando $n := k+3$ e $y := 0$ temos que $(\alpha(k+4), k+3)\Phi_X(0,k)$ uma vez que $m \leq \alpha(k+4)$, $\alpha(k+4) - m < 1$, $m \notin X$ e $|0| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}}$.

□

Proposição 4.6 *Seja Φ_X a função atrás definida e α um número real.*

a) Se $\alpha < 0$ então $\Phi_X(\alpha) = 0$.

b) Se $0 \leq \alpha$, seja m o maior número natural diádico tal que $m \leq \alpha$. Então

$$\Phi_X(\alpha) = 4\alpha - 4m \text{ se } m \in X \wedge \alpha \leq m + \tfrac{1}{2}$$
$$\Phi_X(\alpha) = -4\alpha + 4(m+1) \text{ se } m \in X \wedge m + \tfrac{1}{2} < \alpha \text{ e}$$
$$\Phi_X(\alpha) = 0 \text{ se } m \notin X.$$

Demonstração

a) Sejam $x, y \in \mathbb{D}$ e $n, k \in \mathbb{N}_1$ tais que $(x,n)\Phi_X(y,k) \wedge |\alpha - x| < \frac{1}{2^n}$. Queremos provar que $|0 - y| \leq \frac{1}{2^k}$.

Se $x < 0$ então $|y| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} < \frac{1}{2^k}$.

Se $0 \leq x$ então $0 \leq x < 1$ e $-1 < \alpha < 0$. Seja $m \in \mathbb{N}_2$ nas condições da definição de $(x,n)\Phi_X(y,k)$. Tal m tem de ser igual a zero.

Se $0 \notin X$ então $|y| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} < \frac{1}{2^k}$.

Se $0 \in X \wedge 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ então $|y - 4x| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y| \leq |y-4x| + |4x| \leq |y-4x| + |4x - 4\alpha| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{4}{2^n} = \frac{1}{2^k}$. Note que $|x| \leq |x - \alpha|$.

Se $0 \in X \wedge \frac{1}{2} < x < 1$ então $|y - (-4x + 4(m+1))| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y| \leq |y + 4x - 4(m+1)| + 4|x - (m+1)| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|x - \alpha| < \frac{1}{2^k}$. Note que $|x - (m+1)| < \frac{1}{2}$ e $|x - \alpha| > \frac{1}{2}$.

b) Sejam $0 \leq \alpha$ e m o maior número natural diádico tal que $m \leq \alpha$.

• Suponhamos que $m \in X \wedge \alpha \leq m + \frac{1}{2}$. Provemos que $\Phi_X(\alpha) = 4\alpha - 4m$.

Sejam $x, y \in \mathbb{D}$ e $n, k \in \mathbb{N}_1$ tais que $(x,n)\Phi_X(y,k) \wedge |\alpha - x| < \frac{1}{2^n}$. Queremos provar que $|4\alpha - 4m - y| \leq \frac{1}{2^k}$.

Se $x < 0$, então $\alpha < 1$ e $m = 0$, mas então $|\alpha - m| = |\alpha - x| - |x - m| < \frac{1}{2^n}$ e de $(x,n)\Phi_X(y,k)$ temos que $|y| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|4\alpha - 4m - y| \leq |y| + |4\alpha - 4m| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|\alpha - m| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{4}{2^n} = \frac{1}{2^k}$.

Se $0 \leq x$, seja $m' \in \mathbb{N}_2$ o elemento cuja existência é assegurada pela definição de $(x, n)\Phi_X(y, k)$. Três situações podem ocorrer: $m' = m - 1$, $m' = m$ ou $m' = m + 1$.

<u>1º Caso</u> $(m' = m - 1)$

Se $m - 1 \in X \wedge x \leq m - 1 + \frac{1}{2}$ então $|y - (4x - 4(m - 1))| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y - 4\alpha + 4m| \leq |y - 4x + 4(m-1)| + |4x - 4(m-1) - 4\alpha + 4m| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|x + 1 - \alpha| \leq \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|x - \alpha| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{2^k}$. Note que a penúltima desigualdade resulta de $|x + 1 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$ e de $|x - \alpha| \geq \frac{1}{2}$.

Se $m - 1 \in X \wedge m - 1 + \frac{1}{2} < x$ então $|y - (-4x + 4m)| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y - 4\alpha + 4m| \leq |y + 4x - 4m| + |-4x + 4m - 4\alpha + 4m| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|-x + 2m - \alpha| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|-x - \alpha| < \frac{1}{2^k}$.

Se $m - 1 \notin X$ então $|y| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y - 4\alpha + 4m| \leq |y| + |-4\alpha + 4m| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|m - \alpha| \leq \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|x - \alpha| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^k}$.

<u>2º Caso</u> $(m' = m)$

Sabemos que $m \in X$. Então ou $x \leq m + \frac{1}{2}$ ou $m + \frac{1}{2} < x$.

Se $x \leq m + \frac{1}{2}$ então $|y - (4x - 4m)| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y - 4\alpha + 4m| \leq |y - 4x + 4m| + |4x - 4\alpha| \leq |y - 4x + 4m| + 4|x - \alpha| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{4}{2^n} = \frac{1}{2^k}$.

Se $m + \frac{1}{2} < x$ então $|y + 4x - 4(m+1)| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y - 4\alpha + 4m| \leq |y + 4x - 4(m+1)| + |-4x + 4(m+1) - 4\alpha + 4m| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|-x + m - \alpha + m + 1| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|x - \alpha| < \frac{1}{2^k}$.

<u>3º Caso</u> $(m' = m + 1)$

Não pode acontecer $m + 1 + \frac{1}{2} < x$ pois $|x - \alpha| < 1$, logo ou $m + 1 \in X \wedge x \leq m + 1 + \frac{1}{2}$ ou $m + 1 \notin X$.

Na primeira situação temos $|y - (4x - 4(m + 1)| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y - 4\alpha + 4m| \leq |y - 4x + 4(m+1)| + |4x - 4 - 4\alpha| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|x - \alpha - 1| \leq \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|x - \alpha| < \frac{1}{2^k}$. Note que $|x - \alpha - 1| \leq \frac{1}{2}$ e $|x - \alpha| \geq \frac{1}{2}$.

Na segunda situação temos $|y| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y - 4\alpha + 4m| \leq |y| + |4m - 4\alpha| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|m - \alpha| \leq \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|x - \alpha| < \frac{1}{2^k}$. Note que $|m - \alpha| \leq \frac{1}{2}$ e $|x - \alpha| \geq \frac{1}{2}$.

• Suponhamos que $m \in X \wedge m + \frac{1}{2} < \alpha$. Provemos que $\Phi_X(\alpha) = -4\alpha + 4(m + 1)$.

Fixemos $x, y \in D$ e $n, k \in \mathbb{N}_1$ tais que $(x, n)\Phi_X(y, k) \wedge |\alpha - x| < \frac{1}{2^n}$. Queremos provar que $|-4\alpha + 4(m + 1) - y| \leq \frac{1}{2^k}$.

Se $x < 0$ então $|\alpha - x| > \frac{1}{2}$ e $|\alpha - (m+1)| \leq |\alpha - x| < \frac{1}{2^n}$. Mas então $|-4\alpha + 4(m+1) - y| \leq |y| + 4|\alpha - (m + 1)| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{2^k}$.

Se $0 \leq x$ consideremos m' o número natural diádico que existe pela definição de $(x, n)\Phi_X(y, k)$. Igualmente três situações podem ocorrer: $m' = m - 1$, $m' = m$ ou $m' = m + 1$.

<u>1º Caso</u> $(m' = m - 1)$

Se $m - 1 \in X \wedge m - 1 + \frac{1}{2} < x$ então $|y - (-4x + 4m)| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y + 4\alpha - 4(m+1)| \leq |y + 4x - 4m| + |-4x + 4\alpha - 4| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|-x + \alpha - 1| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|\alpha - x| = \frac{1}{2^k}$. Note que $|-x + \alpha - 1| \leq \frac{1}{2}$ e $|\alpha - x| \geq \frac{1}{2}$.

Se $m - 1 \notin X$ então $|y| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y + 4\alpha - 4(m + 1)| \leq |y| + |4\alpha - 4(m + 1)| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|\alpha - (m + 1)| \leq \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-2}} + 4|\alpha - x| \leq \frac{1}{2^k}$. Novamente $|\alpha - (m + 1)| \leq \frac{1}{2}$ e $|\alpha - x| \geq \frac{1}{2}$.

<u>2º Caso</u> ($m' = m$)

Se $x \leq m+\frac{1}{2}$ então $|y-(4x-4m)| < \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y+4\alpha-4(m+1)| < |y-4x+4m|+|4x-4m+4\alpha-4(m+1)| < \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}+4|x-m+\alpha-(m+1)| \leq \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}+4|x-\alpha| < \frac{1}{2^k}$.

Se $m+\frac{1}{2} < x$ então $|y-(-4x+4(m+1)| < \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y+4\alpha-4(m+1)| \leq |y+4x-4(m+1)|+|-4x+4\alpha| < \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}+4|x-\alpha| < \frac{1}{2^k}$.

<u>3º Caso</u> ($m' = m+1$)

Se $m+1 \in X \wedge x \leq m+1+\frac{1}{2}$ então $|y-(4x-4(m+1)| < \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y+4\alpha-4(m+1)| \leq |y-4x+4(m+1)|+|4x-4(m+1)+4\alpha-4(m+1)| < \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}+4|x-(m+1)+\alpha-(m+1)| \leq \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}+4|x-\alpha| < \frac{1}{2^k}$.

Se $m+1 \in X \wedge m+1+\frac{1}{2} < x$ então $|y-(-4x+4(m+2)| < \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y+4\alpha-4(m+1)| \leq |y+4x-4(m+2)|+|-4x+4+4\alpha| < \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}+4|-x+(1+\alpha)| \leq \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}+4|x-\alpha| \leq \frac{1}{2^k}$. Note que $|-x+(1+\alpha)| \leq \frac{1}{2}$ e $|x-\alpha| \geq \frac{1}{2}$.

Se $m+1 \notin X$ então $|y| < \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y+4\alpha-4(m+1)| \leq |y|+4|\alpha-(m+1)| < \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}+4|x-\alpha| < \frac{1}{2^k}$.

• Suponhamos que $m \notin X$ e provemos que $\Phi_X(\alpha) = 0$.

Fixemos $x, y \in \mathbb{D}$ e $n, k \in \mathbb{N}_1$ tais que $(x,n)\Phi_X(y,k) \wedge |\alpha - x| < \frac{1}{2^n}$. Queremos provar que $|y| \leq \frac{1}{2^k}$.

Se $x < 0$ então $|y| < \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}} < \frac{1}{2^k}$.

Se $0 \leq x$ seja m' o número natural diádico cuja existência é assegurada pela definição de $(x,n)\Phi_X(y,k)$. Novamente três situações podem ocorrer: $m' = m-1$, $m' = m$ ou $m' = m+1$.

<u>1º Caso</u> ($m' = m-1$)

Se $m-1 \in X \wedge x \leq m-1+\frac{1}{2}$ então $|y-(4x-4(m-1)| < \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y| \leq |y-4x+4(m-1)|+|4x-4(m-1)| < \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}+4|x-(m-1)| \leq \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}+4|x-\alpha| < \frac{1}{2^k}$. Note que $|x-(m-1)| \leq \frac{1}{2}$ ao passo que $|x-\alpha| \geq \frac{1}{2}$.

Se $m-1 \in X \wedge m-1+\frac{1}{2} < x$ então $|y-(-4x+4m)| < \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y| \leq |y-(-4x+4m)|+|-4x+4m| < \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}+4|x-m| < \frac{1}{2^k}$. Note que $|x-m| \leq |x-\alpha|$.

Se $m-1 \notin X$ então $|y| < \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}} < \frac{1}{2^k}$.

<u>2º Caso</u> ($m' = m$)

Mas então $m' \notin X$, logo $|y| < \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}} < \frac{1}{2^k}$.

<u>3º Caso</u> ($m' = m+1$)

Se $m+1 \in X \wedge x \leq m+1+\frac{1}{2}$ então $|y-(4x-4(m+1))| < \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y| \leq |y-4x+4(m+1)|+|4x-4(m+1)| < \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}+4|x-(m+1)| \leq \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}+4|x-\alpha| < \frac{1}{2^k}$.

Se $m+1 \in X \wedge m+1+\frac{1}{2} < x$ então $|y-(-4x+4(m+2))| < \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}$. Logo $|y| \leq |y+4x-4(m+2)|+|-4x+4(m+2)| < \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}+4|x-(m+2)| \leq \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}}+4|x-\alpha| < \frac{1}{2^k}$. Note que $|x-(m+2)| \leq \frac{1}{2}$ e $|x-\alpha| \geq \frac{1}{2}$.

Se $m+1 \notin X$ então $|y| < \frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{n-2}} < \frac{1}{2^k}$.

$\square$

Proposição 4.7 *A função Φ_X, atrás definida, tem módulo de continuidade uniforme.*

Demonstração

Consideremos a função h de $\mathbb{N}_1$ para $\mathbb{N}_1$ definida por $h(n) = n + 2$ e provemos que h é módulo de continuidade uniforme para Φ_X.

Dados $n \in \mathbb{N}_1$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $|\alpha - \beta| < \frac{1}{2^{h(n)}}$, queremos verificar que $|\Phi_X(\alpha) - \Phi_X(\beta)| < \frac{1}{2^n}$.

Se α e β são menores que zero, a asserção é trivial pois $|\Phi_X(\alpha) - \Phi_X(\beta)| = 0$. Se apenas um é negativo (sem perda de generalidade $\alpha < 0$), fixamos $m \in \mathbb{N}_2$ tal que $m \leq \beta$ e $\beta < m + 1$. Como $|\alpha - \beta| < \frac{1}{2^{n+2}}$, temos $m = 0$, logo apenas duas situações podem ocorrer: $0 \in X \wedge \beta \leq \frac{1}{2}$ ou $0 \notin X$. Na primeira situação $|\Phi_X(\alpha) - \Phi_X(\beta)| = |4\beta| = 4|\beta| \leq 4|\alpha - \beta| < 4 \cdot \frac{1}{2^{n+2}} = \frac{1}{2^n}$. Na segunda situação $|\Phi_X(\alpha) - \Phi_X(\beta)| = 0$, tendo-se o pretendido.

Suponhamos então que $0 \leq \alpha$ e $0 \leq \beta$.

Sejam m o maior número natural diádico tal que $m \leq \alpha$ e m' o maior número natural diádico tal que $m' \leq \beta$.

- Se $m \in X \wedge \alpha \leq m + \frac{1}{2}$ então $\Phi_X(\alpha) = 4\alpha - 4m$.

Duas situações podem ocorrer: $m' = m - 1$ ou $m' = m$.

Se $m' = m - 1$ então $m - 1 + \frac{1}{2} < \beta$, logo caso $m' \in X$ temos $\Phi_X(\beta) = -4\beta + 4m$ e $|\Phi_X(\alpha) - \Phi_X(\beta)| = |4\alpha - 4m + 4\beta - 4m| = 4|\alpha - m + \beta - m| \leq 4|\alpha - \beta| < \frac{4}{2^{h(n)}} = \frac{1}{2^n}$; caso $m' \notin X$ temos $\Phi_X(\beta) = 0$ e $|\Phi_X(\alpha) - \Phi_X(\beta)| = |4\alpha - 4m| \leq 4|\alpha - \beta| < \frac{4}{2^{h(n)}} = \frac{1}{2^n}$.

Se $m' = m$ então caso $\beta \leq m + \frac{1}{2}$ temos $\Phi_X(\beta) = 4\beta - 4m$ e $|\Phi_X(\alpha) - \Phi_X(\beta)| = |4\alpha - 4m - 4\beta + 4m| = 4|\alpha - \beta| < \frac{4}{2^{h(n)}} = \frac{1}{2^n}$; caso $m + \frac{1}{2} < \beta$ temos $\Phi_X(\beta) = -4\beta + 4(m+1)$ e $|\Phi_X(\alpha) - \Phi_X(\beta)| = |4\alpha - 4m + 4\beta - 4(m+1)| = 4|\alpha - m + \beta - (m+1)| \leq 4|\alpha - \beta| < \frac{1}{2^n}$.

- Se $m \in X \wedge m + \frac{1}{2} < \alpha$ então $\Phi(\alpha) = -4\alpha + 4(m+1)$. Duas situações podem ocorrer: $m' = m$ ou $m' = m + 1$.

Se $m' = m$ então, caso $\beta \leq m + \frac{1}{2}$ temos $\Phi_X(\beta) = 4\beta - 4m$ e $|\Phi_X(\alpha) - \Phi_X(\beta)| = |-4\alpha + 4(m+1) - 4\beta + 4m| = 4|m + 1 - \alpha + m - \beta| \leq 4|\alpha - \beta| < \frac{1}{2^n}$; caso $m + \frac{1}{2} < \beta$ temos $\Phi_X(\beta) = -4\beta + 4(m+1)$ e $|\Phi_X(\alpha) - \Phi_X(\beta)| = |-4\alpha + 4(m+1) + 4\beta - 4(m+1)| = 4|\alpha - \beta| < \frac{1}{2^n}$.

Se $m' = m+1$ sabemos que $\beta \leq m + 1 + \frac{1}{2}$. Caso $m+1 \in X$ temos $\Phi_X(\beta) = 4\beta - 4(m+1)$, logo $|\Phi_X(\alpha) - \Phi_X(\beta)| = |-4\alpha + 4(m+1) - 4\beta + 4(m+1)| = 4|-\alpha + m + 1 - \beta + m + 1| < 4|\alpha - \beta| < \frac{1}{2^n}$. Caso $m+1 \notin X$ então $\Phi_X(\beta) = 0$, logo $|\Phi_X(\alpha) - \Phi_X(\beta)| = |-4\alpha + 4(m+1)| = 4|m + 1 - \alpha| \leq 4|\alpha - \beta| < \frac{1}{2^n}$.

- Se $m \notin X$ então $\Phi_X(\alpha) = 0$. Ou temos $m \leq \alpha \leq m + \frac{1}{2}$ ou $m + \frac{1}{2} < \alpha < m + 1$.

Na primeira situação ou $m - 1 + \frac{1}{2} < \beta < m$ ou $m \leq \beta < m + 1$. Suponhamos $m - 1 + \frac{1}{2} < \beta < m$. Caso $m - 1 \in X$ temos $\Phi_X(\beta) = -4\beta + 4m$, logo $|\Phi_X(\alpha) - \Phi_X(\beta)| = |4\beta - 4m| \leq 4|\beta - \alpha| < \frac{1}{2^n}$. Caso $m - 1 \notin X$ temos $\Phi_X(\beta) = 0$, logo $|\Phi_X(\alpha) - \Phi_X(\beta)| = 0 < \frac{1}{2^n}$.

Se $m \leq \beta < m + 1$ então $\Phi_X(\beta) = 0$, logo $|\Phi_X(\alpha) - \Phi_X(\beta)| = 0 < \frac{1}{2^n}$.

Na segunda situação ou $m \leq \beta < m + 1$ ou $m + 1 \leq \beta \leq m + 1 + \frac{1}{2}$. Se $m \leq \beta < m + 1$ então $\Phi_X(\beta) = 0$ tendo-se o pretendido. Analisemos agora o caso $m + 1 \leq \beta \leq m + 1 + \frac{1}{2}$. Se $m+1 \in X$ então $\Phi_X(\beta) = 4\beta - 4(m+1)$, logo $|\Phi_X(\alpha) - \Phi_X(\beta)| = |4\beta - 4(m+1)| = 4|\beta - (m+

$1)| \leq 4|\alpha - \beta| < \frac{1}{2^n}$. Se $m+1 \notin X$ então $\Phi_X(\beta) = 0$ e portanto $|\Phi_X(\alpha) - \Phi_X(\beta)| = 0 < \frac{1}{2^n}$.

$\square$

A seguinte proposição destaca duas propriedades dos integrais das funções associadas a conjuntos.

Proposição 4.8 *Em* BTFA *enriquecida com integração, consideremos X um subconjunto de $\mathbb{N}_2$, $a \in \mathbb{N}_2$, Φ_X a função contínua associada a X (segundo a definição atrás) considerada como função total em $[0, a+1]$ e G_{Φ_X} a função integral de Φ_X. Temos:*

a) Dado $b \in \mathbb{N}_2$ tal que $b \leq a$, então $\int_b^{b+1} \Phi_X(t)\, dt = \begin{cases} 0 & se\ b \notin X \\ 1 & se\ b \in X \end{cases}$

b) Dados $b \in \mathbb{N}_2$ tal que $b \leq a$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $b < \alpha < b+1$, então $\int_\alpha^{b+1} \Phi_X(t)\, dt < 1$.

