

Um contributo para a discussão pública da proposta de programa de Matemática para o Ensino Básico

O documento que se apresenta resultou de uma análise dos temas “Números e Operações” e “Geometria e Medida”, para o 1º ciclo, da proposta de programa da disciplina de Matemática, apresentada pelo Ministério de Educação e Ciência para o ensino básico. Foram tidos em consideração os correspondentes National Core Curriculum for Basic Education da Finlândia (2004), Common Core State Standards for Mathematics (2010) dos Estados Unidos, Programmes of study for Key Stages 1-2 do Reino Unido (Fevereiro de 2013) e Mathematics Syllabus Primary (2007) e Primary Mathematics Syllabus (2012), apenas disponível para o nível Primary One, de Singapura. Na proposta em discussão pública foram consideradas as duas partes que a compõem: Programa e Metas Curriculares.

Esta análise baseou-se nos seguintes princípios:

- um programa de Matemática deve ser adequado à faixa etária dos alunos a que se destina e contemplar o desenvolvimento gradual da intuição matemática, da compreensão (eventualmente parcial) dos conceitos, da capacidade de interpretar informação e avaliar sobre a razoabilidade de resultados, de uma atitude crítica e argumentativa, de um raciocínio lógico dedutivo e da capacidade para o exprimir, oralmente ou por escrito, de uma observação e curiosidade que alicerçam o raciocínio indutivo, do despertar para a identificação de padrões e para a generalização de conceitos e resultados e ainda de uma capacidade de abstração. Não deve ser refém de formalismos excessivos nem de axiomatizações desadequadas e a introdução desnecessária e prematura de conceitos deve ser evitada;
- a aprendizagem em Matemática não se reduz a uma memorização de conceitos e fórmulas a par de uma aquisição de capacidade de aplicação dos mesmos na resolução de problemas e requer um encadeamento de conteúdos sem revisitações desnecessárias com a introdução gradual de um formalismo e de uma linguagem própria;
- a avaliação no 1º ciclo deve ser feita de modo contínuo, nas vertentes escrita e oral, quer em situação de testes e/ou exame, quer através da interação com os colegas e professor na sala de aula.

Este documento contém um conjunto de sugestões e comentários que se encontram organizados do seguinte modo:

- Comentários gerais, transversais aos diferentes anos;
- Apresentação por ano e por tópico de:
 1. sugestões de omissão (representadas em *itálico riscado*) ou reformulação/inclusão de itens na lista de conteúdos do programa (representadas em *itálico negrito*), eventualmente acompanhadas por comentários;
 2. comentários aos descritores das Metas:

No caso do tema “Números e Operações”, os comentários são sucedidos de sugestões para reformulação dos respectivos descritores.

No caso do tema “Geometria e Medida”, os comentários têm por objetivo contribuir para uma reavaliação e eventual reformulação dos descritores.

Os autores reservam o direito de divulgar este documento a quem, e quando, entenderem oportuno.

Lisboa, 30 de Maio de 2013

Ana Cristina Barroso
Carlos Albuquerque
Luís Sequeira
Maria João Gouveia
Maria Manuel Torres
Suzana Nápoles

1. Comentários gerais

Na proposta de programa os desempenhos fundamentais que os alunos deverão evidenciar no 1º ciclo do ensino básico são explicitados pelos seguintes verbos: identificar/designar, estender, reconhecer (maioritariamente um reconhecimento intuitivo), saber (no sentido de conhecer o resultado mas sem exigência de justificação ou verificação). Há contudo desempenhos fundamentais em falta, também eles explicitáveis por verbos como descrever, desenhar/representar, calcular/determinar e também compreender (na acepção adequada a este ciclo, distinguível do “saber” definido pelos autores da proposta).

Os autores da proposta em análise defendem, e bem, a importância da memorização e da aquisição de rotinas e automatismos na aprendizagem da Matemática. Relativamente à memorização escrevem:

“Memorização e compreensão, sendo complementares, reforçam-se mutuamente. Conhecer as tabuadas básicas, e outros factos elementares, de memória, permite também poupar recursos cognitivos que poderão ser direcionados para a execução de tarefas mais complexas.” Nós acrescentaríamos que a compreensão da operação da multiplicação de números naturais, e portanto da construção das tabuadas básicas, permite aos alunos a recuperação das mesmas quando e se a memória falhar. Se um aluno souber que 7×8 é a adição de sete parcelas iguais a 8 pode chegar ao produto ainda que não se recorde da tabuada básica do 7. Se além disso esse aluno conhecer a distributividade e tiver desenvolvido estratégias de cálculo mental, pode chegar à soma correspondente sem necessidade de adicionar sete parcelas iguais a 8, tão somente efetuar $7 \times 10 - 7 \times 2$, por exemplo. Neste sentido defendemos que é necessário introduzir no programa desempenhos específicos de compreensão.

Na introdução do programa em discussão, a exposição que os autores fazem relativamente à comunicação matemática é limitativa. Os aspectos mencionados são importantes e devem ser tidos em conta mas a comunicação matemática pode ir mais além. Os alunos devem aprender a exprimir ideias matemáticas e raciocínios de forma precisa e concisa, fazendo uso da linguagem matemática apropriada para o seu nível de aprendizagem, devem aprender a estabelecer relações, a procurar generalizações, ser conduzidos a formular conjecturas que lhes seja possível demonstrar, ou refutar através da apresentação de contraexemplos, ou que lhes possam ser validadas pelo professor. O desenvolvimento da comunicação matemática deve ocorrer não exclusivamente a propósito da resolução de exercícios mas no decorrer da aula, sempre que se proporcionar, em diálogo com o professor ou com os colegas.

As Metas são omissas em relação a alguns objetivos de aprendizagem cuja inclusão sugerimos ao longo deste documento. É possível que a opção da sua não inclusão se deva a uma maior dificuldade em avaliar o desempenho dos alunos relativamente aos mesmos, como poderá ser o caso do cálculo mental. Salientamos que é fundamental que no ensino básico, em particular no 1º ciclo, a avaliação seja contínua e o resultado final da avaliação dos alunos, em cada ano lectivo, dependa também dessa avaliação contínua e não seja um somatório, com ou sem ponderação, das provas escritas realizadas.

