

## Módulo 17. Competição

### I. Exercícios

1. Recordar as equações Lotka-Volterra de competição:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{r_x}{K_x} (K_x - X - c_{xy}Y)X$$
$$\frac{dY}{dt} = \frac{r_y}{K_y} (K_y - Y - c_{yx}X)Y$$

Recordar as condições que tornam possível a coexistência das duas espécies:

$$\frac{K_x}{c_{xy}} > K_y \quad e \quad K_x < \frac{K_y}{c_{yx}}$$

Quais os valores que os coeficientes competitivos podem tomar quando:

- a)  $K_x = K_y$
- b)  $K_x = 2K_y$

Discutir os resultados

2. Considerar duas populações de espécies competidoras em que cada uma delas, quando isolada, cresce de acordo com a equação logística de Verhulst-Pearl. Supôr que o sistema formado por estas duas espécies estabiliza com as seguintes densidades populacionais:  $X=100$ ,  $Y=700$ . Sabendo que  $c_{xy}=c_{yx}=0.7$ , dizer qual a densidade máxima equilibrada ( $K$ ) de cada espécie, na ausência da outra.

3. Demonstrar que, quando a coexistência é possível, as densidades das espécies no ponto de equilíbrio estável são:

$$X^* = \frac{K_x - c_{xy}K_y}{1 - c_{xy}c_{yx}} \quad Y^* = \frac{K_y - c_{yx}K_x}{1 - c_{xy}c_{yx}}$$

### 2. Simulações com o POPULUS

Os estudantes devem obter o programa *Populus* a partir do site do docente, ou directamente de: <http://www.cbs.umn.edu/populus>

“Downloadar” *Populus* 5.5 para qualquer versão do Windows ou MacIntosh com ambiente Java. Requer que o utilizador tenha instalado o Java no seu computador. Na página acima referida existe um link para obter o Java gratuitamente. O programa é descarregado e fica de imediato pronto a correr.

No MENU principal do *Populus* escolher:

Model > Multi-Species Dynamics > Lotka-Volterra Competition

A janela do Populus solicita valores numéricos para as equações Lotka-Volterra de competição:

- $N_1(0), N_2(0)$  Número inicial de indivíduos da espécie 1 e 2. (Nas aulas chamámos X e Y às espécies 1 e 2).
- $r, K$  Parâmetros das equações logísticas de cada espécie quando crescem isoladamente
- $\alpha$  Coeficiente de competição da espécie 2 contra a espécie 1, ou seja  $c_{12}$
- $\beta$  Coeficiente de competição da espécie 1 contra a espécie 2, ou seja  $c_{21}$

1. No quadro de introdução dos valores numéricos dos parâmetros do modelo introduzir os seguintes valores:

	N(0)	r	K	$\alpha$	$\beta$
Species 1	10	0,9	500	0,6	-
Species 2	5	0,5	600	-	0,6

Selecione “N vs t”

Selecione “Run until steady state “

Surge um gráfico com a densidade populacional contra o tempo

Selecione “ $N_2$  vs  $N_1$ ” e aparece o gráfico de espaço de fase. A verde é ilustrada a trajetória do sistema. Repare como a espécie 1 cresce mais depressa no início.

O sistema inicialmente oscila: A espécie 1, com o seu  $r$  elevado, cresce muito depressa, mas depois a espécie 2 recupera e o sistema estabiliza num ponto de equilíbrio, como seria de esperar, uma vez que  $\alpha, \beta < 1$ . Certifique-se que compreende bem o espaço de fase – identifique as nulclinas e a trajetória do sistema; procure relacionar visualmente o que observa nos dois gráficos.

2. Teste a estabilidade do ponto de equilíbrio (o ponto atrai o sistema quaisquer que sejam as suas condições iniciais?). Para isso vamos mantenha tudo igual, excepto os valores iniciais das densidades populacionais ( $N_0$ ). Por exemplo, tente  $N_1(0)=900, N_2(0)=200$ . Tente outros valores.

3. Experimente alterar livremente os parâmetros  $K, r, \alpha$  e  $\beta$ , observando as consequências nos dois gráficos. Não deixe de tentar colocar  $\alpha$  (competição de 2 contra 1) ou  $\beta$  (competição de 1 contra 2) maiores que 1, verificando que isso conduz à eliminação duma espécie, a menos que a espécie que recebe competição  $> 1$  tenha um  $K$  suficientemente elevado.

4. Pretende-se agora estudar o caso de “competição contingente”. Coloque os seguinte valores:

	N(0)	r	K	$\alpha$	$\beta$
Species 1	10	0,9	500	1,3	-
Species 2	5	0,9	500	-	1,3

Observe a posição das nulclinas e a forma como a espécie 2 é eliminada (porquê e porquê a espécie 2?). Teste a estabilidade do resultado experimentando começar com outras combinações de valores iniciais das duas espécies, por exemplo  $N_1(0)=10$ ,  $N_2(0)=15$ . Explique as razões do termo “competição contingente”.

### 3. Simulações em folha de cálculo

É possível construir uma folha de cálculo em Excel para simular as equações de Lotka Volterra, embora a qualidade gráfica e versatilidade fiquem muito aquém do que é conseguido com o Populus. Eis um artigo pequeno e muito amigável que descreve a forma de o fazer:

Welden, CW. 1999. Using spreadsheets to teach ecological modeling. *Bulletin of the Ecological Society of America* **80**(1): 65-67. [Deve existir na biblioteca da Biologia da FCUL, se não, os interessados podem pedir ao Manuel Carmo Gomes – mcgomes@fc.ul.pt]