Demonstração

a) $\int_b^{b+1} \Phi_X(t)\, dt = \int_b^{b+\frac{1}{2}} \Phi_X(t)\, dt + \int_{b+\frac{1}{2}}^{b+1} \Phi_X(t)\, dt$.

Se $b \notin X$, a anterior soma fica $\int_b^{b+\frac{1}{2}} 0 + \int_{b+\frac{1}{2}}^{b+1} 0 = 0$.

Se $b \in X$ então a anterior soma fica $\int_b^{b+\frac{1}{2}} 4t - 4b\, dt + \int_{b+\frac{1}{2}}^{b+1} -4t + 4(b+1)\, dt = 4 \int_b^{b+\frac{1}{2}} t\, dt + \int_b^{b+\frac{1}{2}} (-4b)\, dt - 4 \int_{b+\frac{1}{2}}^{b+1} t\, dt + \int_{b+\frac{1}{2}}^{b+1} 4(b+1)\, dt = 4(\frac{(b+\frac{1}{2})^2}{2} - \frac{b^2}{2}) - 4b\frac{1}{2} - 4(\frac{(b+1)^2}{2} - \frac{(b+\frac{1}{2})^2}{2}) + 4(b+1)\frac{1}{2} = 4(b+\frac{1}{2})^2 - 4b^2 - 4b = 1$.

b) $\int_b^{b+1} \Phi_X(t)\, dt = \int_b^{\alpha} \Phi_X(t)\, dt + \int_\alpha^{b+1} \Phi_X(t)\, dt$. Como $\forall t,\ 0 \leq \Phi_X(t)$, temos que $0 \leq \int_b^\alpha \Phi_X(t)\, dt$. Por *a*), sabemos que $\int_b^{b+1} \Phi_X(t)\, dt \leq 1$. Logo concluimos que $\int_\alpha^{b+1} \Phi_X(t)\, dt \leq 1$.

Se $b \notin X$ então os três integrais são iguais a zero, logo temos o pretendido.

Suponhamos que $b \in X$. Basta provar que $\int_b^\alpha \Phi_X(t)\, dt > 0$, pois se tal for o caso, pela primeira parte da demonstração fica provado que $\int_\alpha^{b+1} \Phi_X(t)\, dt$ é estritamente menor que 1.

Seja $b < \gamma \leq \alpha$ tal que $\gamma \leq b + \frac{1}{2}$. $\int_b^\alpha \Phi_X(t)\, dt \geq \int_b^\gamma \Phi_X(t)\, dt = \int_b^\gamma 4t - 4b\, dt = 4\int_b^\gamma t\, dt + \int_b^\gamma -4b\, dt = 4(\frac{\gamma^2}{2} - \frac{b^2}{2}) - 4b(\gamma - b) = 2(\gamma - b)^2 > 0$.

$\square$

Afim de provarmos que BTFA + *integração* verifica o axioma da contagem, debrucemo-nos sobre a *indução lenta* de tal sistema.

É um resultado bem conhecido que o seguinte axioma de indução lenta para conjuntos

$$\forall X(0 \in X \wedge \forall a \in \mathbb{N}_2(a \in X \to a+1 \in X) \to \forall a \in \mathbb{N}_2(a \in X))$$

é válido em BTFA (veja [15]). Contudo como veremos, na presença de *integração*, BTFA admite um tipo mais forte de indução lenta, nomeadamente, *indução lenta para fórmulas* Σ_1^b, i.e.

Proposição 4.9 BTFA + integração $\vdash \varphi(0) \wedge \forall a \in \mathbb{N}_2(\varphi(a) \rightarrow \varphi(a+1)) \rightarrow \forall a \in \mathbb{N}_2(\varphi(a))$, *com* φ *uma fórmula* Σ_1^b, *possivelmente com parâmetros de segunda ordem.*

A demonstração do resultado anterior é conseguida recorrendo ao seguinte *princípio de minimização*:

$$(\star)\ \forall a \in \mathbb{N}_2 \forall X(a \in X \rightarrow \exists b \in \mathbb{N}_2(b \in X \wedge \forall c \in \mathbb{N}_2(c < b \rightarrow c \notin X))).$$

Do estudo efectuado em [13] (página 90), sabemos que (em BTFA) o princípio da minimização $(\star)$ e o esquema de indução lenta para fórmulas Σ_1^b são equivalentes.

Assim sendo, a proposição 4.9 fica imediatamente estabelecida se provarmos o seguinte resultado:

Proposição 4.10 *Sobre* BTFA, *integração implica o princípio de minimização* $(\star)$.

Demonstração

Raciocinemos em BTFA. Suponhamos que temos *integração.*

Sejam $a \in \mathbb{N}_2$ e X tais que $a \in X$.

Tomemos

$$Y := \{b \in \mathbb{N}_2 : b \leq a \wedge b \in X\}.$$

Consideremos Φ_Y a função contínua associada ao conjunto Y, de acordo com o estudo introdutório anteriormente efectuado. Como Φ_Y é uma função contínua total em $[0, a+1]$ com módulo de continuidade uniforme nesse intervalo e por hipótese temos *integração*, existe a função integral de Φ_Y, i.e. uma função contínua total em $[0, a+1]$, G_{Φ_Y}, denotada por $G_{\Phi_Y}(\alpha) = \int_0^\alpha \Phi_Y(t)\, dt$, verificando as propriedades da integração.

Temos, em particular, que:

$$G_{\Phi_Y}(0) = 0 \text{ e}$$

$$G_{\Phi_Y}(a+1) = \int_0^{a+1} \Phi_Y(t)\, dt = \int_0^a \Phi_Y(t)\, dt + \int_a^{a+1} \Phi_Y(t)\, dt \geq 1.$$

Na última desigualdade note que $\int_a^{a+1} \Phi_Y(t)\, dt = 1$ porque a é um elemento em Y (veja proposição 4.8).

Pelo *teorema do valor médio de Bolzano* (uma adaptação do resultado provado em [10]), existe um número real α tal que $\alpha \in]0, a+1] \wedge G_{\Phi_Y}(\alpha) = 1$.

Seja m o número natural diádico tal que $m < \alpha \leq m+1$.

Vamos provar que

($) existe exactamente um número natural diádico menor ou igual que m em Y.

A demonstração é feita em dois passos. Primeiro mostramos que *existe quando muito um* número natural diádico nessas condições e depois mostramos que *existe pelo menos um.*

Para mostrar que existe no máximo um elemento em $\mathbb{N}_2$ nessas condições, suponhamos com vista a obter uma contradição, que existem dois números naturais diádicos b_1 e b_2 (diferentes) ambos em Y tais que $b_1, b_2 \leq m$.

Sem perda de generalidade, podemos considerar que $b_1 < b_2$.

Ou $b_2 < m$ ou $b_2 = m$.

No primeiro caso, como $b_2 + 1 \in \mathbb{N}_2$, temos $b_2 + 1 < \alpha$, logo $G_{\Phi_Y}(b_2 + 1) \leq G_{\Phi_Y}(b_2 + 1) + \int_{b_2+1}^{\alpha} \Phi_Y(t)\, dt = G_{\Phi_Y}(\alpha) = 1$.

No segundo caso $b_2 < \alpha \leq b_2 + 1$, logo $G_{\Phi_Y}(b_2 + 1) = G_{\Phi_Y}(\alpha) + \int_{\alpha}^{b_2+1} \Phi_Y(t)\, dt = 1 + \int_{\alpha}^{b_2+1} \Phi_Y(t)\, dt < 2$.

Vemos assim que em ambos os casos $G_{\Phi_Y}(b_2 + 1) < 2$.

Mas $G_{\Phi_Y}(b_2 + 1) = G_{\Phi_Y}(b_1 + 1) + \int_{b_1+1}^{b_2+1} \Phi_Y(t)\, dt \geq 2$ (note que $b_1 \in Y$ e $b_2 \in Y$). Obtemos assim uma contradição.

Para demonstrar que existe pelo menos um número natural diádico menor ou igual que m em Y, suponhamos, afim de obter uma contradição que $\forall c \in \mathbb{N}_2(c \leq m \rightarrow c \notin Y)$.

Mas então $\int_0^{m+1} \Phi_Y(t)\, dt = \int_0^{m+1} 0 = 0$ e $\int_0^{m+1} \Phi_Y(t)\, dt = \int_0^{\alpha} \Phi_Y(t)\, dt + \int_{\alpha}^{m+1} \Phi_Y(t)\, dt \geq 1$, contradição.

Por (\$), é fácil verificar que $\exists b \in \mathbb{N}_2(b \in X \wedge \forall c \in \mathbb{N}_2(c < b \rightarrow c \notin X))$.

$\square$

Estamos agora em condições de demonstrar o resultado chave desta secção.

Proposição 4.11 $\mathsf{BTFA} \vdash$ *integração $\rightarrow$ contagem.*

Demonstração

A demonstração segue a seguinte estratégia.

Sobre BTFA, suponhamos que existe *integração* e fixemos F um subconjunto finito de $\mathbb{N}_2$. Seja t um número natural diádico tal que $\forall x(x \in F \rightarrow x \leq t)$ e seja n um número *tally* tal que $t + 2 \leq 2^{n-1}$.

Consideremos Φ_F a função contínua associada a F (de acordo com o estudo introdutório).

Tomemos G_{Φ_F} a função integral de Φ_F, i.e. a função contínua total em $[0, t{+}1]$, denotada por $G_{\Phi_F}(\alpha) = \int_0^{\alpha} \Phi_F(t)\, dt$, verificando as propriedades da integração. Tal função existe por hipótese.

Sabemos que

$$\forall a \leq t \exists q \in \mathbb{D} | \int_0^{a+1} \Phi_F(t)\, dt - q| < \tfrac{1}{2^{n+1}}.$$

Como $| \int_0^{a+1} \Phi_F(t)\, dt - q| < \frac{1}{2^{n+1}}$ é uma fórmula $\exists\Sigma_1^b$, é equivalente a $\exists w \theta(w, a, q)$, com θ uma fórmula Σ_1^b.

Considerando a asserção acima na forma

$$\forall a \leq t \exists q \exists w (q \in \mathbb{D} \wedge \theta(w, a, q))$$

e aplicando o *esquema de colecção limitada*, temos que

$$\exists s \forall a \leq t \exists q \preceq s \exists w \preceq s (q \in \mathbb{D} \wedge \theta(w, a, q)).$$

Fixemos s como anteriormente. Então

$$(*)\ \forall a \leq t \exists q \preceq s (q \in \mathbb{D} \wedge \exists w \preceq s \theta(w, a, q))$$

e em particular para esse q

$$(**)\ |\int_0^{a+1} \Phi_F(t)\, dt - q| < \tfrac{1}{2^{n+1}}.$$

Seja $\varphi(a, j)$ a seguinte fórmula Σ_1^b:

$$a \in \mathbb{N}_2 \wedge j \in \mathbb{N}_2 \wedge a \leq t \wedge \exists q \preceq s \exists w \preceq s (q \in \mathbb{D} \wedge \theta(w, a, q) \wedge |q - j| < \tfrac{a+1}{2^n}).$$

Observemos o seguinte facto:

Facto 4.1 BTFA + *integração demonstra:*

a) $\forall a \leq t \exists j \leq a + 1 \varphi(a, j)$ *(existência)*

b) $\varphi(a, j) \wedge \varphi(a, j') \rightarrow j = j'$ *(unicidade).*

Provando o facto anterior temos que, $\varphi(a, j)$ é equivalente à fórmula Π_1^b $a \leq t \wedge \forall j' \leq a + 1(\varphi(a, j') \rightarrow j = j')$. Logo, BTFA tem compreensão suficiente para garantir a existência do conjunto:

$$C := \{\langle a, j \rangle : \varphi(a, j)\},$$

onde $\langle a, j \rangle$ denota o código para o par de números naturais diádicos (a, j).

O seguinte facto:

Facto 4.2 *O conjunto C, acima definido, verifica* Count(C, F).

assegura o resultado pretendido.

Resta provar os dois resultados anteriores, apresentados como factos.

Demonstração do Facto 4.1.

a) A existência é demonstrada por indução lenta em $a \leq t$ (possível pela proposição 4.9).

Se $a = 0$ duas situações podem ocorrer: $a \notin F$ ou $a \in F$.

No primeiro caso, tomemos $j := 0$. Sabemos por $(*)$ e $(**)$ que existem $q \preceq s$ e $w \preceq s$ tais que $q \in \mathbb{D} \wedge \theta(w, a, q)$ e $|\int_0^1 \Phi_F(t)\, dt - q| < \frac{1}{2^{n+1}}$. Pela proposição 4.8, como $a \notin F$, $\int_0^1 \Phi_F(t)\, dt = 0$. Logo, $|q - j| = |q| < \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}$ e temos $\varphi(a, j)$.

O segundo caso admite uma análise semelhante, tomando $j := 1$ e notando que $\int_0^1 \Phi_F(t)\, dt = 1$.

Para provarmos o passo de indução, fixemos $a < t$ e suponhamos, por hipótese de indução, que existe $j \leq a+1$ tal que $\varphi(a, j)$.

Duas situações podem ocorrer: $a+1 \in F$ ou $a+1 \notin F$.

No primeiro caso, tomemos $j' := j+1$. Novamente, por $(*)$ e $(**)$ existem $q' \preceq s$ e $w' \preceq s$ tais que $q' \in \mathbb{D} \wedge \theta(w', a+1, q')$ e $| \int_0^{a+2} \Phi_F(t)\, dt - q'| < \frac{1}{2^{n+1}}$. Para provarmos que $\varphi(a+1, j+1)$ apenas precisamos mostrar que $|q' - (j+1)| < \frac{a+2}{2^n}$.

Note que $\int_0^{a+2} \Phi_F(t)\, dt = \int_0^{a+1} \Phi_F(t)\, dt + 1$, logo

$$\begin{aligned}
|q' - (j+1)| &\leq |q' - \int_0^{a+2} \Phi_F(t)\, dt| + |\int_0^{a+1} \Phi_F(t)\, dt - q| + |q - j| \\
&< \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{a+1}{2^n} \\
&= \frac{a+2}{2^n}.
\end{aligned}$$

O caso $a+1 \notin F$ é analisado exactamente da mesma forma. Note apenas que $\int_0^{a+2} \Phi_F(t)\, dt = \int_0^{a+1} \Phi_F(t)\, dt$ e tome $j' := j$.

$b)$ Sejam a, j e j' números naturais diádicos verificando $\varphi(a, j)$ e $\varphi(a, j')$.

Então, existe q tal que

$$| \int_0^{a+1} \Phi_F(t)\, dt - q| < \tfrac{1}{2^{n+1}} \text{ e } |q - j| < \tfrac{a+1}{2^n}$$

e existe q' tal que

$$| \int_0^{a+1} \Phi_F(t)\, dt - q'| < \tfrac{1}{2^{n+1}} \text{ e } |q' - j'| < \tfrac{a+1}{2^n}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|j - j'| &\leq |j - q| + |q - \int_0^{a+1} \Phi_F(t)\, dt| + |\int_0^{a+1} \Phi_F(t)\, dt - q'| + |q' - j'| \\
&< \frac{a+1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{a+1}{2^n} \\
&= \frac{a+2}{2^n} + \frac{a+1}{2^n} \\
&< 1.
\end{aligned}$$

Observe, na desigualdade anterior, que $\frac{a+2}{2^n} \leq \frac{1}{2}$ porque $a+2 \leq t+2 \leq 2^{n-1}$.

Como j e j' pertencem a $\mathbb{N}_2$ e $|j - j'| < 1$ temos que $j = j'$.

$\square_{\textit{Facto 4.1}}$

Demonstração do Facto 4.2.

A demonstração é imediata a partir da definição do conjunto C e do estudo efectuado na alínea $a)$ acima.

$\square_{\textit{Facto 4.2}}$

$\square$

4.3 Alicerces com vista à integração

Esta secção, onde são introduzidas e desenvolvidas mais noções e propriedades em TCA^2 tendo em vista a formalização do integral de Riemann, pode ser encarada como um apêndice da secção seguinte, onde tal formalização é apresentada.

Embora nem sempre mencionado explicitamente, o estudo que se segue decorre em TCA^2 e, por *função* continuamos a referir-nos ao conjunto de palavras binárias que codificam os pares ordenados que caracterizam dada função.

Observação 4.5
- *Sendo f uma função de X para Y, com $X, Y \subseteq \mathbb{W}$ (por exemplo $f : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{D}$, $f : \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_2 \to \mathbb{N}_2, ...$), a fórmula $\theta(x) := \theta'(x, f(x))$[4], com θ' uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$, é equivalente a uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$. Note que $\theta(x)$ se pode exprimir nas seguintes formas equivalentes: $\exists y(f(x) = y \wedge \theta'(x, y))$ ou $\forall y(f(x) = y \to \theta'(x, y))$, podendo, por compreensão recursiva (válida em TCA^2) formar-se o conjunto $Z := \{x : \theta(x)\}$, sendo $\theta(x)$ equivalente a $x \in Z$.*

- *Seja $\theta(x, y)$ uma fórmula $\exists\Sigma_1^{1,b}$. Se em TCA^2 for possível provarmos que $\forall x \exists y \theta(x, y)$ e tal y for único, então $\theta(x, y)$ é equivalente a uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$, pois podemos formar o conjunto $\{\langle x, y\rangle : \theta(x, y)\}$. Para tal, basta observarmos que, em TCA^2, se tem compreensão recursiva e $\underbrace{\theta(x, y)}_{\text{fórmula } \exists\Sigma_1^{1,b}} \leftrightarrow \underbrace{\forall y'(\theta(x, y') \to y = y')}_{\text{fórmula } \forall\Pi_1^{1,b}}$. Obviamente tal resultado permanece válido quando nos restringimos a $x \in \mathbb{N}_1$ ou $x \in \mathbb{N}_2$.*

No que se segue, denotamos por X um qualquer subconjunto de $\mathbb{W}$. Convencionamos que, sendo X o conjunto vazio, $X \times Y$ coincide com Y.

Lema 4.2 *Sendo f uma função de $X \times \mathbb{N}_2$ para $\mathbb{N}_2$, existe g uma função de $X \times \mathbb{N}_2$ para $\mathbb{N}_2$ tal que $\forall x \in X \forall n \in \mathbb{N}_2 \forall i \leq_{\mathbb{N}_2} n(f(x, i) \leq g(x, n))$.*[5]

Demonstração

Seja f uma função de $X \times \mathbb{N}_2$ para $\mathbb{N}_2$ e sejam $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}_2$. Obviamente tem-se que $\forall i \leq_{\mathbb{N}_2} n \exists s f(x, i) \leq s$, bastando tomar s como sendo $f(x, i)$. Por colecção limitada $\exists r' \forall i \leq_{\mathbb{N}_2} n \exists s \preceq r' f(x, i) \leq s$. Logo $\exists r \forall i \leq_{\mathbb{N}_2} n f(x, i) \leq r$, bastando tomar $r = 1 \times r'$, e portanto $\forall x \in X \forall n \in \mathbb{N}_2 \exists r \in \mathbb{N}_2 \forall i \leq_{\mathbb{N}_2} n f(x, i) \leq r$.

Seja ϕ a fórmula $\Sigma_0^{1,b}$ definida por $\phi(x, n, r) := \forall i \leq_{\mathbb{N}_2} n f(x, i) \leq_{\mathbb{N}_2} r$.

Consideremos o conjunto $g := \{\langle\langle x, n\rangle, r\rangle : x \in X \wedge n \in \mathbb{N}_2 \wedge r \in \mathbb{N}_2 \wedge \phi(x, n, r) \wedge \forall r' < r \neg\phi(x, n, r')\}$. Como $\forall x \in X \forall n \in \mathbb{N}_2 \exists r \in \mathbb{N}_2 \phi(x, n, r)$, por minimização temos que $\forall x \in X \forall n \in \mathbb{N}_2 \exists r(\phi(x, n, r) \wedge \forall r' < r \neg\phi(x, n, r'))$. Logo g é uma função de $X \times \mathbb{N}_2$ para $\mathbb{N}_2$ e tem-se que $\forall x \in X \forall n \in \mathbb{N}_2 \forall i \leq_{\mathbb{N}_2} n f(x, i) \leq g(x, n)$.

□

[4] A observação permanece válida se considerarmos outras funções em θ' além de f, tomando-se apenas uma para facilitar a notação.

[5] Note que os elementos de X podem tratar-se de códigos de sequências, pelo que f pode ser considerada uma função com várias variáveis.

Teorema 4.1 *Dada* $f : X \times \mathbb{N}_2 \to \mathbb{N}_2$ *uma função, existe* Σ_f *uma função de* $X \times \mathbb{N}_2$ *para* $\mathbb{N}_2$ *tal que* $\forall x \in X \forall n \in \mathbb{N}_2 [\Sigma_f(x,0) = f(x,0) \wedge \Sigma_f(x,n+1) = \Sigma_f(x,n) + f(x,n+1)]$.