Na introdução das Metas pode ler-se *“Será disponibilizado aos professores um caderno de apoio às presentes metas curriculares contendo suportes teóricos aos objetivos e descritores bem como exemplos de concretização de alguns deles.”* Na introdução do caderno de apoio para o 1º ciclo pode ler-se *“Para além das sugestões de exercícios e problemas a propor aos alunos entendeu-se incluir também textos de apoio para os professores.”* A leitura pontual que fizemos do Caderno de Apoio deixa dúvidas sobre o que deve ser entendido exclusivamente como apoio aos professores e sobre o que é proposto para as suas aulas. É premente que os autores do caderno de apoio explicitem quais os textos cuja informação pode ser transposta para sala de aula e quais os exercícios e exemplos nele contidos que devem ser tomados como sugestões de trabalho para os alunos. Uma clarificação do mesmo tipo é necessária relativamente às Metas, uma vez que nem todos os descritores constituem objetivos fundamentais da aprendizagem dos alunos.

2. Números e Operações

1º ano

Domínio NO 1

- **Números naturais**

Na primeira abordagem dos números naturais, o primeiro item do Programa diz respeito a correspondências um a um. Esta opção é desajustada, tendo em conta que o objetivo é “Contar até cem”. Não é necessário estabelecer correspondências um a um entre conjuntos de objetos para comparar o número dos seus elementos. O programa não deve condicionar estratégias. Já os Cadernos de Apoio podem (e devem) ilustrar diferentes estratégias.

Não nos parece ajustada a introdução da noção de conjunto vazio neste nível de ensino. Se mostrarmos a uma criança de seis anos duas caixas, uma com três bolas e outra sem bolas e lhe perguntarmos quantas bolas estão em cada caixa, ela responderá que uma das caixas está vazia e a outra tem três bolas, ou que uma das caixas tem zero bolas e a outra tem três bolas. Pretende o Programa que se explique que na caixa vazia o conjunto de bolas é vazio porque tem zero elementos? O que a criança vai entender é que a caixa é um conjunto vazio.

No que respeita ao trabalho inicial com os números, os Cadernos de Apoio poderão exemplificar situações que façam intervir o número zero, nomeadamente em contagens.

➤ Sugestões de alteração nos seguintes tópicos do **Programa**:

-Sequência dos números naturais até vinte;

-Contagens de até vinte objetos;

-Comparação do número de elementos de dois conjuntos;

-Números naturais até cem; **o número zero**; contagens progressivas e regressivas.

➤ Sugestões de alteração nos seguintes descritores das **Metas**:

1.1 Verificar que dois conjuntos têm o mesmo número de elementos ou determinar qual dos dois é mais numeroso.

1.4 Associar pela contagem diferentes conjuntos ao mesmo número natural e reconhecer que um conjunto tem menor número de elementos que outro se o resultado da contagem do primeiro for anterior, na ordem natural, ao resultado da contagem do segundo.

- **Sistema de numeração decimal**

➤ Sugerimos acrescentar um conteúdo e reformular o 3º item do **Programa** como se segue

- **Representação de números naturais na reta numérica;** (Esta representação está presente na generalidade dos manuais certificados no trabalho inicial com os números)

- **Ordem natural; os símbolos «<» e «>»; comparação e ordenação de números até 100.**

- **Adição e subtração**

Congratulamo-nos com a inclusão de referências explícitas ao cálculo mental no Programa, contrariamente ao que se passa nas Metas. Porém chamamos a atenção de que o conteúdo relativo ao cálculo mental de somas proposto para o 1º ano é mais ambicioso do que o correspondente item proposto para o 2º ano. Passamos a citar:

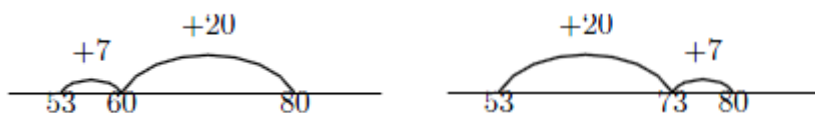
“- Adições cuja soma seja inferior a 100 por cálculo mental, métodos informais e tirando partido do sistema decimal de posição;” (1º ano)

e

“- Cálculo mental: somas de números de um algarismo, diferenças de números até 20, adições e subtrações de 10 e 100 a números de três algarismos;” (2º ano)

- Sugerimos a introdução nos **Cadernos de Apoio** de exemplos que promovam a utilização do cálculo mental para realizar adições, como os que se seguem.

Exemplo 1. Para calcular $53 + 27$, marcamos o número 53 na reta numérica. Podemos começar por adicionar 7 a 53, obtendo 60, e em seguida, adicionar 20; ou, em alternativa, começar por adicionar 20, obtendo 73 e, em seguida, adicionar 7.



Exemplo 2. Para calcular $53+27$:

Como $53=50+3$ e $27=20+7$, podemos adicionar 50 com 20 e 3 com 7 ($50+20=70$ e $3+7=10$), e assim $53+27=70+10=80$.

Os itens da adição no Programa não condicionam, e bem, as estratégias a utilizar. O mesmo não se passa nas Metas.

- Sugerimos que seja suprimido nas **Metas** o descritor 3.1 referente à terminologia “sucessor” (que consideramos não constituir uma mais-valia) e a alteração do descritor 3.9 retirando a referência à representação vertical.

3.1. Saber que o sucessor de um número na ordem natural é igual a esse número mais 1.

3.9. Adicionar dois quaisquer números naturais cuja soma seja inferior a 100, adicionando dezenas com dezenas, unidades com unidades com composição de dez unidades em uma dezena quando necessário.

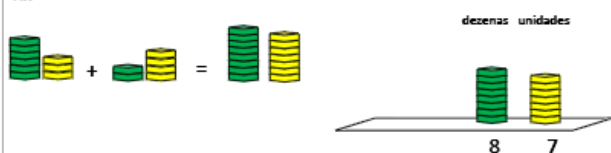
Consideramos que a representação vertical do cálculo, ainda que necessária numa fase posterior, nada acrescenta à compreensão da operação de adição, especialmente quando se trata de números com um ou dois algarismos. Pelo contrário, o enfoque na representação vertical pode ser prejudicial para a compreensão do conceito básico envolvido - a noção de que a operação de adição corresponde à operação física de juntar e contar.

A decomposição dos números a adicionar em dezenas e unidades – numa primeira fase, em casos em que a soma das unidades não atinge uma dezena e depois quando a soma das unidades ultrapassa uma dezena – permite a determinação da soma sem recurso à representação vertical e contribui para “descodificar o sistema de numeração decimal”.