Demonstração

Informalmente notemos que, para todo o x em X, se tem
$f(x,0) + f(x,1) + \cdots + f(x,n) = \#\{v : v <_{\mathbb{N}_2} f(x,0)\} + \cdots + \#\{v : v <_{\mathbb{N}_2} f(x,n)\} = \#\{\langle v,i\rangle : i \leq_{\mathbb{N}_2} n \wedge v <_{\mathbb{N}_2} f(x,i)\} = \#\{u : \exists i, v \preceq u(u = \langle v,i\rangle \wedge i \leq_{\mathbb{N}_2} n \wedge v <_{\mathbb{N}_2} f(x,i))\}$, onde $\#$ é o número de elementos do conjunto em $\mathbb{N}_2$.

Dados $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}_2$ seja Z o conjunto $\{u : \exists i, v \preceq u(u = \langle v,i\rangle \wedge i \leq_{\mathbb{N}_2} n \wedge v <_{\mathbb{N}_2} f(x,i))\}$. Pelo lema 4.2, sabemos que existe uma função g tal que $u \in Z \to u \preceq \langle g(x,n), n\rangle$. Sendo $t := \langle g(x,n), n\rangle$, pelo axioma da contagem em $\mathbb{N}_2$ (veja observação 4.1), existe $C \preceq (tt11)(tt11)$ tal que $\langle i,j\rangle \in C$ sse existem j elementos de $\mathbb{N}_2$ menores ou iguais que i em Z.

Seja $\Sigma_f = \{\langle\langle x,n\rangle, s\rangle : x \in X \wedge n \in \mathbb{N}_2 \wedge \exists Z \preceq \overbrace{\langle g(x,n), n\rangle}^{t} \exists C \preceq (tt11)(tt11)(\forall u \preceq \langle g(x,n), n\rangle (u \in Z \leftrightarrow \exists i, v \preceq u(u = \langle v,i\rangle \wedge i \leq n \wedge v < f(x,i))) \wedge \mathsf{Count}(C,Z) \wedge \langle\langle g(x,n), n\rangle, s\rangle \in C)\}$. Como para todo $x \in X, n \in \mathbb{N}_2$ existe um e um só s nas condições atrás, temos, pela observação 4.5, que o conjunto Σ_f existe de facto em TCA^2 e facilmente se prova (veja fórmula Count no axioma da contagem) que define uma função que verifica $\Sigma_f(x,0) = f(x,0)$ e $\Sigma_f(x,n+1) = \Sigma_f(x,n) + f(x,n+1), \forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}_2$.

$\square$

Estendemos, nas proposições seguintes, a noção de *soma ao longo de* $\mathbb{N}_2$ a elementos de $\mathbb{D}_0^+$ (números racionais diádicos não negativos) e posteriormente a elementos de $\mathbb{D}$, provando algumas propriedades da mesma.

Proposição 4.12 *Dada* f *uma função de* $X \times \mathbb{N}_2$ *para* $\mathbb{D}_0^+$*, existe* Σ_f *uma função de* $X \times \mathbb{N}_2$ *para* $\mathbb{D}_0^+$ *tal que* $\Sigma_f(x,0) = f(x,0)$ *e* $\Sigma_f(x,n+1) = \Sigma_f(x,n) + f(x,n+1)$*, para todo* $x \in X$*, para todo* $n \in \mathbb{N}_2$*.*

Demonstração

Seja $f : X \times \mathbb{N}_2 \to \mathbb{D}_0^+$ uma função. Consideremos uma função $g : X \times \mathbb{N}_2 \to \mathbb{N}_2$ tal que $\forall x \in X \forall n \in \mathbb{N}_2 \forall i \leq_{\mathbb{N}_2} n(f(x,i) \leq_{\mathbb{N}_2} g(x,n))$. A existência de tal função resulta do lema 4.2, tendo em conta que os códigos dos racionais diádicos podem ser considerados elementos de $\mathbb{N}_2$.

Seja $f' : X \times \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_2 \to \mathbb{N}_2$ a função definida por $f'(x,l,n) = f(x,n) \cdot_{\mathbb{D}} 2^{1 \times g(x,l)}$ se $n \leq_{\mathbb{N}_2} l$, ou $f'(x,l,n) = 0$, caso contrário. Note que $\mathbb{N}_1 \subseteq \mathbb{N}_2$, logo $l \in \mathbb{N}_1$ pode ser visto como um elemento de $\mathbb{N}_2$. Observe ainda que f' pode ser considerada uma função com conjunto de chegada $\mathbb{N}_2$ (em sentido mais restrito, sem apelar a códigos), uma vez que, sendo as imagens elementos da forma $m \cdot \epsilon$, podem ser encaradas como números naturais conforme a observação 4.2.

Pela proposição 4.1, existe $\Sigma_{f'} : X \times \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_2 \to \mathbb{N}_2$ verificando: $\forall x \in X \forall k \in \mathbb{N}_1 \forall n \in \mathbb{N}_2$ $[\Sigma_{f'}(x,k,0) = f'(x,k,0) \wedge \Sigma_{f'}(x,k,n+1) = \Sigma_{f'}(x,k,n) + f'(x,k,n+1)]$.

Seja $\Sigma_f : X \times \mathbb{N}_2 \to \mathbb{D}_0^+$ a função definida por $\Sigma_f(x,n) = 2^{-1 \times g(x,1 \times n)} \Sigma_{f'}(x, 1 \times n, n)$.

Provemos que $\Sigma_f(x,0) = f(x,0)$ e $\Sigma_f(x,n+1) = \Sigma_f(x,n) + f(x,n+1)$.

$\Sigma_f(x,0) = 2^{-1\times g(x,0)}\Sigma_{f'}(x,0,0) = 2^{-1\times g(x,0)}f'(x,0,0) = 2^{-1\times g(x,0)}f(x,0)\cdot 2^{1\times g(x,0)} = f(x,0)$.

Quanto à segunda igualdade, comecemos por demonstrar, por indução em $n \in \mathbb{N}_2$, que

$$(\star)\ \forall x \in X \forall k \in \mathbb{N}_1 \forall n \in \mathbb{N}_2 (n \leq k \to \\ \to 2^{-1\times g(x,k)}\Sigma_{f'}(x,k,n) = 2^{-1\times g(x,k+_{\mathbb{N}_1}1)}\Sigma_{f'}(x,k+_{\mathbb{N}_1}1,n)).$$

Note que a fórmula alvo do esquema de indução é equivalente a uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$ (veja observação 4.5), pelo que, segundo a observação 4.1, é lícito aplicar tal esquema.

Fixemos $x \in X$ e $k \in \mathbb{N}_1$. Para $n = 0$, temos que $2^{-1\times g(x,k)}\Sigma_{f'}(x,k,0) = 2^{-1\times g(x,k)}$ $f'(x,k,0) = 2^{-1\times g(x,k)}$ $f(x,0)2^{1\times g(x,k)} = f(x,0) = 2^{-1\times g(x,k+1)}f(x,0)2^{1\times g(x,k+1)} = 2^{-1\times g(x,k+1)}f'(x,k+1,0) = 2^{-1\times g(x,k+1)}\Sigma_{f'}(x,k+1,0)$.

No passo de indução queremos estabelecer que, sendo $n +_{\mathbb{N}_2} 1 \leq k$, então

$$2^{-1\times g(x,k)}\Sigma_{f'}(x,k,n+1) = 2^{-1\times g(x,k+1)}\Sigma_{f'}(x,k+1,n+1).$$

Ora, $2^{-1\times g(x,k)}\Sigma_{f'}(x,k,n+1) = 2^{-1\times g(x,k)}(\Sigma_{f'}(x,k,n) + f'(x,k,n+1)) = 2^{-1\times g(x,k)}\Sigma_{f'}(x,k,n)+2^{-1\times g(x,k)}f(x,n+1)2^{1\times g(x,k)} = 2^{-1\times g(x,k)}\Sigma_{f'}(x,k,n)+f(x,n+1) \overset{H.I.}{=} 2^{-1\times g(x,k+1)}\Sigma_{f'}(x,k+1,n)+f(x,n+1) = 2^{-1\times g(x,k+1)}(\Sigma_{f'}(x,k+1,n)+f'(x,k+1,n+1)) = 2^{-1\times g(x,k+1)}\Sigma_{f'}(x,k+1,n+1)$.

Estabeleçamos a igualdade pretendida.

$\Sigma_f(x,n+1) = 2^{-1\times g(x,1\times(n+1))}\Sigma_{f'}(x,1\times(n+1),n+1) = 2^{-1\times g(x,1\times(n+1))}(\Sigma_{f'}(x,1\times(n+1),n) + f'(x,1\times(n+1),n+1)) = 2^{-1\times g(x,1\times(n+1))}\Sigma_{f'}(x,1\times(n+1),n) + f(x,n+1)$. Logo, se $n \in \mathbb{N}_1$, então $\Sigma_f(x,n+1) = 2^{-1\times g(x,n+_{\mathbb{N}_1}1)}\Sigma_{f'}(x,n+_{\mathbb{N}_1}1,n) + f(x,n+_{\mathbb{N}_2}1) \overset{(\star)}{=} 2^{-1\times g(x,n)}\Sigma_{f'}(x,n,n) + f(x,n+1) = \Sigma_f(x,n) + f(x,n+1)$. Se $n \notin \mathbb{N}_1$, a igualdade é imediata, uma vez que, $1\times(n+1) = 1\times n$.

□

Proposição 4.13 *Dada f uma função de $X\times\mathbb{N}_2$ para $\mathbb{D}$, existe Σ_f uma função de $X\times\mathbb{N}_2$ para $\mathbb{D}$ tal que $\Sigma_f(x,0) = f(x,0)$ e $\Sigma_f(x,n+1) = \Sigma_f(x,n) + f(x,n+1)$, para todo $x \in X$, para todo $n \in \mathbb{N}_2$.*

Demonstração

Tomemos $f : X\times\mathbb{N}_2 \to \mathbb{D}$. Consideremos as funções f_1 e f_2 de $X\times\mathbb{N}_2$ para $\mathbb{D}_0^+$ definidas por

$$f_1(x,n) = \begin{cases} f(x,n) & \text{se } 0 \leq f(x,n) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \quad \text{e } f_2(x,n) = \begin{cases} -f(x,n) & \text{se } f(x,n) < 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}.$$

Aplicando a proposição 4.12, existem funções Σ_{f_1} e Σ_{f_2} de $X\times\mathbb{N}_2$ para $\mathbb{D}_0^+$ verificando $\Sigma_{f_1}(x,0) = f_1(x,0)$, $\Sigma_{f_1}(x,n+1) = \Sigma_{f_1}(x,n) + f_1(x,n+1)$ e $\Sigma_{f_2}(x,0) = f_2(x,0)$, $\Sigma_{f_2}(x,n+1) = \Sigma_{f_2}(x,n) + f_2(x,n+1)$ respectivamente.

Consideremos $\Sigma_f : X \times \mathbb{N}_2 \to \mathbb{D}$ a função definida por $\Sigma_f(x,n) := \Sigma_{f_1}(x,n) - \Sigma_{f_2}(x,n)$ e verifiquemos que tal função se encontra nas condições pretendidas.

$\Sigma_f(x,0) = \Sigma_{f_1}(x,0) - \Sigma_{f_2}(x,0) = f_1(x,0) - f_2(x,0) = f(x,0)$ e $\Sigma_f(x,n+1) = \Sigma_{f_1}(x,n+1) - \Sigma_{f_2}(x,n+1) = \Sigma_{f_1}(x,n) + f_1(x,n+1) - (\Sigma_{f_2}(x,n) + f_2(x,n+1)) = \Sigma_f(x,n) + f_1(x,n+1) - f_2(x,n+1) = \Sigma_f(x,n) + f(x,n+1)$.

□

Nota 4.1 *Dada f uma função de $X \times \mathbb{N}_2$ para $\mathbb{D}$, $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}_2$, notamos por $\sum_{i=0}^{n} f(x,i)$ o número racional diádico $\Sigma_f(x,n)$.*

Por uma questão de simplificação notacional, as propriedades das somas ao longo de $\mathbb{N}_2$ que se estabelecem nas proposições seguintes, são apresentadas em funções de apenas uma variável ($f : \mathbb{N}_2 \to \mathbb{D}$), sendo obviamente válidas quando o domínio possui mais coordenadas.

Observação 4.6 *Sendo f e g funções de $\mathbb{N}_2$ para $\mathbb{D}$ e $\lambda \in \mathbb{D}$, podemos de forma natural considerar as funções $f+g$, λf e $|f|$ definidas respectivamente por $(f+g)(n) = f(n)+g(n)$, $(\lambda f)(n) = \lambda f(n)$ e $|f|(n) = |f(n)|$, $\forall n \in \mathbb{N}_2$, notadas, como habitualmente, por conjuntos de códigos de pares ordenados.*

Proposição 4.14 *Sejam f e g funções de $\mathbb{N}_2$ para $\mathbb{D}$, $n \in \mathbb{N}_2$ e $\lambda \in \mathbb{D}$*

a) $\sum_{i=0}^{n}(f+g)(i) = \sum_{i=0}^{n} f(i) + \sum_{i=0}^{n} g(i)$

b) $\sum_{i=0}^{n}(\lambda f)(i) = \lambda \sum_{i=0}^{n} f(i)$

c) $\sum_{i=0}^{n} \lambda = \lambda \cdot (n+1)$

d) $|\sum_{i=0}^{n} f(i)| \leq \sum_{i=0}^{n} |f|(i)$

e) $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}$

f) Se para todo $i \leq n$ se tem $f(i) \leq g(i)$ então $\sum_{i=0}^{n} f(i) \leq \sum_{i=0}^{n} g(i)$.

Demonstração
Todas as alíneas se provam facilmente por indução em $n \in \mathbb{N}_2$.

□

Notação 4.2 *Sendo f uma função de $\mathbb{N}_2$ para $\mathbb{D}$ e $n, m \in \mathbb{N}_2$ tais que $n \leq m$,*

$$\sum_{i=n}^{m} f(i) := \sum_{i=0}^{m} f(i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

Usando a notação acima, e tendo em conta as propriedades das somas ao longo de $\mathbb{N}_2$, deduzimos imediatamente as seguintes asserções:

- $\sum_{i=n}^{n} f(i) = f(n)$
- $\sum_{i=0}^{n+m} f(i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) + \sum_{i=n}^{n+m} f(i)$

- $\sum_{i=n}^{m+1} f(i) = \sum_{i=n}^{m} f(i) + f(m+1)$, com $n \leq m$
- $\sum_{i=n+1}^{m} f(i) = \sum_{i=n}^{m} f(i) - f(n)$, com $n < m$.

Proposição 4.15 *Seja f uma função de $\mathbb{N}_2$ para $\mathbb{D}$ e $n, k \in \mathbb{N}_2$. Então*

$\sum_{i=0}^{n} f(k+i) = \sum_{i=k}^{n+k} f(i)$.

Demonstração

Por $\sum_{i=0}^{n} f(k+i)$, denotamos $\Sigma_{f \circ h}(k,n)$, com $h : \mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}_2 \to \mathbb{N}_2$ a função definida por $h(k,i) = k+i$. Fixemos $k \in \mathbb{N}_2$ e provemos o resultado por indução em $n \in \mathbb{N}_2$.

O caso $n = 0$ facilmente se comprova.

Suponhamos o resultado válido para n e provemos que $\sum_{i=0}^{n+1} f(k+i) = \sum_{i=k}^{n+1+k} f(i)$.

$\sum_{i=0}^{n+1} f(k+i) = \sum_{i=0}^{n} f(k+i) + f(k+n+1) \overset{HI}{=} \sum_{i=k}^{n+k} f(i) + f(k+n+1) = \sum_{i=k}^{n+k+1} f(i) - f(n+k+1) + f(n+k+1) = \sum_{i=k}^{n+k+1} f(i)$.

□

Proposição 4.16 *Sendo n, k, m elementos não nulos de $\mathbb{N}_2$, tais que $n = k \cdot m$, temos que*

$\sum_{i=0}^{n-1} f(i) = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{m-1} f(jm+i)$.

Demonstração

Por $\sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{m-1} f(jm+i)$, denotamos $\Sigma_g(m, k-1)$, com $g : \mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}_2 \to \mathbb{D}$ a função definida por $g(m,j) = \Sigma_{f \circ h}(m, j, m-1)$, onde $h : \mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}_2 \to \mathbb{N}_2$ é tal que $h(m,j,i) = j \cdot m + i$.

Fixemos m um elemento não nulo de $\mathbb{N}_2$ e provemos, por indução em $k \in \mathbb{N}_2$, que $\forall k \in \mathbb{N}_2 \backslash \{0\} \forall n \leq k \cdot m (n = k \cdot m \to \sum_{i=0}^{n-1} f(i) = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{m-1} f(jm+i))$.

Se $k = 1$, supondo $n = m$, temos $\sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{m-1} f(jm+i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$.

Sendo a propriedade válida para $k \geq 1$, vejamos que é válida para $k+1$.

Suponhamos que $n = (k+1) \cdot m$. Mas então, $n - m = k \cdot m$ e, por hipótese de indução, temos que $\sum_{i=0}^{n-m-1} f(i) = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{m-1} f(jm+i)$.

Ora, $\sum_{i=0}^{n-1} f(i) = \sum_{i=0}^{n-m-1} f(i) + \sum_{i=n-m}^{n-1} f(i) = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{m-1} f(jm+i) + \sum_{i=n-m}^{n-1} f(i) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{m-1} f(jm+i) - \sum_{i=0}^{m-1} f(km+i) + \sum_{i=n-m}^{n-1} f(i) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{m-1} f(jm+i) - \sum_{i=km}^{m-1+km} f(i) + \sum_{i=km}^{n-1} f(i) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{m-1} f(jm+i) - \sum_{i=km}^{n-1} f(i) + \sum_{i=km}^{n-1} f(i) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{m-1} f(jm+i)$.

□

Prosseguimos com a introdução em TCA^2 de mais conceitos analíticos.

Definição 4.3 *(Um código para) Uma* sucessão de números reais *é uma função $f : \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_1 \to \mathbb{D}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}_1$ a função $f_n : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{D}$ definida por $f_n(k) = f(k,n)$ é um número real. Notamos por $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ a sucessão f, com $f_n = \alpha_n$.*

Observação 4.7 • *Note que, existindo X um conjunto que codifica uma sucessão de números reais, também existe o conjunto que codifica cada um desses reais que a constituem, i.e. números reais α_n tais que $\alpha_n(m) = d$ sse $\langle\langle m, n\rangle, d\rangle \in X$. Basta pensarmos que, em* TCA^2, *existe o conjunto $\alpha_n = \{\langle m, d\rangle : m \in \mathbb{N}_1 \wedge d \in \mathbb{D} \wedge \langle\langle m, n\rangle, d\rangle \in X\}$.*

- *Dadas sucessões de números reais $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, existem as sucessões $(\alpha_n + \beta_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$, $(\alpha_n \cdot \beta_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ e $(\lambda\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$. A título de exemplo, para a sucessão soma, basta pensarmos em $\{\langle\langle m, n\rangle, d\rangle : m \in \mathbb{N}_1 \wedge n \in \mathbb{N}_1 \wedge d \in \mathbb{D} \wedge d = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_1}(m+1, n) + (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_1}(m + 1, n)\}$ e atendermos à observação 4.5.*

- *Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, podemos pensar na sucessão $X = \{\langle\langle m, n\rangle, d\rangle : m \in \mathbb{N}_1 \wedge n \in \mathbb{N}_1 \wedge d \in \mathbb{D} \wedge \langle m, d\rangle \in \alpha\}$. Tal sucessão será designada por* sucessão constantemente igual a α.

Definição 4.4 *Uma sucessão de números reais $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ diz-se* limitada *se existir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}_1 |\alpha_n| \leq \alpha$; diz-se* crescente (*respectivamente* estritamente crescente) *se* $\forall n \in \mathbb{N}_1(\alpha_n \leq \alpha_{n+1})$ (*respectivamente* $\forall n \in \mathbb{N}_1(\alpha_n < \alpha_{n+1})$) *e* decrescente (*respectivamente* estritamente decrescente) *se* $\forall n \in \mathbb{N}_1(\alpha_{n+1} \leq \alpha_n)$ (*respectivamente* $\forall n \in \mathbb{N}_1(\alpha_{n+1} < \alpha_n)$).

Definição 4.5 *Uma sucessão de números reais $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$* converge *para o número real α e escrevemos $\alpha = \lim \alpha_n$ se $\forall k \in \mathbb{N}_1 \exists n \in \mathbb{N}_1 \forall i \in \mathbb{N}_1 |\alpha - \alpha_{n+i}| < 2^{-k}$.*

Uma sucessão $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ diz-se convergente *se existir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que* $\lim \alpha_n = \alpha$.

Apresentam-se de seguida algumas propriedades dos limites.

Proposição 4.17 *Em* TCA^2 *temos que*

1. *Se existir limite de uma sucessão de números reais, esse limite é único.*

2. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ a sucessão constantemente igual a α. Então* $\lim \alpha_n = \alpha$.

3. *Sejam $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ e $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ sucessões de números reais, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}_1$ tal que $\alpha_n = \beta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_1$ tal que $m \leq n$. Se $\lim \alpha_n = \alpha$ então $\lim \beta_n = \alpha$.*

4. *Sejam $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ e $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ sucessões de números reais e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\lim \alpha_n = \alpha$ e $\lim \beta_n = \beta$. Então $(\alpha_n + \beta_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ é uma sucessão convergente e $\lim(\alpha_n + \beta_n) = \alpha + \beta$.*

5. *Toda a sucessão convergente é limitada.*

6. *Sejam $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ e $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ sucessões de números reais tais que $\lim \alpha_n = 0$ e $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ seja uma sucessão limitada. Então $(\alpha_n \cdot \beta_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ é uma sucessão convergente e $\lim(\alpha_n \cdot \beta_n) = 0$.*

7. *Sejam $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ e $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ sucessões de números reais e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\lim \alpha_n = \alpha$ e $\lim \beta_n = \beta$. Então $(\alpha_n \cdot \beta_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ é uma sucessão convergente e $\lim(\alpha_n \cdot \beta_n) = \alpha \cdot \beta$.*

8. *Sejam* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ *uma sucessão de números reais,* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que* $\lim \alpha_n = \alpha$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Então* $(\lambda\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ *é uma sucessão convergente e* $\lim(\lambda\alpha_n) = \lambda\alpha$.

9. *Sejam* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ *e* $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ *sucessões de números reais e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tais que,* $\forall n \in \mathbb{N}_1(\alpha_n \leq \gamma_n \leq \beta_n)$ *e* $\lim \alpha_n = \lim \beta_n = \alpha$. *Então* $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ *é uma sucessão convergente e* $\lim \gamma_n = \alpha$.

Demonstração
As alíneas anteriores demonstram-se da forma usual, não sendo a sua demonstração dificultada pelo facto de nos encontrarmos num sistema de análise fraca. Única excepção, que requer algum cuidado acrescido e por isso se demonstra em seguida, é a alínea *5.*

5. Sendo $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ uma sucessão convergente, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\lim \alpha_n = \alpha$. Logo, tomando $1 \in \mathbb{N}_1$, existe $n \in \mathbb{N}_1$ tal que $\forall i \in \mathbb{N}_1 |\alpha - \alpha_{n+i}| \leq 2^{-1}$. Pelo lema 4.1 k) e d), temos que $-2^{-1} \leq \alpha_{n+i} - \alpha \leq 2^{-1}$, logo $-|\alpha| - 2^{-1} \leq \alpha - 2^{-1} \leq \alpha_{n+i} \leq \alpha + 2^{-1} \leq |\alpha| + 2^{-1}$, i.e. $|\alpha_{n+i}| \leq |\alpha| + 2^{-1}$. E portanto $\forall m(n \leq m \to |\alpha_m| \leq |\alpha| + 2^{-1})$. Por outro lado, sabemos que $\forall i < n \exists d \in \mathbb{D} |\alpha_i| < d$. Como $|\alpha_i| < d$ é uma fórmula $\exists\Sigma_0^{1,b}$, por colecção limitada pode ver-se que existe z tal que $\forall i < n \exists d \preceq z(d \in \mathbb{D} \wedge |\alpha_i| < d)$. Logo $|\alpha_i| < 1 \times z, \forall i < n$. Provámos assim que $\forall k \in \mathbb{N}_1 |\alpha_k| \leq |\alpha| + 2^{-1} + 1 \times z$.

$\square$

Observação 4.8 *É evidente que, dado* α *um número real e* $n \in \mathbb{N}_1$ *o número racional diádico* $\alpha(n)$ *está bem determinado, sendo a fórmula* $\alpha(n) =_{\mathbb{D}} d$ *uma fórmula* $\Sigma_0^{1,b}$*, visto abreviar* $\langle n, d\rangle \in \alpha$.

Contudo, sendo Φ *uma função contínua parcial de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$ *e* $\alpha \in \text{dom}\Phi$*, embora a expressão* $\Phi(\alpha)$ *se encontre já definida, a menos da igualdade de reais, a expressão* $\Phi(\alpha)(n)$ *não o está. Note que podemos ter* $\Phi(\alpha) = \beta$ *e* $\Phi(\alpha) = \gamma$*, obviamente com* $\beta =_{\mathbb{R}} \gamma$*, mas com* $\beta(n) \neq \gamma(n)$.

Surpreendentemente, para controlarmos a complexidade da fórmula que define o integral (apresentado adiante neste trabalho) é necessário tornar precisa a expressão $\Phi(\alpha, n)$, que intuitivamente pode ser vista como sendo $\lambda(n)$ para um certo $\lambda = \Phi(\alpha)$, sem contudo ser necessário recorrer a $\Phi(\alpha)$. O que se segue visa justamente definir tal expressão e embora o argumento tenha já sido usado aquando da prova da existência e unicidade da imagem de uma função real de variável real de um elemento do seu domínio, dada a importância para o que se segue, definimos $\Phi(\alpha, n)$ com todo o detalhe e demonstramos com todo o rigor as propriedades associadas a tal definição.

Seja Φ uma função contínua parcial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e α um número real no domínio de Φ. Consideremos a fórmula

$$\begin{aligned}\varphi(n, r) :\leftrightarrow \exists w \exists k[&\langle w, \alpha(k+1), k, r, n+1\rangle \in \Phi \wedge \forall \langle r', w', k'\rangle < \langle r, w, k\rangle \\ &\langle w', \alpha(k'+1), k', r', n+1\rangle \notin \Phi].\end{aligned}$$

Dado $n \in \mathbb{N}_1$ provemos que existe um e um só $r \in \mathbb{D}$ tal que $\varphi(n,r)$.

Como $\alpha \in \mathrm{dom}\Phi$ temos que $\exists m \in \mathbb{N}_1 \exists r \in \mathbb{D}(\alpha(m+1),m)\Phi(r,n+1)$. Tomemos $k := m+2$. Como $m+1 < k$ temos que $(\alpha(k+1),k) < (\alpha(m+1),m)$. Atendendo a que $(\alpha(m+1),m)\Phi(r,n+1)$, por definição de função contínua nos reais, sabemos que $(\alpha(k+1),k)\Phi(r,n+1)$, i.e. $\exists w\langle w,\alpha(k+1),k,r,n+1\rangle \in \Phi$. Se (r,w,k) assim encontrado não corresponder (em código) ao menor triplo tal que $\langle w,\alpha(k+1),k,r,n+1\rangle \in \Phi$, escolhe-se o menor nestas condições. Note que o esquema de minimização para fórmulas $\Delta_1^{1,b}$-estendidas é válido em TCA^2.

A codificação dos triplos é feita de forma a que se $r \neq r'$ então $\langle r',w',k'\rangle \neq \langle r,w,k\rangle$, logo a unicidade segue imediatamente.

Estamos agora em condições de definir o que entendemos por $\Phi(\alpha,n)$.

Definição 4.6 *Dada Φ uma função contínua parcial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e α um número real no domínio de Φ, temos que $\Phi(\alpha,n) = r :\leftrightarrow \varphi(n,r)$.*

Observação 4.9 *Pelo visto acima, temos que $\forall n \in \mathbb{N}_1 \exists^1 r \in \mathbb{D}\Phi(\alpha,n) = r$. $\Phi(\alpha,n)$ designará o único número racional diádico que verifica $\varphi(n,\Phi(\alpha,n))$.*

Proposição 4.18 *Dados Φ uma função contínua parcial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathrm{dom}\Phi$ e $n \in \mathbb{N}_1$, temos que $|\Phi(\alpha,n) - \Phi(\alpha)| \leq \frac{1}{2^n}$, qualquer que seja o representante escolhido para $\Phi(\alpha)$, i.e. $\forall \beta \in \mathbb{R}(\Phi(\alpha) = \beta \rightarrow |\Phi(\alpha,n) - \beta| \leq \frac{1}{2^n})$.*

Demonstração

Como $\Phi(\alpha,n)$ é o número racional diádico que verifica $\varphi(n,\Phi(\alpha,n))$ sabemos que existe k tal que $(\alpha(k+1),k)\Phi(\Phi(\alpha,n),n+1)$. Como $|\alpha-\alpha(k+1)| \leq \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k}$, por definição de $\Phi(\alpha) = \beta$ temos que $|\beta - \Phi(\alpha,n)| \leq \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}$. Logo, em particular, $|\Phi(\alpha,n) - \beta| \leq \frac{1}{2^n}$.

□

Observação 4.10 *$\Phi(\alpha,n) = r$ pode ser (e sê-lo-á em diante) encarada como uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$. Para tal, basta termos em conta a observação 4.5.*

Proposição 4.19 *Seja Φ uma função contínua parcial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathrm{dom}\Phi$. A função $\lambda : \mathbb{N}_1 \rightarrow \mathbb{D}$ definida por $\lambda(n) = \Phi(\alpha,n)$ é um número real.*

Demonstração

Note que, a existência de tal conjunto λ, em TCA^2, codificando uma função, foi acautelada pelas observações anteriores. Vejamos que λ verifica a condição de ser número real.

Seja $n \leq m$. $|\lambda(n)-\lambda(m)| = |\Phi(\alpha,n)-\Phi(\alpha,m)| = |\Phi(\alpha,n)-\Phi(\alpha)+\Phi(\alpha)-\Phi(\alpha,m)| \leq |\Phi(\alpha,n)-\Phi(\alpha)|+|\Phi(\alpha)-\Phi(\alpha,m)|$, qualquer que seja o representante escolhido para $\Phi(\alpha)$. Pela demonstração da proposição 4.18, sabemos que $|\Phi(\alpha,k)-\Phi(\alpha)| \leq \frac{1}{2^{k+1}}$, $\forall k \in \mathbb{N}_1$. Logo $|\lambda(n)-\lambda(m)| \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$, provando-se que λ é um número real.

□

A proposição seguinte evidencia a possibilidade de se considerar um representante canónico para a imagem de um real por intermédio de uma função contínua.

Proposição 4.20 *Com Φ, α e λ nas condições da proposição 4.19, $\Phi(\alpha) = \lambda$.*

Demonstração

Como $\alpha \in \mathrm{dom}\Phi$, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\Phi(\alpha) = \beta$. Provemos que $\beta = \lambda$. Dado $n \in \mathbb{N}_1$, pela observação 4.9, $\varphi(n, \Phi(\alpha, n))$, logo existe k tal que $(\alpha(k+1), k)\Phi(\Phi(\alpha, n), n+1)$. Também sabemos que $|\alpha - \alpha(k+1)| \leq \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k}$. Logo, por definição de $\Phi(\alpha) = \beta$, sabemos que $|\beta - \Phi(\alpha, n)| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$. Ora $|\beta(n) - \lambda(n)| = |\beta(n) - \Phi(\alpha, n)| = |\beta(n) - \beta + \beta - \Phi(\alpha, n)| \leq |\beta(n) - \beta| + |\beta - \Phi(\alpha, n)| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Portanto $\beta = \lambda$.

O resultado obtém-se imediatamente tendo em conta que, se $\Phi(\alpha) = \beta$ e $\beta = \lambda$, então, pela definição de $\Phi(\alpha) = \beta$, tem-se $\Phi(\alpha) = \lambda$.

□

4.4 Integral de Riemann

Ao estudo prévio sobre a formalização de alguns conceitos de análise em TCA^2, que decorreu nas anteriores secções, segue-se nesta, a introdução da noção de integral de Riemann, inicialmente, e por questões de maior simplicidade notacional, restringida ao intervalo $[0, 1]$.

Definição 4.7 *Seja Φ uma função contínua total no intervalo $[0, 1]$, com módulo de continuidade uniforme, h, nesse intervalo. Definimos* o integral entre 0 e 1 de Φ*, que notamos por $\int_0^1 \Phi(t)\, dt$, do seguinte modo:*

$$\int_0^1 \Phi(t)\, dt :=_{\mathbb{R}} \lim S_n$$

onde, para todo $n \in \mathbb{N}_1$, $S_n = \sum_{i=0}^{2^{h(n)}-1} \frac{1}{2^{h(n)}} \Phi(\frac{i}{2^{h(n)}}, n)$.

Observação 4.11

- *Note que, atendendo ao estudo efectuado anteriormente a propósito da complexidade de expressões da forma $\Phi(\alpha, n) = r$ (veja observação 4.10), $f : \mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_2 \to \mathbb{D}$, definida por $f(n, i) = \frac{1}{2^{h(n)}} \Phi(\frac{i}{2^{h(n)}}, n)$ é uma função em TCA^2.*

- *Observe também que, é possível (em TCA^2) considerarmos somas da forma $\sum_{i=0}^{2^{h(n)}-1} f(n, i)$, sendo f uma função de $\mathbb{N}_1 \times \mathbb{N}_2$ para $\mathbb{D}$. Com efeito, note que $\sum_{i=0}^{2^{h(n)}-1} f(n, i) = \Sigma_f(n, 2^{h(n)} - 1)$, onde $h(n) \in \mathbb{N}_1$ e portanto $2^{h(n)} - 1$ é um número racional diádico que pode ser visto como um elemento de $\mathbb{N}_2$ (veja observação 4.2).*

Pela observação anterior, a igualdade $d =_{\mathbb{D}} S_n$ é dada por uma fórmula $\Sigma_0^{1,b}$, logo existe (em TCA^2) o conjunto $X = \{\langle n, d\rangle : n \in \mathbb{N}_1 \wedge d = S_n\}$. Faz, portanto, sentido falar-se na sucessão $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ atendendo a que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_1} = \{\langle\langle m, n\rangle, d\rangle : m, n \in \mathbb{N}_1 \wedge d \in \mathbb{D} \wedge \langle n, d\rangle \in X\}$.

Para o integral estar bem definido necessitamos assegurar a convergência da sucessão $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$.

Proposição 4.21 *A sucessão $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ é uma sucessão de Cauchy, i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}_1 \exists p \in \mathbb{N}_1 \forall k \in \mathbb{N}_1 (p < k \to |S_p - S_k| < 2^{-n}).$$

Demonstração

Sendo $p < k$ temos que $h(p) \leq h(k)$, logo, atendendo às propriedades das somas em $\mathbb{N}_2$, sabemos que $\sum_{i=0}^{2^{h(p)}-1} \frac{1}{2^{h(p)}} \Phi(\frac{i}{2^{h(p)}}, p) = \sum_{i=0}^{2^{h(p)}-1} \frac{1}{2^{h(k)}} \Phi(\frac{i}{2^{h(p)}}, p) 2^{h(k)-h(p)} = \sum_{i=0}^{2^{h(p)}-1} \frac{1}{2^{h(k)}} \Phi(\frac{i}{2^{h(p)}}, p) \sum_{j=0}^{2^{h(k)-h(p)}-1} 1 = \sum_{i=0}^{2^{h(p)}-1} \sum_{j=0}^{2^{h(k)-h(p)}-1} \frac{1}{2^{h(k)}} \Phi(\frac{i}{2^{h(p)}}, p)$ e, uma vez que $2^{h(k)} = 2^{h(p)} \cdot 2^{h(k)-h(p)}$, pela proposição 4.16, $\sum_{i=0}^{2^{h(k)}-1} \frac{1}{2^{h(k)}} \Phi(\frac{i}{2^{h(k)}}, k) = \sum_{i=0}^{2^{h(p)}-1} \sum_{j=0}^{2^{h(k)-h(p)}-1} \frac{1}{2^{h(k)}} \Phi(\frac{i2^{h(k)-h(p)}+j}{2^{h(k)}}, k)$.

Assim sendo, $|S_p - S_k| = |\sum_{i=0}^{2^{h(p)}-1} \frac{1}{2^{h(p)}} \Phi(\frac{i}{2^{h(p)}}, p) - \sum_{i=0}^{2^{h(k)}-1} \frac{1}{2^{h(k)}} \Phi(\frac{i}{2^{h(k)}}, k)| = |\sum_{i=0}^{2^{h(p)}-1} \sum_{j=0}^{2^{h(k)-h(p)}-1} \frac{1}{2^{h(k)}} [\Phi(\frac{i}{2^{h(p)}}, p) - \Phi(\frac{i2^{h(k)-h(p)}+j}{2^{h(k)}}, k)]| \leq \sum_{i=0}^{2^{h(p)}-1} \sum_{j=0}^{2^{h(k)-h(p)}-1} \frac{1}{2^{h(k)}} |\Phi(\frac{i}{2^{h(p)}}, p) - \Phi(\frac{i2^{h(k)-h(p)}+j}{2^{h(k)}}, k)|$.

Ora $\frac{1}{2^{h(k)}} |\Phi(\frac{i}{2^{h(p)}}, p) - \Phi(\frac{i2^{h(k)-h(p)}+j}{2^{h(k)}}, k)| \leq \frac{1}{2^{h(k)}} (|\Phi(\frac{i}{2^{h(p)}}, p) - \Phi(\frac{i}{2^{h(p)}})| + |\Phi(\frac{i}{2^{h(p)}}) - \Phi(\frac{i2^{h(k)-h(p)}+j}{2^{h(k)}})| + |\Phi(\frac{i2^{h(k)-h(p)}+j}{2^{h(k)}}) - \Phi(\frac{i2^{h(k)-h(p)}+j}{2^{h(k)}}, k)|)$ $(\star)$.

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ sabemos que $|\Phi(\alpha) - \Phi(\alpha, n)| \leq 2^{-n}$. Como, por hipótese, h é módulo de continuidade uniforme para Φ em $[0, 1]$, e $\forall i \in \{0, \dots, 2^{h(p)}-1\} \forall j \in \{0, \dots, 2^{h(k)-h(p)}-1\}$ se tem que $\frac{i}{2^{h(p)}}$ e $\frac{i2^{h(k)-h(p)}+j}{2^{h(k)}}$ pertencem a $[0, 1]$ e $|\frac{i}{2^{h(p)}} - \frac{i2^{h(k)-h(p)}+j}{2^{h(k)}}| = |\frac{j}{2^{h(k)}}| \leq \frac{2^{h(k)-h(p)}-1}{2^{h(k)}} = \frac{1}{2^{h(p)}} - \frac{1}{2^{h(k)}} < \frac{1}{2^{h(p)}}$, resulta que $|\Phi(\frac{i}{2^{h(p)}}) - \Phi(\frac{i2^{h(k)-h(p)}+j}{2^{h(k)}})| < \frac{1}{2^p}$.

Logo $(\star) < \frac{1}{2^{h(k)}}(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^k})$ e portanto $|S_p - S_k| < \sum_{i=0}^{2^{h(p)}-1} \sum_{j=0}^{2^{h(k)-h(p)}-1} \frac{1}{2^{h(k)}}(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^k}) = \frac{1}{2^{h(k)}}(\frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^k}) 2^{h(p)} 2^{h(k)-h(p)} = \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^p} < \frac{1}{2^{p-2}}$.

Provamos assim que, dado $n \in \mathbb{N}_1$, existe $p = n + 2 \in \mathbb{N}_1$ tal que $\forall k \in \mathbb{N}_1 (p < k \to |S_p - S_k| < \frac{1}{2^n})$.

$\therefore$ $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ é uma sucessão de Cauchy.

$\square$

Observação 4.12 *Na demonstração anterior, além de provarmos que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ é uma sucessão de Cauchy, provámos que tem um* módulo de convergência de Cauchy, *i.e. existe uma função $p : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_1$ estritamente crescente (nomeadamente $p(n) = n + 2$), tal que*

$$\forall n \in \mathbb{N}_1 \forall k \in \mathbb{N}_1 (p(n) < k \to |S_{p(n)} - S_k| < 2^{-n}).$$

Não é verdade que toda a sucessão de Cauchy de números reais seja convergente, aliás Simpson provou que tal asserção (em RCA_0) é equivalente a ACA_0. Temos contudo o seguinte resultado:

Lema 4.3 *Seja $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ uma sucessão de números reais e $p : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_1$ um módulo de convergência de Cauchy para $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$. Então a função $\alpha : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{D}$ definida por $\alpha(n) = \beta_{p(n+3)}(n + 3)$ é um número real e $\lim \beta_n = \alpha$.*

Demonstração

Consideremos $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}_1}, p$ e α nas condições do enunciado.

Vejamos que α é um número real.