- Sugerimos a propósito a simplificação dos exemplos do descritor 3.9 do **Caderno de Apoio**, de forma a exemplificar unicamente a utilização de materiais manipuláveis:

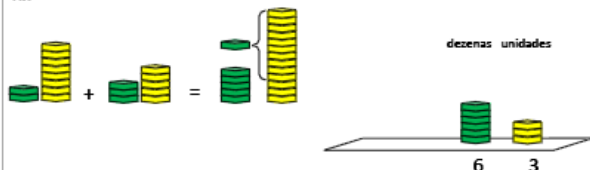
Exemplo (adição sem transporte)
Calcula a soma de 63 com 24.

R.:



Exemplo* (adição com transporte)
Calcula a soma de 28 com 35.

R.:



- No que respeita à subtração sugerimos a transformação do exemplo do descritor 5.3 do **Caderno de Apoio** numa observação do tipo

12 menos 7 é igual a 5 porque 7 mais 5 é igual a 12.

Se $7 + 5 = 12$ então $12 - 7 = 5$

2º ano Domínio NO2

• Números naturais

Nem o Programa nem as Metas deveriam condicionar as abordagens através da indicação de regras específicas como acontece no caso da identificação da paridade de um número através de inspeção do algarismo das unidades. Esta regra pode ser facilmente entendida, recorrendo à representação decimal (qualquer número é “soma” do seu algarismo das unidades com um múltiplo de 10). Torna-se mais natural retomar a paridade e ensinar esta regra no 3º ano a propósito de múltiplos (NO3 7.9).

- Sugerimos a seguinte alteração para o quarto tópico do **Programa**:

~~-Números pares e número ímpares; identificação através do algarismo das unidades.~~

- **Números pares e números ímpares; contagens de 2 em 2, de 3 em 3, de 4 em 4, de 5 em 5, de 10 em 10 e de 100 em 100;**

- Sugerimos a seguinte alteração para os descritores do grupo NO2.3 “Reconhecer a paridade “ das **Metas**:

2. Identificar um número par como uma soma de parcelas iguais a 2 e como soma de duas parcelas iguais.
- ~~3. Reconhecer a paridade de um número através do algarismo das unidades.~~
3. **Reconhecer na reta numérica a alternância entre números pares e ímpares.**

• Sistema de numeração decimal

- Sugerimos a seguinte reformulação do 3º item do **Programa**:

-Comparação **e ordenação** de números até mil.

- **Adição e Subtração**

➤ Sugerimos a seguinte reformulação do 1º item:

- **Cálculo mental: Adição de um número de dois algarismos a um número de um ou dois algarismos, adições e subtrações de 10 e 100 a números de três algarismos;**

- **Multiplicação**

O primeiro item do Programa deve ser preciso quanto aos conteúdos, pelo que deve contemplar uma noção de multiplicação. A referência específica ao sentido combinatório não deve constar no Programa. Pode ser exemplificada no Caderno de Apoio como, aliás, é feito nas páginas 20 e 21.

Por outro lado, a propriedade comutativa da multiplicação, que se usa em seguida em vários contextos, não é fácil de justificar, e merece uma referência explícita nas Metas.

➤ Sugerimos as seguintes alterações no **Programa**:

~~-Sentido aditivo e combinatório;~~

- **Noção de multiplicação; diferentes interpretações;**

- **Construção das** Tabuadas do 2, 3, 4, 5, 6 e 10;

~~-Problemas de um ou dois passos envolvendo situações multiplicativas nos sentidos aditivo e combinatório.~~

- **Problemas de um ou dois passos envolvendo situações multiplicativas.**

➤ Sugerimos a supressão do descritor NO2 7.3 e a alteração do descritor NO2 7.5 nas **Metas**:

~~7.3. Efetuar uma dada multiplicação fixando dois conjuntos disjuntos e contando o número de pares que se podem formar com um elemento de cada, por manipulação de objetos ou recorrendo a desenhos e esquemas.~~

7.5. Reconhecer a propriedade comutativa da multiplicação, por exemplo, através da contagem do número de objetos colocados numa malha retangular, verificando que é igual ao produto, por qualquer ordem, do número de linhas pelo número de colunas.

É também importante notar que, por exemplo, os produtos 4×400 e 400×4 representam adições repetidas diferentes, embora sejam ambos iguais a 1600. As provas de atletismo incluem geralmente a estafeta 4×400 m. *Imagine-se* o que seria uma prova de estafeta 400×4 m!

- **Números racionais não negativos**

O descritor 11.1 das **Metas**: “Fixar um segmento de reta como unidade e identificar $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/10$, $1/100$ e $1/1000$ como números, iguais à medida do comprimento de cada um dos segmentos de reta resultantes da decomposição da unidade em respetivamente dois, três, quatro, cinco, dez, cem e mil segmentos de reta de igual comprimento” não está de acordo com o item correspondente do **Programa**: “Representação dos números naturais e das frações $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$ e $1/10$ numa reta numérica”.

➤ Sugerimos que se exemplifique $1/100$ e $1/1000$ utilizando o metro e que este descritor seja modificado em conformidade com o Programa.

3º ano

Domínio NO3

- **Adição e subtração de números naturais**

➤ Sugerimos que se acrescente ao **Programa** o seguinte conteúdo:

-Adição e subtração por cálculo mental de números cuja representação não ultrapasse 3 algarismos.

- **Multiplicação de números naturais**

➤ Tendo em conta o anteriormente exposto, sugerimos a alteração do último item no **Programa**:

~~-Problemas de até três passos envolvendo situações multiplicativas nos sentidos aditivo e combinatório~~

- Problemas de até três passos envolvendo situações multiplicativas.

➤ Sugerimos que se acrescente ao item NO3 7.2 das **Metas** uma referência aos números pares:

7.2. Utilizar corretamente a expressão «múltiplo de». **Reconhecer que os números pares são os múltiplos de 2.**

- **Adição e subtração de números racionais não negativos representados por frações**

Chamamos a atenção para a localização nas **Metas** do descritor 12.5 : “Reconhecer que a soma de a parcelas iguais a $1/b$ (sendo a e b números naturais) é igual a a/b e identificar esta fração como os produtos $a \times 1/b$ e $1/b \times a$ ” no âmbito do objetivo geral NO3 12 – “Adicionar e subtrair números racionais”.

Tal como está redigido, este descritor envolve a extensão da multiplicação aos números racionais na forma de fração unitária e ainda a utilização implícita da propriedade comutativa da multiplicação neste contexto numérico, o que está claramente fora do âmbito deste descritor.

O mesmo acontece com o Programa, em relação ao tópico “Produto de um número natural por um número racional representado por uma fração unitária”.