Tomemos $n, m \in \mathbb{N}_1$ tais que $n \leq m$. Temos que $|\alpha(n) - \alpha(m)| = |\beta_{p(n+3)}(n+3) - \beta_{p(m+3)}(m+3)| \leq |\beta_{p(n+3)}(n+3) - \beta_{p(n+3)}| + |\beta_{p(n+3)} - \beta_{p(m+3)}| + |\beta_{p(m+3)} - \beta_{p(m+3)}(m+3)| \leq \frac{1}{2^{n+3}} + \frac{1}{2^{n+3}} + \frac{1}{2^{m+3}} \leq \frac{1}{2^{n+3}} + \frac{1}{2^{n+3}} + \frac{1}{2^{n+3}} \leq \frac{1}{2^n}$. Note que, para garantirmos que $|\beta_{p(n+3)} - \beta_{p(m+3)}| < 2^{-(n+3)}$, usámos o facto de p ser um módulo de convergência de Cauchy para $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ e verificar $p(n+3) \leq p(m+3)$.

Vejamos que $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ converge para α, i.e. dado $k \in \mathbb{N}_1$ queremos provar que $\exists n \in \mathbb{N}_1 \forall i \in \mathbb{N}_1 |\alpha - \beta_{n+i}| < 2^{-k}$.

Ora, para quaisquer $m > k$ e $n, i \in \mathbb{N}_1$, temos que $|\alpha - \beta_{n+i}| \leq |\alpha - \alpha(m)| + |\alpha(m) - \beta_{n+i}(m)| + |\beta_{n+i}(m) - \beta_{n+i}| \leq \frac{1}{2^m} + |\beta_{p(m+3)}(m+3) - \beta_{n+i}(m)| + \frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2^m} + |\beta_{p(m+3)}(m+3) - \beta_{p(m+3)}| + |\beta_{p(m+3)} - \beta_{n+i}| + |\beta_{n+i} - \beta_{n+i}(m)| + \frac{1}{2^m}$. Para $n = p(k+3)$, $|\alpha - \beta_{n+i}| \leq \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+3}} + |\beta_{p(m+3)} - \beta_{p(k+3)+i}| + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2^{m-2}} + |\beta_{p(m+3)} - \beta_{p(k+3)}| + |\beta_{p(k+3)} - \beta_{p(k+3)+i}|$. Por $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ ser sucessão com módulo de convergência de Cauchy, $|\alpha - \beta_{n+i}| < \frac{1}{2^{m-2}} + 2^{-(k+3)} + 2^{-(k+3)} = \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^{k+2}} \leq \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^k}$. Como m pode ser escolhido tão grande quanto queiramos, $|\alpha - \beta_{n+i}| \leq \frac{1}{2^k}$, o que prova o pretendido.

$\square$

Pela observação 4.12, como $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ é uma sucessão com módulo de convergência de Cauchy, encontrando-se, portanto, nas condições do lema anterior, temos a garantia que é convergente, fazendo sentido considerarmos o número real $\lim S_n$.

Para o integral de Riemann estar bem definido resta-nos verificar que não depende da função escolhida como módulo de continuidade uniforme. Demonstramos primeiro um resultado auxiliar.

Lema 4.4 *Sejam $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ e $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ sucessões convergentes de números reais. Se para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, $|\alpha_n - \beta_n| \leq \frac{1}{2^{n-2}}$, então $\lim \alpha_n = \lim \beta_n$.*

Demonstração

Suponhamos que $\lim \alpha_n = \alpha$ e $\lim \beta_n = \beta$. Dado k, existe m tão grande quanto queiramos, tal que $|\alpha - \alpha_m| < 2^{-k}$ e $|\beta - \beta_m| < 2^{-k}$. Provemos que se $\forall n \in \mathbb{N}_1$, $|\alpha_n - \beta_n| \leq \frac{1}{2^{n-2}}$, então $\alpha = \beta$. Tomemos $n \in \mathbb{N}_1$ e k, m nas condições anteriores. $|\alpha(n) - \beta(n)| \leq |\alpha(n) - \alpha + \alpha - \alpha_m + \alpha_m - \beta_m + \beta_m - \beta + \beta - \beta(n)| \leq |\alpha(n) - \alpha| + |\alpha - \alpha_m| + |\alpha_m - \beta_m| + |\beta_m - \beta| + |\beta - \beta(n)| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^n}$. Como k e m podem ser tão grandes quanto queiramos, $|\alpha(n) - \beta(n)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Logo $\alpha = \beta$.

$\square$

Proposição 4.22 *Sejam Φ uma função contínua total no intervalo $[0,1]$ e h_1 e h_2 módulos de continuidade uniforme para Φ nesse intervalo. Então $\lim \sum_{i=0}^{2^{h_1(n)}-1} \frac{1}{2^{h_1(n)}} \Phi(\frac{i}{2^{h_1(n)}}, n) = \lim \sum_{i=0}^{2^{h_2(n)}-1} \frac{1}{2^{h_2(n)}} \Phi(\frac{i}{2^{h_2(n)}}, n)$.*

Demonstração

Com uma estratégia inteiramente análoga à seguida aquando da demonstração da proposição 4.21, pode provar-se que para todo o $n \in \mathbb{N}_1$,

$|\sum_{i=0}^{2^{h_1(n)}-1} \frac{1}{2^{h_1(n)}}\Phi(\frac{i}{2^{h_1(n)}}, n) - \sum_{i=0}^{2^{h_2(n)}-1} \frac{1}{2^{h_2(n)}}\Phi(\frac{i}{2^{h_2(n)}}, n)| \leq \frac{1}{2^{n-2}}$. Assim sendo, pelo lema 4.4, $\lim \sum_{i=0}^{2^{h_1(n)}-1} \frac{1}{2^{h_1(n)}}\phi(\frac{i}{2^{h_1(n)}}, n) = \lim \sum_{i=0}^{2^{h_2(n)}-1} \frac{1}{2^{h_2(n)}}\phi(\frac{i}{2^{h_2(n)}}, n)$.

□

Não dependendo da função escolhida como módulo de continuidade uniforme, como acabámos de confirmar, concluimos que o integral de Riemann atrás apresentado se encontra bem definido.

Observação 4.13 • *Tomemos* Φ *e* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ *segundo a definição 4.7. Pelo lema 4.3 e observação 4.12, além de sabermos que* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ *é convergente, sabemos também que converge para* α*, o número real definido por* $\alpha(n) = S_{p(n+3)}(n+3)$*, i.e.* $\alpha(n) = S_{n+5}(n+3)$*, ou seja, visto* S_{n+5} *ser um número racional diádico,* $\alpha(n) = S_{n+5}$*,* $\forall n \in \mathbb{N}_1$*. Logo,* $\int_0^1 \Phi(t)\,dt = \alpha$*. Na sequência do estudo já efectuado, relembremos que o número real* α*, definido por* $\alpha(n) = S_{n+5}$*, existe em* TCA^2*, pois* $d = \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+5)}}\Phi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5)$ *exprime-se — veja observação 4.11 — por intermédio de uma fórmula* $\Sigma_0^{1,b}$*.*

- *Sendo* β *um número real, a fórmula* $\int_0^1 \Phi(t)\,dt = \beta$ *é equivalente a uma fórmula* $\forall\Sigma_0^{1,b}$*. Note que é equivalente à fórmula* $\alpha = \beta$*, com* α *o número real atrás definido.*

- *De forma análoga,* $\int_0^1 \Phi(t)\,dt < \beta$ *e* $\int_0^1 \Phi(t)\,dt \leq \beta$ *são equivalentes a uma fórmula* $\exists\Sigma_0^{1,b}$ *e* $\forall\Sigma_0^{1,b}$ *respectivamente.*

Estabelecem-se em seguida algumas das usuais propriedades do integral.

Proposição 4.23 *Sejam* Φ *e* Ψ *funções contínuas totais no intervalo* $[0,1]$ *com módulo de continuidade uniforme nesse intervalo e* $\gamma \in \mathbb{R}$*:*

a) $\int_0^1 \gamma\,dt = \gamma$

b) $\int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$

c) $\int_0^1 (\Phi+\Psi)(t)\,dt = \int_0^1 \Phi(t)\,dt + \int_0^1 \Psi(t)\,dt$

d) $|\int_0^1 \Phi(t)dt| \leq \int_0^1 |\Phi|(t)dt$

e) Se $\Phi(t) = \Psi(t)$ *para todo* $t \in [0,1]$ *então* $\int_0^1 \Phi(t)\,dt = \int_0^1 \Psi(t)\,dt$

f) Se $\Phi(t) \leq \Psi(t)$ *para todo* $t \in [0,1]$ *então* $\int_0^1 \Phi(t)\,dt \leq \int_0^1 \Psi(t)\,dt$

g) $\int_0^1 \gamma\Phi(t)\,dt = \gamma\int_0^1 \Phi(t)\,dt$.

Demonstração

a) Pela proposição 4.3, podemos fixar h um módulo de continuidade uniforme para C_γ em $[0,1]$. Ora, $\int_0^1 \gamma\,dt = \int_0^1 C_\gamma(t)\,dt$, que pela observação 4.13 sabemos ser igual a α, com α o número real definido por $\alpha(n) = S_{n+5} = \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+5)}}C_\gamma(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5)$. Basta-nos provar que $\alpha = \gamma$.

Seja $n \in \mathbb{N}_1$. Temos $|\alpha(n)-\gamma(n)| = |\sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+5)}} C_\gamma(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) - \gamma(n)| = |\sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+5)}} C_\gamma(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) - \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+5)}}(\gamma - \gamma + \gamma(n))| \leq \frac{1}{2^{h(n+5)}} \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} |C_\gamma(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) - \gamma + \gamma - \gamma(n)|$. Como, para todo o i, $|C_\gamma(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) - \gamma + \gamma - \gamma(n)| \leq |C_\gamma(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) - C_\gamma(\frac{i}{2^{h(n+5)}})| + |\gamma - \gamma(n)| \leq \frac{1}{2^{n+5}} + \frac{1}{2^n}$, temos que $|\alpha(n)-\gamma(n)| \leq \frac{1}{2^{h(n+5)}} 2^{h(n+5)} (\frac{1}{2^{n+5}} + \frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2^{n+5}} + \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Logo $\alpha = \gamma$.

b) Seja h um módulo de continuidade uniforme para a função identidade em $[0,1]$. Recordamos que h é uma função estritamente crescente. Consideremos $\int_0^1 t\,dt = \int_0^1 Id(t)\,dt = \alpha$, com α o número real definido por $\alpha(n) = \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+5)}} Id(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5)$.

Dado $n \in \mathbb{N}_1$, $|\alpha(n) - \frac{1}{2}| = |\sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+5)}} Id(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) - \frac{1}{2}|$.

Sabemos que $|Id(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) - Id(\frac{i}{2^{h(n+5)}})| \leq \frac{1}{2^{n+5}}$, para todo i, logo $|\sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} Id(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) - \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} Id(\frac{i}{2^{h(n+5)}})| \leq \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} |Id(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) - Id(\frac{i}{2^{h(n+5)}})| \leq 2^{h(n+5)} \frac{1}{2^{n+5}}$. Mas então, notando que $\frac{1}{2^{h(n+5)}} \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} Id(\frac{i}{2^{h(n+5)}}) = \frac{1}{2^{h(n+5)}} \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{i}{2^{h(n+5)}} = \frac{1}{2^{h(n+5)}} \frac{1}{2^{h(n+5)}} \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} i = \frac{1}{2^{h(n+5)}} \frac{1}{2^{h(n+5)}} 2^{h(n+5)} \frac{2^{h(n+5)}-1}{2} = \frac{1}{2^{h(n+5)}} (\frac{2^{h(n+5)}}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{h(n+5)+1}}$, temos que $|\alpha(n) - \frac{1}{2}| \leq |\frac{1}{2^{h(n+5)}} \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} Id(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{h(n+5)+1}})| + |(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{h(n+5)+1}}) - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2^{n+5}} + \frac{1}{2^{h(n+5)+1}} \leq \frac{1}{2^{n+5}} + \frac{1}{2^{h(n+5)}} \leq \frac{1}{2^{n+5}} + \frac{1}{2^{n+5}} = \frac{1}{2^{n+4}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Logo $\alpha = \frac{1}{2}$.

c) Na demonstração da proposição 4.3, alínea *b*), verificámos que podemos tomar h um módulo de continuidade uniforme em $[0,1]$, simultâneamente para Φ e Ψ e que a função $h' : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_1$ definida por $h'(n) = h(n+1)$ é um módulo de continuidade uniforme para $\Phi + \Psi$.

Sabemos que $\int_0^1 \Phi(t)\,dt = \alpha$, com $\alpha(n) = \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+5)}} \Phi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5)$; $\int_0^1 \Psi(t)\,dt = \beta$, com $\beta(n) = \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+5)}} \Psi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5)$ e $\int_0^1 (\Phi+\Psi)(t)\,dt = \gamma$, com $\gamma(n) = \sum_{i=0}^{2^{h'(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h'(n+5)}} (\Phi+\Psi)(\frac{i}{2^{h'(n+5)}}, n+5)$. Queremos provar que $\gamma = \alpha + \beta$.

Ora $|\gamma(n) - (\alpha+\beta)(n)| = |\sum_{i=0}^{2^{h(n+6)}-1} \frac{1}{2^{h(n+6)}} (\Phi+\Psi)(\frac{i}{2^{h(n+6)}}, n+5) - (\alpha(n+1) + \beta(n+1))| = |\sum_{i=0}^{2^{h(n+6)}-1} \frac{1}{2^{h(n+6)}} (\Phi+\Psi)(\frac{i}{2^{h(n+6)}}, n+5) - \sum_{i=0}^{2^{h(n+6)}-1} \frac{1}{2^{h(n+6)}} \Phi(\frac{i}{2^{h(n+6)}}, n+6) - \sum_{i=0}^{2^{h(n+6)}-1} \frac{1}{2^{h(n+6)}} \Psi(\frac{i}{2^{h(n+6)}}, n+6)| \leq \frac{1}{2^{h(n+6)}} \sum_{i=0}^{2^{h(n+6)}-1} |(\Phi+\Psi)(\frac{i}{2^{h(n+6)}}, n+5) - \Phi(\frac{i}{2^{h(n+6)}}, n+6) - \Psi(\frac{i}{2^{h(n+6)}}, n+6)|$. Como para qualquer valor de i, o módulo anterior é menor ou igual que $|(\Phi+\Psi)(\frac{i}{2^{h(n+6)}}, n+5) - (\Phi+\Psi)(\frac{i}{2^{h(n+6)}})| + |\Phi(\frac{i}{2^{h(n+6)}}) - \Phi(\frac{i}{2^{h(n+6)}}, n+6)| + |\Psi(\frac{i}{2^{h(n+6)}}) - \Psi(\frac{i}{2^{h(n+6)}}, n+6)| \leq \frac{1}{2^{n+5}} + \frac{1}{2^{n+6}} + \frac{1}{2^{n+6}} = \frac{1}{2^{n+4}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, temos que $|\gamma(n) - (\alpha+\beta)(n)| \leq \frac{1}{2^{h(n+6)}} 2^{h(n+6)} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Logo $\gamma = \alpha + \beta$.

d) Seja h um módulo de continuidade uniforme para Φ em $[0,1]$. Pela demonstração da proposição 4.3 *c*), sabemos que h é também um módulo de continuidade uniforme para $|\Phi|$ em $[0,1]$. Logo, pretendemos provar que $|\alpha| \leq \beta$, com α e β os números reais definidos por $\alpha(n) = \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+5)}} \Phi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5)$ e $\beta(n) = \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+5)}} |\Phi|(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5)$ respectivamente.

Mas sabemos que, $|\alpha|(n) = |\alpha(n)| = |\sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+5)}} \Phi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5)| \leq \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+5)}} |\Phi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5)|$ e $|\Phi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5)| \leq |\Phi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) - \Phi(\frac{i}{2^{h(n+5)}})| + |\Phi(\frac{i}{2^{h(n+5)}})| \leq \frac{1}{2^{n+5}} + |\Phi|(\frac{i}{2^{h(n+5)}}) \leq \frac{1}{2^{n+5}} + |\Phi|(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) + \frac{1}{2^{n+5}} = \frac{1}{2^{n+4}} +$

$|\Phi|(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5)$, logo $|\alpha|(n) \leq \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+5)}}(\frac{1}{2^{n+4}} + |\Phi|(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5)) = \frac{1}{2^{n+4}} + \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+5)}}|\Phi|(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) \leq \frac{1}{2^{n-1}} + \beta(n)$, e portanto $|\alpha| \leq \beta$.

e) Seja $\Phi(t) = \Psi(t)$, $\forall t \in [0,1]$ e tomemos h um módulo de continuidade uniforme em $[0,1]$. $\int_0^1 \Phi(t)\, dt = \alpha$, com $\alpha(n) = \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+5)}}\Phi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5)$ e $\int_0^1 \Psi(t)\, dt = \beta$, com $\beta(n) = \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+5)}}\Psi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5)$. Queremos provar que $\alpha = \beta$.

Tomemos n elemento arbitrário em $\mathbb{N}_1$. $|\alpha(n) - \beta(n)| = |\sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+5)}}\Phi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) - \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+5)}}\Psi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5)| \leq \frac{1}{2^{h(n+5)}} \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} |\Phi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) - \Psi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5)|$. Como para todo o $i \leq 2^{h(n+5)} - 1$ se tem $0 \leq \frac{i}{2^{h(n+5)}} \leq 1 - \frac{1}{2^{h(n+5)}} \leq 1$, por hipótese $\Phi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}) = \Psi(\frac{i}{2^{h(n+5)}})$, logo $|\Phi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) - \Psi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5)| \leq |\Phi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) - \Phi(\frac{i}{2^{h(n+5)}})| + |\Phi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}) - \Psi(\frac{i}{2^{h(n+5)}})| + |\Psi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}) - \Psi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5)| \leq \frac{1}{2^{n+5}} + \frac{1}{2^{n+5}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, e portanto $|\alpha(n) - \beta(n)| \leq \frac{1}{2^{h(n+5)}} 2^{h(n+5)} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Logo $\alpha = \beta$.

f) Consideremos que $\Phi(t) \leq \Psi(t)$, $\forall t \in [0,1]$ e, como em *c*), h um módulo de continuidade uniforme simultaneamente para Φ e Ψ. Tomando α e β como atrás, $\int_0^1 \Phi(t)\, dt = \alpha$ e $\int_0^1 \Psi(t)\, dt = \beta$, queremos ver que $\alpha \leq \beta$, i.e. $\alpha(n) \leq \beta(n) + 2^{-n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}_1$.

Seja $n \in \mathbb{N}_1$. Para todo $i \leq 2^{h(n+5)} - 1$ temos $0 \leq \frac{i}{2^{h(n+5)}} \leq 1$, logo, por hipótese, $\Phi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}) \leq \Psi(\frac{i}{2^{h(n+5)}})$.

Assim sendo, $\Phi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) \leq \Phi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}) + \frac{1}{2^{n+5}} \leq \Psi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}) + \frac{1}{2^{n+5}} \leq \Psi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) + \frac{1}{2^{n+5}} + \frac{1}{2^{n+5}} \leq \Psi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) + \frac{1}{2^{n+4}}$. Logo $\sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \Phi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) \leq \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} (\Psi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) + \frac{1}{2^{n+4}})$ e portanto $\sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+5)}}\Phi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) \leq \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+5)}}\Psi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5) + \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+5)}}\frac{1}{2^{n+4}}$, ou seja, provámos que $\alpha(n) \leq \beta(n) + \frac{1}{2^{n+4}} \leq \beta(n) + \frac{1}{2^{n-1}}$.

g) Dado $\gamma \in \mathbb{R}$, queremos provar que $\int_0^1 (C_\gamma\Phi)(t)\, dt = \gamma \cdot \int_0^1 \Phi(t)\, dt$.

Seja h um módulo de continuidade uniforme para Φ em $[0,1]$. Então $\int_0^1 \Phi(t)\, dt = \beta$, com $\beta(n) := \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+5)}}\Phi(\frac{i}{2^{h(n+5)}}, n+5)$.

Comecemos por provar que, sendo k o menor *tally* tal que $|\gamma(0)| + |\beta(0)| + 2 \leq 2^k$, se tem que a função h' definida por $h'(n) := h(n+k)$ é um módulo de continuidade uniforme para $C_\gamma\Phi$ em $[0,1]$.

Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ tais que $|\alpha_1 - \alpha_2| < \frac{1}{2^{h'(n)}} = \frac{1}{2^{h(n+k)}}$. Então $|(C_\gamma\Phi)(\alpha_1) - (C_\gamma\Phi)(\alpha_2)| = |\gamma||\Phi(\alpha_1) - \Phi(\alpha_2)| < |\gamma|\frac{1}{2^{n+k}} \leq \frac{1}{2^n}$. Para estabelecer a última desigualdade observámos que $|\gamma(0)| \leq 2^k - 2 - |\beta(0)| \leq 2^k - 1$ e portanto $|\gamma| \leq |\gamma - \gamma(0)| + |\gamma(0)| \leq \frac{1}{2^0} + 2^k - 1 = 2^k$.

Consequentemente faz sentido considerarmos que $\int_0^1 C_\gamma\Phi(t)\, dt = \alpha$, com $\alpha(n) := \sum_{i=0}^{2^{h'(n+5)}-1} \frac{1}{2^{h'(n+5)}}(C_\gamma\Phi)(\frac{i}{2^{h'(n+5)}}, n+5) = \sum_{i=0}^{2^{h(n+k+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+k+5)}}(C_\gamma\Phi)(\frac{i}{2^{h(n+k+5)}}, n+5)$.

Pretendemos provar que $\alpha = \gamma \cdot \beta$. Comecemos por estabelecer tal igualdade quando $\gamma \in \mathbb{D}$.

Temos que $|\alpha(n) - (\gamma \cdot \beta)(n)| = |\alpha(n) - \gamma(n+k) \cdot \beta(n+k)| = |\alpha(n) - \gamma\beta(n+k)| = |\sum_{i=0}^{2^{h(n+k+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+k+5)}}(C_\gamma\Phi)(\frac{i}{2^{h(n+k+5)}}, n+5) - \gamma \sum_{i=0}^{2^{h(n+k+5)}-1} \frac{1}{2^{h(n+k+5)}}\Phi(\frac{i}{2^{h(n+k+5)}}, n+k+5)| \leq \frac{1}{2^{h(n+k+5)}} \sum_{i=0}^{2^{h(n+k+5)}-1} |(C_\gamma\Phi)(\frac{i}{2^{h(n+k+5)}}, n+5) - \gamma\Phi(\frac{i}{2^{h(n+k+5)}}, n+k+5)|$.

Ora $|(C_\gamma\Phi)(\frac{i}{2^{h(n+k+5)}}, n+5) - \gamma \cdot \Phi(\frac{i}{2^{h(n+k+5)}}, n+k+5)| \leq |(C_\gamma\Phi)(\frac{i}{2^{h(n+k+5)}}, n+5) - (C_\gamma\Phi)(\frac{i}{2^{h(n+k+5)}})| + |\gamma \cdot \Phi(\frac{i}{2^{h(n+k+5)}}) - \gamma \cdot \Phi(\frac{i}{2^{h(n+k+5)}}, n+k+5)| \leq \frac{1}{2^{n+5}} + |\gamma|\frac{1}{2^{n+k+5}} \leq \frac{1}{2^{n+5}} + 2^k \frac{1}{2^{n+k+5}} = \frac{1}{2^{n+4}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Logo, $|\alpha(n) - (\gamma \cdot \beta)(n)| \leq \frac{1}{2^{h(n+k+5)}} 2^{h(n+k+5)} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$ e portanto $\int_0^1 (C_\gamma\Phi)(t)\, dt = \gamma \cdot \int_0^1 \Phi(t)\, dt$ quando $\gamma \in \mathbb{D}$.

Suponhamos agora que $\gamma \in \mathbb{R}$.

$|\int_0^1 (C_\gamma\Phi)(t)\, dt - \gamma \int_0^1 \Phi(t)\, dt| \leq |\int_0^1 \gamma \cdot \Phi(t)\, dt - \int_0^1 \gamma(n)\Phi(t)\, dt| + |\int_0^1 \gamma(n)\Phi(t)\, dt - \gamma \int_0^1 \Phi(t)\, dt| \leq |\int_0^1 (\gamma \cdot \Phi(t) - \gamma(n)\Phi(t))\, dt| + |\gamma(n) \int_0^1 \Phi(t)\, dt - \gamma \int_0^1 \Phi(t)\, dt| \leq \int_0^1 |\gamma - \gamma(n)||\phi(t)|\, dt + |\gamma(n) - \gamma|| \int_0^1 \Phi(t)\, dt| \leq \int_0^1 \frac{1}{2^n}|\Phi(t)|\, dt + \frac{1}{2^n}| \int_0^1 \Phi(t)\, dt| = \frac{1}{2^n}(\int_0^1 |\Phi(t)|\, dt + |\int_0^1 \Phi(t)\, dt|)$.

Como $n \in \mathbb{N}_1$ pode ser escolhido tão grande quanto se queira, $|\int_0^1 (C_\gamma\Phi)(t)\, dt - \gamma \int_0^1 \Phi(t)\, dt| \leq 0$, logo $\int_0^1 \gamma\Phi(t)\, dt = \gamma \int_0^1 \Phi(t)\, dt$, $\forall \gamma \in \mathbb{R}$.

$\square$

De forma idêntica ao estabelecido para o intervalo $[0, 1]$, poderiamos (como em seguida se esboça) ter introduzido a noção de integral de Riemann para qualquer intervalo de extremos racionais diádicos.

Definição 4.8 *Sejam $x, y \in \mathbb{D}$ tais que $x < y$ e Φ uma função contínua total no intervalo $[x, y]$, com módulo de continuidade, h, nesse intervalo. Definimos o* integral entre x e y *de Φ, que notamos por $\int_x^y \Phi(t)\, dt$, do seguinte modo:*

$$\int_x^y \Phi(t)\, dt :=_{\mathbb{R}} \lim S_n$$

onde, para todo $n \in \mathbb{N}_1$, $S_n = \sum_{i=0}^{2^{h(n)}-1} \frac{y-x}{2^{h(n)}} \Phi(x + \frac{(y-x)i}{2^{h(n)}}, n)$.

A verificação de que o anterior integral se encontra bem definido e não oferece qualquer ambiguidade consegue-se com uma estratégia completamente análoga à seguida aquando da análise do integral em $[0, 1]$, pelo que nos escusamos a reescrever tal análise na integra, chamando apenas a atenção sobre como ultrapassar pequenas subtilezas que encontramos neste novo contexto.

- Fixando $l \in \mathbb{N}_1$ tal que $y - x \leq 2^l$, é possível provar que a função $p : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_1$ definida por $p(n) = n + 2l + 2$ é um módulo de convergência de Cauchy para $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$, assegurando a convergência da sucessão. Tal consegue-se seguindo *mutatis mutandis* a demonstração da proposição 4.21 e observando que, sendo h uma função estritamente crescente, $h(p - l) + l \leq h(p)$ e consequentemente $\frac{y-x}{2^{h(p)}} \leq \frac{2^l}{2^{h(p)}} \leq \frac{1}{2^{h(p)-l}} \leq \frac{1}{2^{h(p-l)}}$.

- Quanto à garantia da independência do integral face à função escolhida como módulo de continuidade uniforme, basta observar que o lema 4.4 continua válido fixando $l \in \mathbb{N}_1$ e substituindo a premissa do resultado por $|\alpha_n - \beta_n| \leq \frac{1}{2^{n-2l-2}}$. A demonstração prossegue com as evidentes adaptações.

- Uma vez que a extensão do integral agora apresentada tem em vista estabelecer, na secção seguinte, o Teorema Fundamental do Cálculo para funções definidas no intervalo $[0,1]$, é suficiente, na definição acima, considerarmos $x, y \in \mathbb{D}$ tais que $0 \leq x < y \leq 1$, o que permite adaptações do estudo desenvolvido aquando da integração em $[0,1]$ ainda mais imediatas.

Observação 4.14 *Note que S_n se obtém tomando uma partição de $[x,y]$ de diâmetro $\frac{y-x}{2^{h(n)}}$ e considerando a soma de um valor 'aproximado' da função Φ no primeiro ponto de cada subintervalo da partição multiplicado pelo diâmetro da mesma. Tais partições na génese da sucessão $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ serão designadas por partições* standard.

Na sequência do anteriormente referido e até final da secção, consideramos x e y números racionais diádicos pertencentes ao intervalo $[0,1]$.

Notando que o análogo à observação 4.13 continua válido no contexto $[x,y]$, temos em particular que $\int_x^y \Phi(t)\,dt = \alpha$, com α o número real definido por $\alpha(n) = \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{y-x}{2^{h(n+5)}} \Phi(x + \frac{(y-x)i}{2^{h(n+5)}}, n+5)$, a complexidade das fórmulas com integrais continua controlada e obtemos as usuais propriedades da integração, segundo as proposições seguintes.

Proposição 4.24 *Sendo β um número real, as fórmulas $\int_x^y \Phi(t)\,dt = \beta$ e $\int_x^y \Phi(t)\,dt \leq \beta$ são equivalentes a fórmulas $\forall\Sigma_0^{1,b}$ e a fórmula $\int_x^y \Phi(t)\,dt < \beta$ é equivalente a uma fórmula $\exists\Sigma_0^{1,b}$.*

Proposição 4.25 *Sejam Φ e Ψ funções contínuas totais no intervalo $[x,y]$, com módulo de continuidade uniforme nesse intervalo e $\gamma \in \mathbb{R}$.*

a) $\int_x^y \gamma\,dt = \gamma \cdot (y-x)$

b) $\int_x^y t\,dt = \frac{(y-x)^2}{2}$

c) $\int_x^y (\Phi+\Psi)(t)\,dt = \int_x^y \Phi(t)\,dt + \int_x^y \Psi(t)\,dt$

d) $|\int_x^y \Phi(t)\,dt| \leq \int_x^y |\Phi|(t)\,dt$

e) *Se* $\forall t \in [x,y](\Phi(t) = \Psi(t))$ *então* $\int_x^y \Phi(t)\,dt = \int_x^y \Psi(t)\,dt$

f) *Se* $\forall t \in [x,y](\Phi(t) \leq \Psi(t))$ *então* $\int_x^y \Phi(t)\,dt \leq \int_x^y \Psi(t)\,dt$

g) $\int_x^y \gamma\Phi(t)\,dt = \gamma \int_x^y \Phi(t)\,dt$.

Demonstração

Visto a demonstração ser idêntica à prova do resultado homólogo em $[0,1]$, exemplificamos apenas com a primeira alínea.

a) $\int_x^y \gamma\,dt = \alpha$, com $\alpha(n) = \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{y-x}{2^{h(n+5)}} C_\gamma(x + \frac{(y-x)i}{2^{h(n+5)}}, n+5)$. Provemos que $\alpha = \gamma(y-x)$.

Dado $n \in \mathbb{N}_1$, $|\alpha(n)-[\gamma(y-x)](n)| = |\alpha(n)-\gamma(n+k)(y-x)|$, com k o menor *tally* tal que $|\gamma(0)|+|y-x|+2 \leq 2^k$. Logo $|\alpha(n)-[\gamma(y-x)](n)| = |\sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{y-x}{2^{h(n+5)}} C_\gamma(x+\frac{(y-x)i}{2^{h(n+5)}}, n+5)-\gamma(n+k)(y-x)| = |\sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{y-x}{2^{h(n+5)}} C_\gamma(x+\frac{(y-x)i}{2^{h(n+5)}}, n+5)-\sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{y-x}{2^{h(n+5)}}\gamma(n+k)| \leq \frac{y-x}{2^{h(n+5)}} \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} |C_\gamma(x+\frac{(y-x)i}{2^{h(n+5)}}, n+5)-\gamma(n+k)|$. Como, para todo o $i \in \{0, \ldots, 2^{h(n+5)}-1\}$, $|C_\gamma(x+\frac{(y-x)i}{2^{h(n+5)}}, n+5)-\gamma(n+k)| = |C_\gamma(x+\frac{(y-x)i}{2^{h(n+5)}}, n+5)-\gamma+\gamma-\gamma(n+k)| \leq |C_\gamma(x+\frac{(y-x)i}{2^{h(n+5)}}, n+5)-C_\gamma(x+\frac{(y-x)i}{2^{h(n+5)}})|+|\gamma-\gamma(n-k)| \leq \frac{1}{2^{n+5}}+\frac{1}{2^{n+k}}$, temos que $|\alpha(n)-[\gamma(y-x)](n)| \leq \frac{y-x}{2^{h(n+5)}} 2^{h(n+5)}(\frac{1}{2^{n+5}}+\frac{1}{2^{n+k}}) \leq \frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Logo $\alpha = \gamma(y-x)$.

□

Informalmente no que se segue, iremos evidenciar o carácter flexível da definição de integral, na medida em que esta não é alterada pela escolha dos pontos (objectos da função) nos subintervalos das partições e pelo acrescentar de novos pontos às partições *standard* (tornando-as mais finas).

Tomemos Φ uma função contínua total em $[x, y]$, com módulo de continuidade uniforme h nesse intervalo e consideremos a sucessão $(\overline{S}_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ definida do seguinte modo:

$$\forall n \in \mathbb{N}_1,\ \overline{S}_n := \sum_{i=0}^{2^{h(n)}-1} \frac{y-x}{2^{h(n)}}[\Phi(x+\frac{(y-x)i}{2^{h(n)}}, n)+\frac{1}{2^{n-2}}].$$

Dado $n \in \mathbb{N}_1$, $\overline{S}_n = S_n + \sum_{i=0}^{2^{h(n)}-1} \frac{y-x}{2^{h(n)}} \frac{1}{2^{n-2}} = S_n + \frac{y-x}{2^{n-2}}$. Logo, dados $p, k \in \mathbb{N}_1$ tais que $p < k$, temos que $|\overline{S}_p - \overline{S}_k| = |S_p + \frac{y-x}{2^{p-2}} - S_k - \frac{y-x}{2^{k-2}}| \leq |S_p - S_k| + |\frac{y-x}{2^{p-2}} - \frac{y-x}{2^{k-2}}| < \frac{1}{2^{p-2}} + \frac{y-x}{2^{p-2}} < \frac{1}{2^{p-2}} + \frac{1}{2^{p-2}} \leq \frac{1}{2^{p-3}}$. Prova-se assim que $(\overline{S}_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ é uma sucessão com módulo de convergência de Cauchy, nomeadamente $p(n) = n+3$, sendo portanto convergente.

Como, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, $|\overline{S}_n - S_n| = |S_n + \frac{y-x}{2^{n-2}} - S_n| = \frac{y-x}{2^{n-2}} \leq \frac{1}{2^{n-2}}$, pelo lema 4.4, temos que $\lim \overline{S}_n = \lim S_n = \int_x^y \Phi(t)\, dt$.

Analogamente, definindo $\underline{S}_n := \sum_{i=0}^{2^{h(n)}-1} \frac{y-x}{2^{h(n)}}[\Phi(x+\frac{(y-x)i}{2^{h(n)}}, n) - \frac{1}{2^{n-2}}]$, prova-se que $(\underline{S}_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ é uma sucessão convergente e $\lim \underline{S}_n = \lim S_n = \int_x^y \Phi(t)\, dt$. Note que $\forall n \in \mathbb{N}_1, \underline{S}_n \leq S_n \leq \overline{S}_n$.

Se na definição de integral escolhermos outros pontos em cada subintervalo da partição *standard*, que não obrigatoriamente o ponto inicial de cada um desses subintervalos, o valor do integral não se altera, isto porque, notando esses pontos por α_i, sabemos que $|\alpha_i - (x+\frac{(y-x)i}{2^{h(n)}})| \leq \frac{1}{2^{h(n)}} < \frac{1}{2^{h(n-1)}}$, e portanto $|\Phi(\alpha_i, n) - \Phi(x+\frac{(y-x)i}{2^{h(n)}}, n)| \leq |\Phi(\alpha_i, n) - \Phi(\alpha_i)| + |\Phi(\alpha_i) - \Phi(x+\frac{(y-x)i}{2^{h(n)}})| + |\Phi(x+\frac{(y-x)i}{2^{h(n)}}) - \Phi(x+\frac{(y-x)i}{2^{h(n)}}, n)| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-2}}$.

Logo, $\Phi(x+\frac{(y-x)i}{2^{h(n)}}, n) - \frac{1}{2^{n-2}} \leq \Phi(\alpha_i, n) \leq \Phi(x+\frac{(y-x)i}{2^{h(n)}}, n) + \frac{1}{2^{n-2}}$ e portanto $\underline{S}_n \leq \sum_{i=0}^{2^{h(n)}-1} \frac{y-x}{2^{h(n)}} \Phi(\alpha_i, n) \leq \overline{S}_n$. Consequentemente, a nova sucessão também converge para $\int_x^y \Phi(t)\, dt$.

Obviamente, considerando a possibilidade de em $\overline{S}_n$ e $\underline{S}_n$ escolhermos outros pontos que não apenas os pontos iniciais dos subintervalos, o valor do limite também não se altera.

Vejamos em seguida que, acrescentar novos pontos à partição *standard*, aumentando assim o número de parcelas em S_n, também não altera o limite.

Imaginemos que, em dado subintervalo $[a, b]$ de diâmetro $\frac{y-x}{2^{h(n)}}$ da partição *standard* de S_n, se coloca novo ponto c, obtendo-se $[a, c] \cup [c, b]$. Onde dantes se considerava apenas a parcela $\frac{y-x}{2^{h(n)}}\Phi(a,n)$, temos agora $d_1\Phi(a,n)+d_2\Phi(c,n)$, com $d_1+d_2=\frac{y-x}{2^{h(n)}}$. Mas $\Phi(a,n)-\frac{1}{2^{n-2}}\leq\Phi(c,n)\leq\Phi(a,n)+\frac{1}{2^{n-2}}$ logo, considerando partições mais finas obtemos sucessões limitadas superiormente por $\overline{S}_n$ e inferiormente por $\underline{S}_n$, não alterando o limite das mesmas.

Proposição 4.26 *Sendo z um número racional diádico tal que $x<z<y$ e Φ uma função contínua total em $[x,y]$ com módulo de continuidade uniforme nesse intervalo, então*

$$\int_x^z \Phi(t)\ dt + \int_z^y \Phi(t)\ dt = \int_x^y \Phi(t)\ dt.$$

Demonstração

Pela definição de integral, consideremos as sucessões $(V_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ e $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ tais que $\int_x^z \Phi(t)\ dt := \lim V_n$, $\int_z^y \Phi(t)\ dt := \lim U_n$ e $\int_x^y \Phi(t)\ dt := \lim S_n$.

Dado $n\in\mathbb{N}_1$, $V_n=\sum_{i=0}^{2^{h(n)}-1}\frac{z-x}{2^{h(n)}}\Phi(x+\frac{(z-x)i}{2^{h(n)}},n)$, $U_n=\sum_{i=0}^{2^{h(n)}-1}\frac{y-z}{2^{h(n)}}\Phi(z+\frac{(y-z)i}{2^{h(n)}},n)$ e $S_n=\sum_{i=0}^{2^{h(n)}-1}\frac{y-x}{2^{h(n)}}\Phi(x+\frac{(y-x)i}{2^{h(n)}},n)$.

Ou seja, consideramos partições *standard* de diâmetros $\frac{z-x}{2^{h(n)}}$, $\frac{y-z}{2^{h(n)}}$ e $\frac{y-x}{2^{h(n)}}$ respectivamente em $[x,z]$, $[z,y]$ e $[x,y]$.

Se em cada nível n tomarmos S'_n como o resultado de considerar uma partição mais fina do que a de S_n, acrescentando os pontos das partições de V_n e U_n, pelo estudo efectuado anteriormente, sabemos que $\lim S'_n=\int_x^y \Phi(t)\ dt$.

Por outro lado subdividindo o somatório que define S'_n em dois, os que definem V'_n e U'_n respectivamente e que correspondem a partições mais finas dos intervalos $[x,z]$ e $[z,y]$ do que as consideradas em V_n e U_n temos que $\lim V'_n=\int_x^z \Phi(t)\ dt$ e $\lim U'_n=\int_z^y \Phi(t)\ dt$.

Mas então $\int_x^y \Phi(t)\ dt=\lim S'_n=\lim(V'_n+U'_n)=\lim V'_n+\lim U'_n=\int_x^z \Phi(t)\ dt+\int_z^y \Phi(t)\ dt$, como pretendiamos demonstrar.

□

4.5 Teorema Fundamental do Cálculo

Com vista a demonstrar que em TCA^2 permanece válido um dos mais importantes teoremas do cálculo integral — o *Teorema Fundamental do Cálculo* — iniciamos esta secção com a introdução da *função integral indefinido*.

Sendo Φ uma função contínua total em $[0,1]$ com módulo de continuidade uniforme nesse intervalo, no que se segue, temos em vista definir Ψ, uma função contínua total em $[0,1]$, tal que $\Psi(x)=\int_0^x \Phi(t)\ dt$ para todo o racional diádico $x\in[0,1]$.

Imediatamente constatamos a veracidade do resultado abaixo.