➤ Sugerimos as seguintes alterações no **Programa**:

~~- Adição e subtração na reta numérica por justaposição ~~retilínea~~ **retilínea** de segmentos de reta;~~

~~- Produto de um número natural por um número racional representado por uma fração unitária~~

➤ Sugerimos a seguinte redação para o descritor 12.5 das **Metas**:

Reconhecer que a soma de a parcelas iguais a $1/b$ (sendo a e b números naturais) é igual a a/b .

A pretender manter-se a referência aos produtos $a \times 1/b$ e $1/b \times a$ no 3º ano, ela deve ser objeto de uma entrada separada tanto no Programa como nas Metas.

➤ Sugerimos acrescentar ao **Programa**, depois de “Adição e subtração de números racionais não negativos representados por frações”, o seguinte objetivo geral:

Multiplicação de números racionais não negativos representados por frações

- **Multiplicação de um número natural por uma fração unitária e multiplicação de uma fração unitária por um número natural.**

➤ Sugerimos acrescentar às **Metas** um novo descritor como segue:

13. Multiplicar números racionais

1. Sendo a e b números naturais, identificar a soma de a parcelas iguais a $1/b$ com $a \times 1/b$.
2. Sendo a e b números naturais, identificar a b -ésima parte de a com o produto $1/b \times a$.
3. Sendo a e b números naturais, reconhecer que $a \times 1/b = 1/b \times a = a/b$.

Deste modo, o descritor NO4 5.2, que estende o descritor NO3 13, atrás sugerido, à multiplicação de um número natural por uma fração, já surgiria de uma forma natural.

- **Representação decimal de números racionais não negativos**

➤ Sugerimos a seguinte reformulação do terceiro e quarto conteúdos do **Programa**:

- *Algoritmos para a adição e para a subtração de números racionais representados por dízimas **finitas**;*
- *Decomposição decimal de um número racional representado na forma de uma dízima **finita**.*

4º ano

Domínio NO4

➤ Sugerimos que se acrescente o seguinte tópico:

Cálculo Mental

- *Cálculo mental envolvendo as quatro operações;*
- *O cálculo mental na realização de estimativas.*

- **Números racionais não negativos**

➤ Sugerimos a reformulação do descritor NO4 5.1 das **Metas**:

*5.1. Estender dos naturais a todos os racionais não negativos a identificação do produto de um **número natural n por um número q** número q por um número natural n como a soma de n parcelas iguais a q , se $n > 1$, como o próprio q , se $n = 1$, e representá-lo por $n \times q$ e $q \times n$.*

- **Multiplicação e divisão de números racionais não negativos**

➤ Sugerimos que se acrescente o seguinte conteúdo ao **Programa**:

-Resolução de problemas envolvendo números racionais representados por dízimas finitas até 3 casas decimais e envolvendo as quatro operações. Resolução de problemas envolvendo arredondamentos.

3. Geometria e Medida

Comentários Gerais

Em geral, a apresentação da matéria em geometria, no primeiro ciclo, parece seguir a filosofia de tentar extrair vários conceitos (formal ou informalmente) a partir de poucos conceitos primitivos, como alinhamento ou quarto de volta/meia volta, que tenta fundar na experiência do mundo físico.

Sendo essa uma opção respeitável, ela acaba por apresentar como não primitivos certos conceitos que para alunos do primeiro ciclo seriam mais ou menos imediatos, como os de paralelismo ou perpendicularidade.

O documento Metas é omissivo relativamente à realização de estimativas de medidas de grandeza, apesar de se tratar de um dos objetivos do ensino da Matemática em níveis correspondentes aos do 1º ciclo em países como o Canadá, os EUA, a França, a Finlândia, o Reino Unido e Singapura.

Relativamente a alguns descritores de Geometria e Medida, foi necessário consultar o Caderno de Apoio para confirmar a nossa interpretação dos mesmos. Da leitura pontual que fizemos, o Caderno de Apoio revelou-se palavroso, pobre nos exemplos ou exercícios apresentados (estes últimos para propor aos alunos como referido na respectiva introdução) e distanciado relativamente às características do ensino atual. Além disso, confirma as metodologias implicitamente impostas aos professores pelas Metas.

- Nas Metas e no Programa os autores fazem referência ao sistema métrico e não ao Sistema Internacional de Unidades (SI). Dado que estes documentos são oficiais a designação sistema métrico deve ser substituída por Sistema Internacional de Unidades ou abreviadamente SI.

1º ano

Domínio GM 1

- **Localização e orientação no espaço**

➤ Sugerimos acrescentar à lista de conteúdos do **Programa** o seguinte tópico:

- Descrição de posições, direções e movimentos no espaço circundante (ir em frente, recuar, virar à direita, virar à esquerda, dar meia volta, uma volta completa);

Relativamente ao grupo de descritores GM1-1 das **Metas**, temos os seguintes comentários:

1.1. A utilização correta do vocabulário próprio das relações de posição de dois objetos já pressupõe o reconhecimento que é mencionado no ponto 1.2.

1.2. As crianças a frequentar este nível de ensino já têm apreendidas as noções de estar à frente e estar atrás. Não só são expressões que usam no seu dia-a-dia como também são trabalhadas no ensino pré-escolar, frequentado pela quase totalidade das crianças (mais de 90% já no ano lectivo de 2008/2009); tome-se em conta, por exemplo, a seguinte meta da educação pré-escolar:

Meta Final 18) No final da educação pré-escolar, a criança descreve as posições relativas de objetos usando termos como acima de, abaixo de, ao lado de, em frente de, atrás de, e a seguir a.

(em <http://metasdeaprendizagem.dge.mec.pt/educacao-pre-escolar/metas-de-aprendizagem/metas/?area=7&level=1>)

A meta que se enuncia neste ponto deve ter em conta essa aprendizagem e considerar contextos mais alargados do que aquele em que o objecto que está à frente oculta o que está atrás do observador. As crianças são já capazes de fazer um reconhecimento de um objecto que está à frente de outro, em situações em que o primeiro não lhes oculta o segundo. A formalização destas noções, como o Caderno de Apoio parece sugerir, pode ser contraproducente e a distinção entre os conceitos “por detrás de” e “à frente de”,

quando tomados no sentido estrito e no sentido mais alargado, parece-nos pouco adequada para ser ensinado a crianças desta idade.

1.3. As crianças deste nível de ensino são capazes de reconhecer objetos à frente de outros sem que isso pressuponha que os primeiros lhe estão mais próximos. Pode inclusivamente reconhecer que um objecto está à frente de outro embora o primeiro esteja mais longe do observador. Acontece, por exemplo, enquanto observadoras de um jogo de futebol ou observadoras dos veículos que circulam numa estrada à frente do automóvel onde as crianças se deslocam.

1.4. Algum do vocabulário próprio das relações de posição de dois objetos é explicitamente mencionado neste descritor e nos descritores 1.2 e 1.3, o que pode fazer parecer excluídas expressões como “à esquerda”, “à direita”, “dentro”, “fora”, “antes” e “depois”.

A tentativa forçada de definir aquilo que é intuitivo, como frente, detrás, perto, longe é injustificada e claramente contraproducente neste nível de ensino.

1.5. A referência a objetos de dimensões desprezáveis é descabida para crianças deste nível de ensino. Deveria ser clarificado se esta referência se destina apenas a esclarecer os professores ou também a ser por eles usada no trabalho com os alunos. Além disso, a noção de ponto é uma noção simples e intuitiva, não carece de explicações. Leia-se a propósito a passagem do “Compêndio de Geometria” de Diogo Pacheco de Amorim (aprovado por despacho de 5 de Junho de 1937):

“O estudo do *ponto* reduz-se ao seu conhecimento intuitivo, porque nele nem é possível distinguir partes, nem elementos de qualquer natureza que seja. Nada existe na geometria mais simples do que o ponto.”

Também a utilização do termo «ponto» para identificar a posição de um objeto de dimensões desprezáveis não se encaixa no que se pressupõe ser uma meta.

1.7. A linguagem utilizada não é suficientemente clara; conviria esclarecer o que deve ser entendido por deslocamento rígido.

No caso de figuras geométricas (planas) simplesmente pretende traduzir que duas figuras são iguais se for possível fazê-las coincidir ponto por ponto (como aliás é confirmado pelo exposto no Caderno de Apoio).

No caso da identificação de sólidos geometricamente iguais, a abordagem deveria ser feita de outro modo, sem o formalismo que este descritor parece pressupor. Por exemplo, dois cubos são geometricamente iguais se uma qualquer face de um for igual a uma qualquer face do outro. Mais tarde, quando as planificações forem introduzidas, outros procedimentos poderão ter lugar.

- **Figuras geométricas**

➤ Sugerimos a seguinte reformulação para a lista de conteúdos do **Programa**:

- ***Agrupar objetos e figuras geométricas segundo atributos***

- ***Observar e descrever figuras geométricas no ambiente circundante***

- *Figuras planas: retângulo, quadrado, triângulo, seus lados e vértices; circunferência, círculo;*

~~-Partes retilíneas de objetos e desenhos; partes planas de objetos;~~

- ***Identificar linhas curvas e linhas retas em objetos e desenhos; identificar superfícies planas e superfícies curvas em objetos.***

- ***Criar e completar frisos planos usando retângulos, quadrados, triângulos, círculos;***

Relativamente ao grupo de descritores GM1-2 das **Metas**, temos os seguintes comentários:

2.1 Não reconhecemos vantagem em introduzir o conceito de segmento de reta além do que é necessário para o seu reconhecimento visual e para a sua representação.

2.5 O reconhecimento do quadrado como caso particular do retângulo era já um dos objetivos específicos do programa revogado para os 1º e 2º anos. Porém não vemos como levar as crianças a fazer este reconhecimento sem fazer uso das noções de perpendicularidade ou da noção de ângulo. Parece-nos por isso que esse reconhecimento deveria ser transferido para uma meta do 3º ou do 4º ano.

2.6. Para crianças deste nível de ensino é prematuro fazer a distinção entre uma linha fechada e a região por ela delimitada, pelo que a introdução de circunferência e a distinção entre circunferência e círculo, ainda que meramente visual, devem ser feitas mais tarde (tal como acontece no programa curricular de Singapura).

2.7. A representação de quadrados e retângulos não tem de ser limitada à grelha quadriculada.

Medida

• Distâncias e comprimentos

É necessário esclarecer o que é pretendido com o conteúdo “*Unidade de comprimento e medidas de comprimentos expressas como números naturais*” apresentado no **Programa**.

Relativamente ao grupo de descritores GM1-3 das **Metas**, temos os seguintes comentários:

3.1 Neste descritor não é claro se o que é pretendido é a medição de uma distância, para uma unidade de medida fixada (cujo resultado não é necessariamente expresso por um número inteiro), ou a consideração de distâncias expressas, numa certa unidade de medida, por um dado número inteiro.

• Área

➤ Sugerimos a seguinte reformulação para o item do **Programa**:

- *Figuras equidecomponíveis e equivalentes.*

Relativamente ao grupo de descritores GM1-3 das **Metas**, temos os seguintes comentários:

4.1 e 4.2 Estes descritores são, a nosso ver, introduzidos cedo demais e devem ser transferidos para o 2º ano, sobretudo no que respeita à introdução do conceito “*figuras equivalentes*”. O conceito de figuras equidecomponíveis deveria ser esclarecido no Caderno de Apoio.

A redação do descritor 4.2 pode sugerir que as figuras equivalentes tenham de ser equidecomponíveis, o que não é verdade, presumindo que ser equidecomponível significa ser decomponível usando as mesmas figuras geométricas e, cada uma delas, em mesmo número. Por exemplo, um círculo e um retângulo com a mesma área são figuras geométricas equivalentes mas não são equidecomponíveis.

• Tempo

➤ Sugerimos a seguinte reformulação para a lista de conteúdos do **Programa**:

- *Utilização de fenómenos cíclicos naturais para contar o tempo;⁽¹⁾ dias, semanas meses e anos;*

- ***Datas: Designação dos dias da semana e dos meses do ano.***

(1) O ponto e vírgula sugere que os autores consideram naturais todos os fenómenos cíclicos enumerados.

2ºano

Domínio GM 2

- **Localização e orientação no espaço**

➤ Sugerimos que se acrescente à lista de conteúdos do **Programa** o seguinte item:

- ***Descrição de posições, direções e movimentos; leitura, utilização e desenho de mapas e plantas simples.***

Relativamente ao grupo de descritores GM2-1 das **Metas**, temos os seguintes comentários:

1.1 O conceito de "direção" aparece associado ao de semirreta, o que é uma opção diferente da habitual (que a associa ao conceito de retas paralelas). Esta opção vem explicada no Caderno de Apoio. Pretendem os autores tomar como distintas as direções dadas por semirretas distintas ainda que sobre a mesma reta?