Lema 4.5 *Toda a função contínua total (respectivamente contínua total no intervalo $[\alpha_1,\alpha_2]$, com $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$), Φ, com módulo de continuidade uniforme (respectivamente módulo de continuidade uniforme em $[\alpha_1,\alpha_2]$) é* uniformemente contínua *(respectivamente* uniformemente contínua *em $[\alpha_1,\alpha_2]$), i.e. $\forall k\in\mathbb{N}_1\exists m\in\mathbb{N}_1\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}(|\alpha-\beta|<\frac{1}{2^m}\rightarrow|\Phi(\alpha)-\Phi(\beta)|<\frac{1}{2^k})$ (respectivamente $\forall k\in\mathbb{N}_1\exists m\in\mathbb{N}_1\forall\alpha,\beta\in[\alpha_1,\alpha_2](|\alpha-\beta|<\frac{1}{2^m}\rightarrow|\Phi(\alpha)-\Phi(\beta)|<\frac{1}{2^k})$).*

No artigo [11], provou-se (em BTFA, sendo por maioria de razão válido também em TCA^2) que se tem o seguinte resultado:

Proposição 4.27 *Seja Φ uma função contínua total em $[0,1]$, uniformemente contínua nesse intervalo. Então existe $m \in \mathbb{N}_1$ tal que para todo $\alpha \in [0,1]$, $\Phi(\alpha) \leq 2^m$.*

Relembremos que, sendo Φ uma função contínua total em $[0,1]$ com módulo de continuidade uniforme h nesse intervalo, temos que $|\Phi| = |.| \circ \Phi$ é também uma função contínua total em $[0,1]$ com módulo de continuidade uniforme h em $[0,1]$. Veja corolário 4.1 e demonstração da proposição 4.3-c).

Fixemos Φ uma função contínua total em $[0,1]$ com módulo de continuidade uniforme em $[0,1]$. Pelo referido atrás, sabemos ser possível tomar $m \in \mathbb{N}_1$ tal que $\forall \alpha \in [0,1], |\Phi|(\alpha) \leq 2^m$.

Seja $d : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ a função definida por $d(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x < 0 \\ 1 & 1 < x. \end{cases}$

Definimos $(x,n)\Psi(y,k)$ como sendo:

$$x, y \in \mathbb{D} \wedge n, k \in \mathbb{N}_1 \wedge |\int_0^{d(x)} \Phi(t)\, dt - y| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-m-1}}.$$

Observação 4.15 *Tendo em conta que a fórmula anterior é equivalente a uma fórmula $\exists\Sigma_0^{1,b}$ da forma $\exists w \theta'(w,x,n,y,k)$, o conjunto $\{\langle w,x,n,y,k\rangle : \theta'(w,x,n,y,k)\}$ é oficialmente a função Ψ.*

Proposição 4.28 *Ψ, atrás definida, é uma função contínua parcial de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.*

Demonstração

Se $(x,n)\Psi(y,k)$ e $(x,n)\Psi(y',k')$ então $|y-y'| \leq |y - \int_0^{d(x)} \Phi(t)\, dt| + |\int_0^{d(x)} \Phi(t)\, dt - y'| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-m-1}} + \frac{1}{2^{k'}} - \frac{1}{2^{n-m-1}} < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k'}}$.

Se $(x,n)\Psi(y,k) \wedge (x',n') < (x,n)$ vejamos que $(x',n')\Psi(y,k)$. Sabemos que $|\int_0^{d(x')} \Phi(t)\, dt - y| \leq |\int_0^{d(x')} \Phi(t)\, dt - \int_0^{d(x)} \Phi(t)\, dt| + |\int_0^{d(x)} \Phi(t)\, dt - y|$. A primeira parcela é menor ou igual que $|d(x') - d(x)|2^m$, que pela maneira como definimos $d(x)$ é menor ou igual que $|x'-x|2^m$, que por sua vez, atendendo ao facto de que $(x',n') < (x,n)$, é menor que $(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n'}})2^m$. Por hipótese, sabemos que a segunda parcela é menor que $\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-m-1}}$. Logo $|\int_0^{d(x')} \Phi(t)\, dt - y| < \frac{1}{2^k} + 2^m(2^{-n} - 2^{-n'} - 2^{-n+1}) = \frac{1}{2^k} + 2^m(-2^{-n} - 2^{-n'}) < \frac{1}{2^k} + 2^m(-2^{-n'+1}) = \frac{1}{2^k} - 2^{m-n'+1}$.

Se $(x,n)\Psi(y,k) \wedge (y,k) < (y',k')$ então $|\int_0^{d(x)} \Phi(t)\, dt - y'| \leq |\int_0^{d(x)} \Phi(t)\, dt - y| + |y-y'| < \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-m-1}} + \frac{1}{2^{k'}} - \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k'}} - \frac{1}{2^{n-m-1}}$. Logo $(x,n)\Psi(y',k')$.

$\square$

Proposição 4.29 *Se $\alpha \in [0,1]$ então $\alpha \in \mathrm{dom}\Psi$ e para todo o racional diádico r em $[0,1]$, $\Psi(r) = \int_0^r \Phi(t)\, dt$.*

Demonstração

Tomemos $\alpha \in [0,1]$. Fixemos $k \in \mathbb{N}_1$ e provemos que $\exists n \in \mathbb{N}_1 \exists y \in \mathbb{D}(\alpha(n+1), n)\Psi(y,k)$.

Seja $n := m + k + 2$. Sabemos que $\int_0^{d(\alpha(n+1))} \Phi(t)\,dt = \beta$, com $\beta(n) = \sum_{i=0}^{2^{h(n+5)}-1} \frac{d(\alpha(n+1))}{2^{h(n+5)}} \Phi(\frac{d(\alpha(n+1))i}{2^{h(n+5)}}, n+5)$. Seja $y := \beta(k+2)$.

$|\int_0^{d(\alpha(n+1))} \Phi(t)\,dt - y| = |\beta - \beta(k+2)| \leq \frac{1}{2^{k+2}} < \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2-1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-m-1}}$. Logo $(\alpha(n+1), n)\Psi(y,k)$ e portanto $\alpha \in \mathrm{dom}\Psi$.

Para provarmos que, dado $r \in \mathbb{D}$ tal que $r \in [0,1]$, se tem $\Psi(r) = \int_0^r \Phi(t)\,dt$, tomemos x, y, n, k tais que $(x,n)\Psi(y,k) \wedge |r-x| < \frac{1}{2^n}$ e provemos que $|\int_0^r \Phi(t)\,dt - y| \leq \frac{1}{2^k}$. Ora $|\int_0^r \Phi(t)\,dt - y| \leq |\int_0^r \Phi(t)\,dt - \int_0^{d(x)} \Phi(t)\,dt| + |\int_0^{d(x)} \Phi(t)\,dt - y| < |r - d(x)|2^m + \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-m-1}} \leq |r-x|2^m + \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-m-1}} < 2^{m-n} + \frac{1}{2^k} - 2^{m-n+1} < \frac{1}{2^k}$.

□

Observação 4.16 *Dada Φ uma função contínua total em $[0,1]$ com módulo de continuidade uniforme nesse intervalo, podemos, sem ambiguidade para o que pretendemos estudar em seguida, considerar a função contínua total em $[0,1]$, Ψ, conhecida como* integral indefinido *de Φ, tal que $\Psi(r) = \int_0^r \Phi(t)\,dt$, para todo o r racional diádico em $[0,1]$.*

Note que, embora a função Ψ como conjunto dependa do número tally *m escolhido, as imagens dos racionais diádicos em $[0,1]$ por intermédio de Ψ e a menos da igualdade de reais, não dependem de tal escolha. Pelo que, embora em rigor o integral indefinido de Φ possa ser dado por diferentes conjuntos de quintuplos, visto as funções por eles definidos coincidirem a respeito das imagens dos racionais diádicos no intervalo $[0,1]$, falamos da* função integral indefinido*.*

Ainda com o propósito de demonstrarmos o Teorema Fundamental do Cálculo para funções definidas no intervalo $[0,1]$, necessitamos do conceito de integral de *limites* não apenas racionais mas *reais*.

No que se segue, consideramos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ e Φ uma função contínua total em $[\alpha, \beta]$ com módulo de continuidade uniforme nesse intervalo. Note que $\alpha + \frac{\beta-\alpha}{2^{n+2}}$ e $\beta - \frac{\beta-\alpha}{2^{n+2}}$, com $n \in \mathbb{N}_1$, definem sucessões decrescente e crescente respectivamente, no primeiro caso de limite α e no segundo de limite β.

Como observado na Secção 4.1, entre dois números reais existe sempre um número racional diádico, pelo que, intuitivamente, é possível pensarmos em duas sucessões de racionais diádicos $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ que convirjam para α e β respectivamente. No que se segue construimos rigorosamente tais sucessões.

Sejam $s \in \mathbb{N}_1$ tal que $\frac{1}{2^s} < \beta - \alpha$ e $m \in \mathbb{N}_1$ tal que $|\Phi(t)| \leq 2^m, \forall t \in [\alpha, \beta]$.

$(\widetilde{\alpha}_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$, com $\widetilde{\alpha}_n := (\alpha + \frac{\beta-\alpha}{2^{n+2+m}})(n+s+4+m)$, $\forall n \in \mathbb{N}_1$, é uma sucessão de números racionais diádicos que, como veremos de seguida, é *estritamente decrescente*, *converge para* α e $|\widetilde{\alpha}_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{m+n}}, \forall n \in \mathbb{N}_1$.

Comecemos por provar que $\widetilde{\alpha}_{n+1} < \widetilde{\alpha}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}_1$.

Como cálculo auxiliar, observemos que $|(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{2^{n+3+m}}) - (\alpha + \frac{\beta-\alpha}{2^{n+2+m}})| = |\frac{\beta-\alpha-2(\beta-\alpha)}{2^{n+3+m}}| = \frac{\beta-\alpha}{2^{n+3+m}} > \frac{1}{2^{n+3+s+m}}$.

Logo,

$(\star)\ \alpha + \frac{\beta-\alpha}{2^{n+3+m}} + \frac{1}{2^{n+3+s+m}} < \alpha + \frac{\beta-\alpha}{2^{n+2+m}}$.

$\widetilde{\alpha}_{n+1} = (\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2^{n+3+m}})(n+s+5+m) \leq \alpha+\frac{\beta-\alpha}{2^{n+3+m}}+\frac{1}{2^{n+s+5+m}} < \alpha+\frac{\beta-\alpha}{2^{n+3+m}}+\frac{1}{2^{n+s+3+m}} - \frac{1}{2^{n+s+4+m}} \overset{(\star)}{<} \alpha + \frac{\beta-\alpha}{2^{n+2+m}} - \frac{1}{2^{n+s+4+m}} \leq (\alpha + \frac{\beta-\alpha}{2^{n+2+m}})(n+s+4+m) = \widetilde{\alpha}_n$.

Verifiquemos agora que $\lim \widetilde{\alpha}_n = \alpha$.

$|\alpha-\widetilde{\alpha}_{n+i}| = |\alpha-(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2^{n+i+2+m}})(n+i+s+4+m)| \leq |\alpha-(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2^{n+i+2+m}})|+|\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2^{n+i+2+m}} - (\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2^{n+i+2+m}})(n+i+s+4+m)| \leq |\frac{\beta-\alpha}{2^{n+i+2+m}}| + \frac{1}{2^{n+i+s+4+m}} \leq \frac{1}{2^{n+i+2+m}} + \frac{1}{2^{n+i+s+4+m}} < \frac{1}{2^{n+i+1+m}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Logo, para todo o k em $\mathbb{N}_1$ existe $n \in \mathbb{N}_1$ (exemplo $n = k-1$) tal que $\forall i \in \mathbb{N}_1, |\alpha-\widetilde{\alpha}_{n+i}| < 2^{-k}$.

A última propriedade da sucessão $(\widetilde{\alpha}_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ que nos proposemos verificar, pode ser obtida da seguinte forma: $|\widetilde{\alpha}_n - \alpha| = |(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{2^{n+2+m}})(n+s+4+m) - \alpha| \leq |(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{2^{n+2+m}})(n+s+4+m) - (\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2^{n+2+m}})| + |\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2^{n+2+m}} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+s+4+m}} + \frac{1}{2^{n+2+m}} \leq \frac{1}{2^{n+m+1}} < \frac{1}{2^{n+m}}, \forall n \in \mathbb{N}_1$.

De forma análoga, a sucessão de números racionais diádicos $(\widetilde{\beta}_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ definida por $\widetilde{\beta}_n := (\beta - \frac{\beta-\alpha}{2^{n+2+m}})(n+s+4+m), \forall n \in \mathbb{N}_1$, é *estritamente crescente*, *converge para* β e é tal que $|\widetilde{\beta}_n - \beta| \leq \frac{1}{2^{m+n}}, \forall n \in \mathbb{N}_1$.

Atendendo a que $\widetilde{\alpha}_0 = (\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2^{2+m}})(s+4+m) \leq \alpha+\frac{\beta-\alpha}{2^{2+m}}+\frac{1}{2^{s+4+m}} < \alpha+\frac{\beta-\alpha}{2^{2+m}}+\frac{\beta-\alpha}{2^{4+m}} < \alpha+\frac{\beta-\alpha}{2^{m+1}} \leq \alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}$ e analogamente $\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2} < \widetilde{\beta}_0$, e sabendo já que $\widetilde{\alpha}$ e $\widetilde{\beta}$ são sucessões decrescente e crescente respectivamente, temos que $\forall n \in \mathbb{N}_1(\widetilde{\alpha}_n < \widetilde{\beta}_n)$.

Definição 4.9 *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, Φ uma função contínua total em $[\alpha, \beta]$ com módulo de continuidade uniforme nesse intervalo e $(\widetilde{\alpha}_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ e $(\widetilde{\beta}_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ as sucessões definidas atrás. Definimos o* integral entre α e β de Φ, *que notamos por $\int_\alpha^\beta \Phi(t)\ dt$, do seguinte modo:*

$$\int_\alpha^\beta \Phi(t)\ dt := \lim R_n$$

onde, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, $R_n = \int_{\widetilde{\alpha}_n}^{\widetilde{\beta}_n} \Phi(t)\ dt$.

Observação 4.17 *É possível, em TCA^2, considerarmos a sucessão $(R_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ tal que para todo o $n \in \mathbb{N}_1$ $R_n = \int_{\widetilde{\alpha}_n}^{\widetilde{\beta}_n} \Phi(t)\ dt$. Basta repararmos no estudo que antecede a proposição 4.25 e notar que tal sucessão pode ser codificada do seguinte modo:*

$(R_n)_{n\in\mathbb{N}_1} = \{\langle\langle m, n\rangle, d\rangle : m, n \in \mathbb{N}_1 \wedge d \in \mathbb{D} \wedge d = \sum_{i=0}^{2^{h(m+5)}-1} \frac{\widetilde{\beta}_n-\widetilde{\alpha}_n}{2^{h(m+5)}} \Phi(\widetilde{\alpha}_n + \frac{(\widetilde{\beta}_n-\widetilde{\alpha}_n)i}{2^{h(m+5)}}, m+5)\}$*, com h um módulo de continuidade uniforme para Φ em $[\alpha, \beta]$.*

Para o integral estar bem definido, resta provarmos que $(R_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ é uma sucessão convergente e não depende das sucessões $(\widetilde{\alpha}_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ e $(\widetilde{\beta}_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$. Mais rigorosamente, não depende dos números *tally* s e m tais que $\frac{1}{2^s} < \beta - \alpha$ e $|\Phi(t)| \leq 2^m$, que se encontram na base da definição das sucessões.

Comecemos por verificar que $(R_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ é convergente.

Dado $p < k$, sabemos que $\widetilde{\alpha}_k < \widetilde{\alpha}_p < \widetilde{\beta}_p < \widetilde{\beta}_k$.

$|R_p - R_k| = |\int_{\widetilde{\alpha}_p}^{\widetilde{\beta}_p} \Phi(t)\,dt - \int_{\widetilde{\alpha}_k}^{\widetilde{\beta}_k} \Phi(t)\,dt| = |\int_{\widetilde{\alpha}_k}^{\widetilde{\beta}_k} \Phi(t)\,dt - \int_{\widetilde{\alpha}_p}^{\widetilde{\beta}_p} \Phi(t)\,dt| = |\int_{\widetilde{\alpha}_k}^{\widetilde{\alpha}_p} \Phi(t)\,dt + \int_{\widetilde{\beta}_p}^{\widetilde{\beta}_k} \Phi(t)\,dt| \leq |\int_{\widetilde{\alpha}_k}^{\widetilde{\alpha}_p} \Phi(t)\,dt| + |\int_{\widetilde{\beta}_p}^{\widetilde{\beta}_k} \Phi(t)\,dt| \leq \int_{\widetilde{\alpha}_k}^{\widetilde{\alpha}_p} |\Phi(t)|\,dt + \int_{\widetilde{\beta}_p}^{\widetilde{\beta}_k} |\Phi(t)|\,dt \leq \int_{\widetilde{\alpha}_k}^{\widetilde{\alpha}_p} 2^m + \int_{\widetilde{\beta}_p}^{\widetilde{\beta}_k} 2^m = 2^m(\widetilde{\alpha}_p - \widetilde{\alpha}_k) + 2^m(\widetilde{\beta}_k - \widetilde{\beta}_p) < 2^m(\widetilde{\alpha}_p - \alpha) + 2^m(\beta - \widetilde{\beta}_p) \leq 2^m \frac{1}{2^{m+p}} + 2^m \frac{1}{2^{m+p}} = \frac{1}{2^{p-1}}$.

Logo, $p(n) := n+1$ é um módulo de convergência de Cauchy para $(R_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ e portanto $(R_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ é uma sucessão convergente.

Provamos agora a independência da definição relativamente à escolha de s e m.

Sejam s_1 e s_2 tais que $\frac{1}{2^{s_1}} \leq \beta - \alpha$ e $\frac{1}{2^{s_2}} \leq \beta - \alpha$ e m_1 e m_2 tais que $|\Phi(t)| \leq 2^{m_1}$ e $|\Phi(t)| \leq 2^{m_2}$ para todo o $t \in [\alpha, \beta]$ e consideremos as sucessões $((\widetilde{\alpha}_1)_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$, $((\widetilde{\beta}_1)_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ e $((\widetilde{\alpha}_2)_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$, $((\widetilde{\beta}_2)_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ correspondentes.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $m_1 \leq m_2$.

$|\int_{(\widetilde{\alpha}_1)_n}^{(\widetilde{\beta}_1)_n} \Phi(t)\,dt - \int_{(\widetilde{\alpha}_2)_n}^{(\widetilde{\beta}_2)_n} \Phi(t)| \leq |(\widetilde{\alpha}_1)_n - (\widetilde{\alpha}_2)_n|2^{m_1} + |(\widetilde{\beta}_1)_n - (\widetilde{\beta}_2)_n|2^{m_1} \leq (|(\widetilde{\alpha}_1)_n - \alpha| + |\alpha - (\widetilde{\alpha}_2)_n|)2^{m_1} + (|(\widetilde{\beta}_1)_n - \beta| + |\beta - (\widetilde{\beta}_2)_n|)2^{m_1} \leq (\frac{1}{2^{n+m_1}} + \frac{1}{2^{n+m_2}})2^{m_1} + (\frac{1}{2^{n+m_1}} + \frac{1}{2^{n+m_2}})2^{m_1} \leq 4 \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-2}}$.

Logo, pelo lema 4.4, $\lim \int_{(\widetilde{\alpha}_1)_n}^{(\widetilde{\beta}_1)_n} \Phi(t)\,dt = \lim \int_{(\widetilde{\alpha}_2)_n}^{(\widetilde{\beta}_2)_n} \Phi(t)\,dt$.

Para garantir a inexistência de ambiguidade no que respeita às definições de integrais de limites racionais e reais é necessário que, sendo α e β números racionais diádicos (que podem também ser encarados como números reais) as duas definições de integral coincidam.

Comecemos por provar o seguinte lema:

Lema 4.6 *Seja Φ uma função contínua total em $[\alpha, \beta]$ com módulo de continuidade uniforme, h, nesse intervalo. Seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ uma sucessão de reais tal que para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, $z_n \in [\alpha, \beta]$ e $\lim z_n = z \in [\alpha, \beta]$.*

Então, considerando a sucessão $(\Phi(z_n))_{n\in\mathbb{N}_1}$, temos que $\lim \Phi(z_n) = \Phi(z)$.

Demonstração

Como $\lim z_n = z$, sabemos que, dado $k \in \mathbb{N}_1$, existe $p \in \mathbb{N}_1$ tal que $p \leq n \rightarrow |z_n - z| < \frac{1}{2^{h(k)}}$. Uma vez que h é módulo de continuidade uniforme para Φ em $[\alpha, \beta]$, $|\Phi(z_n) - \Phi(z)| < \frac{1}{2^k}$.