Assume-se também que a palavra "direção" será mais tarde usada no seu sentido habitual em matemática, nomeadamente em GM8. Justifica-se, dado o tão grande apreço pela aprendizagem cumulativa, que uma palavra tenha dois significados distintos ao longo dos ciclos de ensino?

1.2 A utilização correta das expressões mencionadas no descritor 1.2 só pode ser feita compreendendo uma mudança de direção. Exigir-se a crianças desta idade que relacionem essa utilização com os pares de direções, e avaliar-se o seu desempenho em relação a este descritor, é prematuro e desadequado; parecer-nos-ia pertinente que a sua exploração tivesse lugar mais tarde, a propósito da introdução da noção de ângulo. Fazemos também notar que para uma criança não fará sentido relacionar a volta inteira com um par de direções.

Figuras geométricas

➤ Sugerimos a seguinte reformulação dos conteúdos do **Programa**:

- ~~Parte interna e externa de~~ **Região interior e região exterior a linhas planas fechadas;**

- **Triângulos isósceles e equiláteros, triângulos escalenos;**

- **Quadriláteros (retângulo, quadrado e losango);**

- **Sólidos geométricos - poliedros e não poliedros; pirâmides e cones; vértice, aresta e face; construção de cubos e de paralelepípedos retângulos**

- Atributos geométricos e não geométricos de um objeto; **descrição de figuras geométricas fazendo uso dos termos vértice, aresta, face**

- **Completação e construção de figuras ~~em~~ relativamente a um eixo de simetria vertical ou horizontal.**

Relativamente ao grupo de descritores GM2-2 das **Metas**, temos os seguintes comentários:

2.1. O mesmo comentário de 1.1.

2.4. A utilização da terminologia região interior e região exterior a linhas planas fechadas parece-nos preferível. Fazemos notar que uma linha (fechada) não tem parte interna nem externa. A nosso ver é tão incorreto falar na parte interna ou externa de uma linha como na região interior ou exterior dessa linha. O ponto fundamental na nossa sugestão é a substituição da preposição "de" por "a".

2.5. Não parece fazer sentido introduzir agora estes conceitos (triângulo equilátero e triângulo isósceles) e só em anos seguintes introduzir o conceito de triângulo escaleno.

2.6. Não faz sentido introduzir neste ano o conceito de losango uma vez que a perpendicularidade surge apenas no 3ºano e a noção de ângulo surge no 4º ano. É claro que as noções de quadrado e retângulo são introduzidas também antes das noções de perpendicularidade e de ângulo. Porém fazemos notar que o conhecimento inicial de figuras geométricas como o quadrado e o retângulo é facilmente conseguido através da sua identificação em vários objetos do dia-a-dia, permitindo às crianças o seu reconhecimento sem terem adquirido uma completa consciência das suas propriedades. Ora o mesmo não se passa com o losango.

Pretender que uma criança reconheça visualmente um losango através da igualdade dos quatro lados acarretará o risco de as crianças apreenderem erradamente que um losango é tão somente qualquer quadrado “inclinado” e poderem pensar que não se trata de uma característica intrínseca da figura geométrica mas dependente do observador. Será difícil para as crianças compreenderem a distinção entre um losango e um quadrado. Pelo exposto, entendemos que o estudo do losango, sem fazer uso da noção de perpendicularidade ou da noção de ângulo, é contraproducente.

Os descritores 2.7 e 2.8 poderiam ser condensados num só: Identificar e representar quadriláteros, pentágonos e hexágonos.

2.12. As metas não devem sugerir metodologias como aqui acontece, o que se pretende é verificar se os alunos sabem: identificar, completar e desenhar no plano figuras simétricas relativamente a um eixo de simetria previamente fixado. cremos que os professores do 1º ciclo não terão dúvidas quanto ao pretendido.

Medida

➤ Relativamente ao grupo de descritores GM2 das **Metas** neste tema, é transversal aos vários subtópicos o item que se segue:

- ***Reconhecer que fixada uma unidade de medida nem sempre é possível obter como resultado da medição um dado valor inteiro.***

Este item, assim formulado, poderia constar do tópico Medida, antes da apresentação dos vários objetivos gerais.

• Distância e comprimento

➤ Sugerimos que se substitua o item “*Unidades do sistema métrico*” na lista de conteúdos do **Programa** pelos itens:

- ***O metro como unidade de medida de comprimento; o decímetro, o centímetro e o milímetro.***

- ***Conversões de metros para decímetros ou centímetros ou de decímetros para centímetros.***

- ~~*Unidades do sistema métrico*~~

• Área

➤ Sugerimos que se acrescente à lista de conteúdos do **Programa** o seguinte tópico:

- ***Estimação de áreas por enquadramentos***

• Volume e Capacidade

➤ Sugerimos a seguinte reformulação do último item da lista de conteúdos do **Programa**:

- ~~*Comparação de volumes de objetos por imersão em líquido contido num recipiente*~~

Relativamente ao grupo de descritores GM2-5 das **Metas**, temos os seguintes comentários:

5.1 Parece-nos mais apropriada a utilização da designação sólidos em lugar de figuras.

5.3 e 5.7 Poderiam ser condensados num só: Medir, comparar e ordenar volumes de sólidos.

5.5 A comparação e ordenação de capacidades de mais do que dois recipientes também deveriam constituir metas.

5.4. e 5.7. Embora reconhecendo a validade das mesmas, a indicação de metodologias é contrária à natureza das Metas. À semelhança do que foi feito no tópico “Medir distâncias e comprimentos” não se percebe por que não foi aqui incluído um item visando a identificação do litro como unidade de capacidade, o decilitro e o

centilitro respetivamente como a décima e a centésima parte do litro e propondo que os alunos sejam capazes de efetuar medições utilizando estas unidades.

- **Massa**

Relativamente ao grupo de descritores GM2-6 das **Metas**, temos o seguinte comentário:

À semelhança do que foi feito no tópico “Medir distâncias e comprimentos” não compreendemos por que razão não foi aqui incluído um item visando a identificação do quilograma como unidade de massa padrão, o hectograma, o decagrama e o grama respetivamente como a décima, a centésima e a milésima parte do quilograma, propondo que os alunos sejam capazes de efetuar medições utilizando estas unidades de massa.

- **Tempo**

➤ Sugerimos a seguinte reformulação da lista de conteúdos do **Programa**:

-A **hora e o minuto**;

- **Dinheiro**

➤ Sugerimos que se acrescente à lista de conteúdos do Programa o seguinte tópico:

- **Comparação de quantias de dinheiro.**

3ºano

Domínio GM 3

- **Localização e orientação no espaço**

➤ Sugerimos a seguinte reformulação do 4º item do **Programa**:

-- **Coordenadas em grelhas quadriculadas; descrição de movimentos numa grelha quadriculada.**

Relativamente ao grupo de descritores GM3-1 das **Metas**, temos os seguintes comentários:

1.1. É questionável que para se identificarem segmentos de reta paralelos, representados sobre as linhas de uma grelha quadriculada, seja necessário descrever um itinerário com contagem de quartos de volta quando, pela própria definição de grelha quadriculada, bastaria verificar se os segmentos de reta estariam desenhados sobre duas linhas horizontais ou duas linhas verticais da mesma grelha.

1.5. As colunas são por definição verticais. Para evitar redundâncias poder-se-ia utilizar o termo fila horizontal e fila vertical em alternativa a linha “horizontal” e coluna “vertical”, respetivamente.

- **Figuras geométricas**

➤ Sugerimos a seguinte reformulação para a lista de conteúdos do **Programa**:

- *Circunferência, círculo, ~~superfície esférica~~ e esfera; centro, raio e diâmetro;*

- **Desenho de circunferências, planificação e construção de cubos, paralelepípedos, cilindros e cones;**

- *Identificação de eixos de simetria **verticais e horizontais** em figuras planas;*

- **Criação de frisos.**

Relativamente ao grupo de descritores GM3-2 das **Metas**, temos os seguintes comentários:

2.2. A introdução do conceito superfície esférica não é feita para estes níveis de ensino em nenhum dos correspondentes documentos da Finlândia, do Reino Unido ou de Singapura; não é um conceito que seja trabalhado nesta fase, pelo que a sua introdução nem sequer é oportuna; apenas no 9º ano se utilizará o conceito pela primeira vez, quando se introduz a área da superfície esférica (descriptor GM9 9.9).

Acrescentamos ainda que no compêndio de Geometria de Diogo Pacheco de Amorim esta noção só é dada no 5º ano e que, portanto, não é de agora o entendimento de que é prematuro introduzi-la para crianças com idades compreendidas entre os 8 e 9 anos.

2.4. e 2.5. A definição de círculo não é consensual; para alguns autores um círculo é a região interior a uma circunferência, para outros é o conjunto dos pontos que pertencem a essa região ou à circunferência. Num caso ou noutro a circunferência é a linha fechada que delimita o círculo, pelo que onde se lê “parte interna de uma circunferência” deve ler-se “parte interna do círculo” ou “região interior à circunferência”, já que uma linha não tem parte interna nem parte externa. Note-se também que, nesta altura, para as crianças é claro o significado de círculo, o que surge de novo é o conceito de circunferência.

2.8. Uma meta não deve sugerir ou impor metodologias. O objetivo aqui deve ser entendido apenas como o da identificação de eixos de simetria em figuras planas.

Medida

• Comprimento

➤ Sugerimos a seguinte reformulação para a lista de conteúdos do **Programa**:

- ~~Unidades de medida de comprimento do sistema métrico; conversões entre unidades de comprimento.~~

Relativamente ao grupo de descritores GM3-3 das **Metas**, temos os seguintes comentários:

3.3. e 3.4. devem ser considerados depois dos descritores 3.6 e 3.7 pois pressupõem o domínio dos conceitos de área e perímetro.

• Área

➤ Sugerimos a seguinte reformulação para a lista de conteúdos do **Programa**:

- **Compreensão da fórmula para a área do retângulo de lados de medida inteira; utilização da fórmula para retângulos com lados de medida inteira;**

• Tempo

➤ Sugerimos a seguinte reformulação para o item 1 do **Programa**:

- Minutos e segundos; **leitura do tempo em relógios analógicos e digitais.**

• Dinheiro

➤ Sugerimos que se acrescente o seguinte conteúdo ao **Programa**:

-- **Realização de estimativas.**

Domínio GM 4

• Localização e orientação no espaço

➤ Sugerimos a seguinte reformulação dos itens do **Programa** para este tópico:

- Ângulo **associado a duas direções; vértice de um ângulo;**
- **Amplitude de um ângulo; ângulos com a mesma amplitude;**
- **A meia volta e o quarto de volta associados a ângulos.**

Relativamente ao grupo de descritores GM4-1 das **Metas**, temos os seguintes comentários:

1.1 Deveria ser mais explícito que "ângulo" se refere a uma porção de plano e não apenas a duas semirretas. (Em 2.2 define-se ângulo convexo como uma porção de plano e o mesmo se passa para o ângulo côncavo em 2.5). Caso contrário, existe conflito com os tópicos GM6 1.1 e 1.2.

1.3. Conviria explicitar o significado de ângulos com a mesma amplitude, bem como o de amplitude de um ângulo.

• Figuras geométricas

➤ Sugerimos que se acrescente a seguinte lista de conteúdos ao **Programa**:

- **Triângulos retângulos, acutângulos e obtusângulos.**
- **Losangos.**

➤ Sugerimos que se acrescente a seguinte lista de conteúdos às **Metas**:

- **Desenhar triângulos e losangos, conhecidas as medidas de lados e de ângulos.**
- **Reconhecer o quadrado como caso particular do retângulo e do losango.**

• Ângulos

➤ Sugerimos a seguinte reformulação dos itens do **Programa**:

- ~~Ângulos convexos e ângulos côncavos⁽¹⁾;~~
- ~~Ângulos verticalmente opostos;⁽²⁾~~
- ~~Ângulos nulos, rasos e giros⁽³⁾;~~
- ~~Critério de igualdade de ângulos;~~
- ~~Ângulos adjacentes⁽⁴⁾;~~
- ~~Comparação das amplitudes de ângulos;~~
- ~~Ângulos retos, agudos e obtusos.~~

⁽¹⁾ Claramente fora dos programas do Reino Unido (onde só aparece no 5º ano) e de Singapura

⁽²⁾ Só introduzido no 6º ano nos currículos do Reino Unido e Singapura, no secundário no currículo dos EUA e é omissa no currículo da Finlândia para este ciclo de ensino

⁽³⁾ O ângulo nulo, se não associado à ausência de rotação, e o ângulo giro, se não associado à rotação completa, tornam-se conceitos abstractos para os alunos e não constituem uma mais valia em termos de conhecimento adquirido;