□

Ora,

$$\int_\alpha^\beta \Phi(t)\,dt := \lim_n \int_{\widetilde{\alpha}_n}^{\widetilde{\beta}_n} \Phi(t)\,dt = \lim_n(\lim_m \sum_{i=0}^{2^{h(m)}-1} \frac{\widetilde{\beta}_n - \widetilde{\alpha}_n}{2^{h(m)}} \Phi(\widetilde{\alpha}_n + \frac{(\widetilde{\beta}_n - \widetilde{\alpha}_n)i}{2^{h(m)}}, m)) \ (\star)$$

com $\widetilde{\alpha}$ e $\widetilde{\beta}$ sucessões de números racionais nas condições da definição de integral, verificando em particular $\lim \widetilde{\alpha}_n = \alpha$ e $\lim \widetilde{\beta}_n = \beta$. Logo, pelo lema 4.6 e tendo em conta as usuais propriedades dos limites das sucessões, temos que $(\star) = \lim_m \lim_n \sum_{i=0}^{2^{h(m)}-1} \frac{\widetilde{\beta}_n - \widetilde{\alpha}_n}{2^{h(m)}} \Phi(\widetilde{\alpha}_n + \frac{(\widetilde{\beta}_n - \widetilde{\alpha}_n)i}{2^{h(m)}}, m)) = \lim_m \sum_{i=0}^{2^{h(m)}-1} \frac{\beta - \alpha}{2^{h(m)}} \Phi(\alpha + \frac{(\beta - \alpha)i}{2^{h(m)}}, m) = \int_\alpha^\beta \Phi(t)\,dt$.

Propriedades do integral, idênticas às apresentadas nas proposições 4.25 e 4.26, são válidas no âmbito dos integrais de limites reais. Tal resulta facilmente da definição 4.9, das proposições 4.25 e 4.26 e das propriedades dos limites.

Dado Φ uma função contínua total em $[0, 1]$, com módulo de continuidade uniforme nesse intervalo, a função integral indefinido, Ψ, verifica $\Psi(\beta) = \int_0^\beta \Phi(t)\, dt$, $\forall \beta \in [0, 1]$ e não somente para os números racionais diádicos. Isto porque, $\int_0^\beta \Phi(t)\, dt = \lim \int_{\widetilde{\alpha}_n}^{\widetilde{\beta}_n} \Phi(t)\, dt = \lim(\int_0^{\widetilde{\beta}_n} \Phi(t)\, dt - \int_0^{\widetilde{\alpha}_n} \Phi(t)\, dt) = \lim(\Psi(\widetilde{\beta}_n) - \Psi(\widetilde{\alpha}_n)) = \lim \Psi(\widetilde{\beta}_n) - \lim \Psi(\widetilde{\alpha}_n) \overset{lema\ 4.6}{=} \Psi(\beta) - \Psi(0) = \Psi(\beta)$.

Para a formulação do Teorema Fundamental do Cálculo Integral, introduzimos os conceitos que se seguem.

Definição 4.10 *Seja Φ uma função contínua total em $[0, 1]$, $\alpha \in [0, 1]$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Dizemos que β* é a derivada de Φ no ponto α *e denotamos por $\Phi'(\alpha) = \beta$ se*

$$\forall n \in \mathbb{N}_1 \exists m \in \mathbb{N}_1 \forall h \neq 0 (0 \leq \alpha + h \leq 1 \land |h| < \frac{1}{2^m} \to |\frac{\Phi(\alpha + h) - \Phi(\alpha)}{h} - \beta| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Definição 4.11 *Sejam Φ e Ψ funções contínuas totais em $[0, 1]$. Dizemos que* Φ é a derivada de Ψ *se $\forall \alpha \in [0, 1], \Phi(\alpha) = \Psi'(\alpha)$.*

Teorema 4.2 *(Teorema Fundamental do Cálculo Integral) Sejam Φ uma função contínua total em $[0, 1]$ com módulo de continuidade uniforme nesse intervalo e Ψ a função integral indefinido de Φ, i.e. uma função contínua total em $[0, 1]$ tal que $\Psi(\alpha) = \int_0^\alpha \Phi(t)\, dt, \forall \alpha \in [0, 1]$.*

Então Φ é a derivada de Ψ.

Demonstração

Tomemos $\alpha \in [0, 1]$ e provemos que $\Phi(\alpha) = \Psi'(\alpha)$, i.e. $\forall n \in \mathbb{N}_1 \exists m \in \mathbb{N}_1 \forall h \neq 0 (0 \leq \alpha + h \leq 1 \land |h| < \frac{1}{2^m} \to |\frac{\Psi(\alpha+h)-\Psi(\alpha)}{h} - \Phi(\alpha)| \leq \frac{1}{2^n})$.

Seja p um módulo de continuidade uniforme para Φ em $[0, 1]$. Dado $n \in \mathbb{N}_1$, tomemos $m := p(n)$. Seja $h \neq 0$ tal que $0 \leq \alpha + h \leq 1 \land |h| < \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{p(n)}}$. Visto p ser módulo de continuidade uniforme para Φ, temos que $|\Phi(\alpha) - \Phi(\alpha + k)| < \frac{1}{2^n}$ para todo o k tal que $|k| \leq |h|$.

Se $0 < h$, temos que $h(\Phi(\alpha) - \frac{1}{2^n}) \leq \int_0^{\alpha+h} \Phi(t)\, dt - \int_0^\alpha \Phi(t)\, dt \leq h(\Phi(\alpha) + \frac{1}{2^n})$ e se $h < 0$ temos que $h(\Phi(\alpha) + \frac{1}{2^n}) \leq \int_0^{\alpha+h} \Phi(t)\, dt - \int_0^\alpha \Phi(t)\, dt \leq h(\Phi(\alpha) - \frac{1}{2^n})$, e portanto em qualquer dos casos $\Phi(\alpha) - \frac{1}{2^n} \leq \frac{\int_0^{\alpha+h} \Phi(t)\, dt - \int_0^\alpha \Phi(t)\, dt}{h} \leq \Phi(\alpha) + \frac{1}{2^n}$. Provamos assim que $|\frac{\int_0^{\alpha+h} \Phi(t)\, dt - \int_0^\alpha \Phi(t)\, dt}{h} - \Phi(\alpha)| \leq \frac{1}{2^n}$, ou seja, $|\frac{\Psi(\alpha+h)-\Psi(\alpha)}{h} - \Phi(\alpha)| \leq \frac{1}{2^n}$.

□

4.6 Princípio FAN_0 e o Teorema de Heine-Cantor

No artigo [11] provou-se que, em $\mathsf{BTFA} + \Pi_1^b$-WKL (teoria em que é válido o lema fraco de König restrito a árvores infinitas binárias definidas por fórmulas Π_1^b), toda a função contínua total em $[0,1]$ é uniformemente contínua em $[0,1]$.

Vimos, aquando do estudo da teoria $\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN}_0$ que o esquema de reflexão Π^1_1-estrita implica o lema fraco de König para fórmulas $\Sigma^{1,b}_\infty$. Logo, em $\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN}_0$, toda a função contínua total em $[0,1]$ é uniformemente contínua nesse intervalo.

Vejamos que se prova algo ligeiramente mais forte.

Teorema 4.3 *Em* $\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN}_0$*, toda a função contínua total em* $[0,1]$ *tem módulo de continuidade uniforme em* $[0,1]$*.*

Demonstração

Seja Φ uma função contínua total em $[0,1]$. Pelo notado anteriormente, sabemos que Φ é uniformemente contínua em $[0,1]$, i.e. $\forall k \in \mathbb{N}_1 \exists m \in \mathbb{N}_1 \forall \alpha, \beta \in [0,1](|\alpha - \beta| < \frac{1}{2^m} \to |\Phi(\alpha) - \Phi(\beta)| < \frac{1}{2^k})$. Por questões de complexidade, consideramos a seguinte fórmula equivalente: $\forall k \in \mathbb{N}_1 \exists m \in \mathbb{N}_1 \forall \alpha, \beta \in [0,1](|\alpha - \beta| \leq \frac{1}{2^m} \to |\Phi(\alpha) - \Phi(\beta)| < \frac{1}{2^k})$.

Pela observação 4.4, sabemos que $|\alpha - \beta| \leq \frac{1}{2^m} \to |\Phi(\alpha) - \Phi(\beta)| < \frac{1}{2^k}$ é equivalente a uma fórmula $\exists\Sigma^{1,b}_0$, i.e. uma fórmula da forma $\exists l A(l, \alpha, \beta, k, m)$, com A fórmula $\Sigma^{1,b}_0$.

Como todo o número real é igual a um certo número real diádico, a fórmula anterior é equivalente a: $\forall k \in \mathbb{N}_1 \exists m \in \mathbb{N}_1 \forall \alpha, \beta \in [0,1]$ 'diádicos' $\exists l A(l, \alpha, \beta, k, m)$.

Como um número real diádico entre 0 e 1 tem a forma $+\epsilon \cdot X$, com X um caminho infinito, vemos que, abreviando por $Path(X)$ a expressão $\forall x, y((x \in X \wedge y \subseteq x \to y \in X) \wedge (x \in X \wedge y \in X \to x \subseteq y \vee y \subseteq x))$, a fórmula anterior é equivalente a $\forall k \in \mathbb{N}_1 \exists m \in \mathbb{N}_1 \forall X, Y \exists l (Path(X) \wedge Path(Y) \to A'(l, X, Y, k, m))$, que por sua vez é equivalente a $\forall k \in \mathbb{N}_1 \exists m \in \mathbb{N}_1 \forall X, Y \exists n B(n, X, Y, k, m)$, com B uma fórmula $\Sigma^{1,b}_0$. Pelo princípio de reflexão Π^1_1-estrita, temos que $\forall k \in \mathbb{N}_1 \exists m \in \mathbb{N}_1 \exists z \forall X, Y \exists n \preceq z B(n, X, Y, k, m)$.

Uma vez que $\exists n \preceq z B(n, X, Y, k, m)$ é uma fórmula $\Sigma^{1,b}_0$, existe um termo t tal que a fórmula obtida pelo princípio de reflexão é equivalente a $\forall k \in \mathbb{N}_1 \exists m \in \mathbb{N}_1 \exists z \forall X \preceq t \forall Y \preceq t \exists n \preceq z B(n, X, Y, k, m)$. Como X e Y são caminhos de comprimento limitado por t, podemos encará-los como palavras x e y limitadas por t, desde que substituamos em B, $r \in X$ e $r \in Y$ por $r \subseteq x$ e $r \subseteq y$ respectivamente. Ficamos então com $\forall k \in \mathbb{N}_1 \exists m \in \mathbb{N}_1 \exists z \forall x \preceq t \forall y \preceq t \exists n \preceq z B'(n, x, y, k, m)$. Por minimização para fórmulas limitadas, podemos definir $h(k) :=$ 'a primeira coordenada' do menor $\langle m, z \rangle$ tal que $m \in \mathbb{N}_1 \wedge \forall x \preceq t \forall y \preceq t \exists n \preceq z B'(n, x, y, k, m)$. Tal h é um módulo de continuidade uniforme para Φ em $[0,1]$.

$\square$

Observação 4.18 *Em* TCA^2*, introduzimos a noção de integral de Riemann para funções* Φ *contínuas totais em* $[0,1]$ *com módulo de continuidade uniforme nesse intervalo. Como consequência imediata do que acabámos de provar, na teoria* $\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN}_0$ *toda a função contínua total em* $[0,1]$ *é integrável à Riemann.*

CAPÍTULO 5

'Tenho a impressão de ter sido uma criança brincando à beira-mar, divertindo-me em descobrir uma pedrinha mais lisa ou uma concha mais bonita que as outras, enquanto o imenso oceano da verdade, continua misterioso diante dos meus olhos.'

Isaac Newton

Notas Finais

Subescrevendo a ideia de que o mundo subrecursivo suporta uma porção muito considerável dos conceitos e resultados matemáticos, esta tese pretende ser um pequeno contributo para o seu reforço.

O estudo do integral de Riemann em sistemas de análise fraca surge naturalmente na sequência de trabalhos anteriores no âmbito da matemática recíproca. Em [38], Simpson havia já desenvolvido o conceito de integração à Riemann em RCA_0, tendo recorrido à noção de módulo de continuidade uniforme, não se deparando contudo com outras questões técnicas aqui abordadas, nomeadamente relativas a complexidade, visto RCA_0 como teoria base ser substancialmente mais forte que TCA^2. Mais recentemente, o artigo [10], centrado numa teoria associada à computação em tempo polinomial, BTFA, abriu caminho para a reflexão sobre qual o sistema mais fraco suficiente para permitir integração. Desse artigo emergiram (pelo menos) duas investigações paralelas mas independentes. Uma apresentada no Capítulo 4 desta tese, que culminou com a prova de que em teorias (presumivelmente) mais fracas do que computar em espaço polinomial, nomeadamente associadas a FCH, é possível definir integração à Riemann para funções com módulo de continuidade uniforme, sendo a contagem uma condição *sine quo non* para o desenvolvimento de tal noção. E outra, parte integrante do trabalho de doutoramento de Ana Nunes, em que se prova ser possível introduzir uma noção de integral em BTFA para uma classe restrita (mas significativa) de funções.

Muito ainda se poderia investigar no âmbito da formalização de resultados matemáticos em sistemas fracos. Perfeitamente convencidos do interesse de tal tarefa na melhor compreensão de resultados fulcrais em matemática, admitimos que o elevado esforço empreendido, dada a escassez de recursos nas teorias base, pode ser ligeiramente desencorajador. Uma possibilidade seria investigar se as teorias introduzidas nesta dissertação são interpretáveis em Q. Como Samuel Buss recorda em [3], Ko e Friedman mostram em [30] que computar em espaço polinomial é suficiente para definir integração mas não desde o ponto de vista da demonstrabilidade (segundo abordagem da presente tese), tendo Fernandes e Ferreira desenvolvido trabalho nessa área, nomeadamente provando em [10] que BTFA (a sua teoria base para a análise) é interpretável em Q.

Outra possibilidade seria tentar transpor para sistemas *feasible* o estudo desenvolvido por Kohlenbach (veja [31]) em todos os tipos finitos, ambiente onde novas questões e técnicas surgem, como a interpretação funcional e funcional limitada, a extensão para variáveis *safe/normal* etc. Recentemente, Ferreira e Oliva estudaram em [21] a meta-matemática da interpretação funcional limitada sobre sistemas *feasible*.

Para finalizar, e a propósito do estudo desenvolvido no Capítulo 2, que torna acessível a demonstração do teorema de Harrington a quem não esteja familiarizado com o método do *forcing*, questionamo-nos sobre se tal raciocínio pode ser transposto para outros resultados de conservação. Em particular, acreditamos que o resultado de conservação '$\mathsf{TCA}^2 + \mathsf{FAN}_0$ é uma teoria $\forall\exists\Sigma_1^{1,b}$-conservativa sobre TCA^2' — provado através da técnica do *forcing* no Capítulo 3 — admite uma demonstração no âmbito da teoria da demonstração, idêntica à apresentada para o resultado de Harrington, recorrendo a uma formulação adequada do princípio FAN_0.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Avigad. Formalizing forcing arguments in subsystems of second-order arithmetic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 82:165–191, 1996.

[2] W. Buchholz and W. Sieg. A note on polynomial time computable arithmetic. *Contemporary Mathematics, American Mathematical Society*, 106:51–55, 1990.

[3] S. Buss. Nelson's work on logic and foundations and other reflections on foundations of mathematics. Submetido para publicação, 27 páginas.

[4] S. Buss. *Bounded arithmetic.* PhD thesis, Princeton University, Princeton, New Jersey, 1985. Uma versão revista desta tese foi publicada por Bibliopolis (Naples) em 1986.

[5] S. Buss. First-order proof theory of arithmetic. In S. R. Buss, editor, *Handbook of Proof Theory*, volume 137, pages 79–147. Elsevier, Amsterdam, 1998.

[6] S. Buss. An introduction to proof theory. In S. R. Buss, editor, *Handbook of Proof Theory*, volume 137, pages 1–78. Elsevier, Amsterdam, 1998.

[7] C. Chang and H. Keisler. *Model theory.* North-Holland, second edition, 1977.

[8] A. Fernandes. *Investigações em sistemas de análise exequível.* Dissertação de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Portugal, 2001.

[9] A. Fernandes. A new conservation result of WKL_0 over RCA_0. *Archive for Mathematical Logic*, 41:55–63, 2002.

[10] A. Fernandes and F. Ferreira. Groundwork for weak analysis. *The Journal of Symbolic Logic*, 67(2):557–578, 2002.

[11] A. Fernandes and F. Ferreira. Basic applications of weak König's lemma in feasible analysis. In Stephen Simpson, editor, *Reverse Mathematics 2001*, volume 21 of *Lecture Notes in Logic*, pages 175–188. A K Peters, Massachusetts, 2005.

[12] F. Ferreira. Análise, exequibilidade e lógica. Em *Actas do III Encontro dos Algebristas Portugueses*, organização de Marques de Sá et al. (Departamento de Matemática de Coimbra), páginas 47–70, 1994.

[13] F. Ferreira. *Polynomial time computable arithmetic and conservative extensions.* PhD thesis, Pennsylvania State University, USA, 1988.

[14] F. Ferreira. Polynomial time computable arithmetic. *Contemporary Mathematics, American Mathematical Society*, 106:137–156, 1990.

[15] F. Ferreira. Stockmeyer induction. In Samuel Buss and Phil Scott, editors, *Feasible Mathematics*, volume 9 of *Progress in Computer Science and Applied Logic*, pages 161–180. Birkhäuser, 1990.

[16] F. Ferreira. Binary models generated by their tally part. *Archive for Mathematical Logic*, 33:283–289, 1994.

[17] F. Ferreira. A feasible theory for analysis. *The Journal of Symbolic Logic*, 59(3):1001–1011, 1994.

[18] F. Ferreira. A simple proof of Parsons' theorem. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 46:83–91, 2005.

[19] F. Ferreira and G. Ferreira. Counting as integration in feasible analysis. Aceite para publicação em: *Mathematical Logic Quarterly*, 5 páginas.

[20] F. Ferreira and G. Ferreira. Harrington's conservation theorem redone. Submetido para publicação, 17 páginas.

[21] F. Ferreira and P. Oliva. Bounded functional interpretation and feasible analysis. Submetido para publicação, 23 páginas.

[22] G. Ferreira. *Aritmética computável em espaço polinomial.* Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, Portugal, 2001.

[23] G. Ferreira and I. Oitavem. An interpretation of S^1_2 in Σ^b_1-NIA. Aceite para publicação em: *Portugalia Mathematica*, 17 páginas.

[24] H. Friedman. Systems of second order arithmetic with restricted induction, I, II (abstracts). *The Journal of Symbolic Logic*, 41:557–559, 1976.

[25] G. Gentzen. Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift*, 39:176–210, 405–431, 1935.

[26] D. Hilbert and P. Bernays. *Grundlagen der mathematik.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, Berlin, second edition, 1968.

[27] J. Johannsen and C. Pollett. On proofs about threshold circuits and counting hierarchies (extended abstract). *Thirteenth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pages 444–452, 1998.

[28] R. Kaye. *Models of Peano arithmetic*, volume 15 of *Oxford Logic Guides.* Clarendon Press, Oxford, 1991.

[29] K.-I. Ko. *Complexity theory of real functions.* Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1991.

[30] K.-I. Ko and H. Friedman. Computational complexity of real functions. *Theoretical Computer Science*, 20:323–352, 1982.

[31] U. Kohlenbach. Proof interpretations and the computational content of proofs. http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~kohlenbach/newcourse.ps.gz. Notas de um curso em progresso.

[32] D. König. Über eine schlussweise aus dem endlichen ins unendliche: Punktmengen. Kartenfärben. Verwandtschaftsbeziehungen. Schachspiel. *Acta Litterarum ac Scientiarum (Ser. Sci. Math) Szeged*, 3:121–130, 1927.

[33] I. Oitavem. *Três assuntos de lógica e complexidade.* Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa, Portugal, 1994.

[34] C. Parsons. On a number theoretic choice schema and its relation to induction. In A. Kino J. Myhill and R. E. Vesley, editors, *Intuitionism and Proof Theory*, pages 459–473. North-Holland, 1970.

[35] W. Sieg. Fragments of arithmetic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 28:33–71, 1985.

[36] W. Sieg. Hilbert's program sixty years later. *The Journal of Symbolic Logic*, 53:338–348, 1988.

[37] W. Sieg. Herbrand analyses. *Archive for Mathematical Logic*, 30:409–441, 1991.

[38] S. G. Simpson. *Subsystems of second-order arithmetic.* Perspectives in Mathematical Logic. Springer, Berlin, 1999.

[39] M. Szabo. *The collected papers of Gerhard Gentzen.* North-Holland, 1969.

[40] G. Takeuti. *Proof theory.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. North-Holland, 1987.

[41] L. Valiant. The complexity of computing the permanent. *Theoretical Computer Science*, 8:189–201, 1979.

[42] H. Vollmer and K. Wagner. Recursion theoretic characterizations of complexity classes of counting functions. *Theoretical Computer Science*, 163:245–258, 1996.

[43] K. Wagner. Some observations on the connection between counting and recursion. *Theoretical Computer Science*, 47:131–147, 1986.

[44] K. Weihrauch. *Computable analysis*. Springer, Berlin, 2000.

[45] T. Yamazaki. Reverse mathematics and weak systems of 0-1 strings for feasible analysis. In Stephen Simpson, editor, *Reverse Mathematics 2001*, volume 21, pages 394–401. Association for Symbolic Logic, A. K. Peters, 2005.