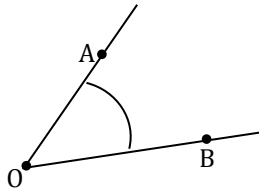
⁽⁴⁾ Só aparece no Grade 7 do currículo dos EUA e não consta dos currículos do Reino Unido e de Singapura

Relativamente ao grupo de descritores GM4-2 (identificar e comparar ângulos) das **Metas**, temos os seguintes comentários:

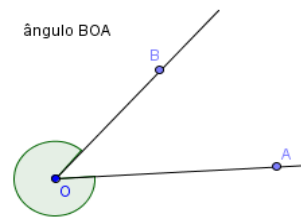
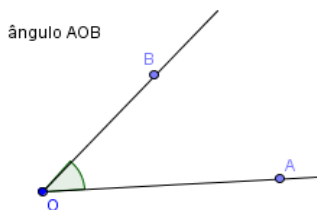
Observações ao objetivo geral 2

Independentemente da utilização dos termos convexo e côncavo, a redação proposta não parece adequada porque perverte a notação habitual, uma vez que está associada ao ângulo mais pequeno, independentemente da ordem da sequência de letras.

De acordo com esta opção, o ângulo assinalado na figura seria indicado como AOB, o que é de evitar, tendo em conta a notação usual.



Nos programas de geometria dinâmica, por exemplo, no GeoGebra, a marcação de ângulo é feita no sentido direto:



Alternativa simplificada abolindo a terminologia côncavo e convexo

- *Chama-se ângulo a uma região plana limitada por duas semirretas com a mesma origem, OA e OB.*
- *Cada par de semirretas com a mesma origem OA e OB determina dois ângulos, que podem ser iguais ou diferentes. Designa-se por AOB o ângulo descrito por uma semirreta de origem O que parte da posição OA e se movimenta da direita para a esquerda até atingir a posição OB.*
- *Se as duas semirretas OA e OB estão no prolongamento uma da outra, isto é, se os pontos A, O e B são colineares, esses dois ângulos são iguais e designam-se por rasos.*

Comentário específicos descritores do objetivo geral 2

2.1. Neste ponto faz-se uso do termo semirretas colineares sem anteriormente ter sido introduzido este conceito. Note-se ainda que não é usual utilizar no ensino básico o termo colinear para semirretas, retas ou segmentos de reta mas sim para pontos ou vetores.

2.2. A definição de ângulo sugerida dificulta a compreensão intuitiva do conceito. Além disso a definição aqui considerada não concorda com a considerada no descritor 1.4.

2.2. e 2.5. Ângulo convexo e ângulo côncavo não fazem parte do Programa revogado, nem deste nem de outro ciclo do ensino básico.

2.4. Aqui é exigida a identificação de semiplanos sem ter ainda sido definido plano. Se a noção de reta não foi tomada como primitiva, então parece-nos que algum comentário seria necessário fazer no

caderno de apoio relativamente à noção de plano, quanto mais não seja para confirmar que é tomada como primitiva.

2.6. Sugerimos que não se recorra ao termo ângulo convexo para introduzir esta notação. Ler observações ao descritor 2.

2.7., 2.8. e 2.9. Muito complicada a definição de ângulo nulo, raso e giro. Sugerimos excluir ângulo nulo neste ano de escolaridade. Ler ainda observações ao descritor 2.

2.11. Poderia definir-se que dois ângulos têm a mesma amplitude se forem geometricamente iguais.

2.13. Comparar ângulos comparando as regiões do plano que cada um deles representa. Desse modo propomos as seguintes alterações:

2.14. Definir ângulo reto como o ângulo associado a um quarto de volta.

2.15 e 2.16. Definir ângulo agudo e ângulo obtuso por comparação com ângulo reto.

- **Propriedades geométricas**

➤ Sugerimos a seguinte reformulação dos itens do **Programa** para este objetivo geral:

- *Retas concorrentes, perpendiculares, paralelas e coincidentes* ⁽¹⁾

- *Retângulos como quadriláteros de ângulos retos;*

- *Polígonos regulares e polígonos irregulares;*

- *Polígonos geometricamente iguais;*

- ~~Planos paralelos;~~ **Faces paralelas e não paralelas de sólidos: paralelepípedos retângulos, prismas, pirâmides, cilindros**

- *Paralelepípedos retângulos; dimensões*

- ~~Prismas retos;~~

- **Planificações de prismas e pirâmides;**

- *Pavimentações do plano.*

⁽¹⁾ Introduzir conceitos desnecessários para voltar a falar neles apenas passados alguns anos, sem que entretanto os alunos deles façam uso, é de desaconselhar.

Relativamente ao grupo de descritores GM4-3 das **Metas**, temos os seguintes comentários:

3.2. e 3.4. Estes descritores sugerem a introdução dos conceitos de retas paralelas e retas concorrentes no espaço. Em nossa opinião, estes conceitos não devem ser introduzidos tão cedo.

3.3. Consideramos que o conceito de retas coincidentes é demasiado abstrato para este nível de escolaridade.

3.7. Identificar lados e ângulos correspondentes em dois polígonos pode ser confuso nesta idade escolar, sugerimos que seja feito mais tarde.

3.15. Notamos que só é possível partir de pavimentações triangulares para pavimentações hexagonais se os triângulos forem equiláteros. Além disso seria desejável que fossem construídas pavimentações usando polígonos vários, não necessariamente regulares.

Medida

Os autores das Metas optam por restringir o cálculo de áreas e volumes a situações em que as mesmas possam ser expressas por números inteiros. Discordamos dessa opção. Neste nível de ensino os alunos estão aptos a trabalhar com números decimais.

- **Volume**

➤ Sugerimos que se acrescente o seguinte conteúdo ao **Programa**:

- **Estimar volumes e capacidades.**

4. Bibliografia

- Caderno de Apoio 1º ciclo, Metas curriculares do ensino básico – Matemática, DGE, 2012
- Common Core State Standards for Mathematics, EUA, 2010
- Compêndio de Geometria, Diogo Pacheco de Amorim, Coimbra editora, 1943
- Mathematics Kindergarten to Grade 9, Alberta Education, Alberta, Canada, 2007
- Mathematics Programmes of study for Key Stages 1-2, Department for education, UK, February 2013
- Mathematics Syllabus Primary, Ministry of Education SINGAPORE, 2007
- Metas de aprendizagem, Educação Pré-escolar, DGIDC
- National Core Curriculum for Basic Education, Finnish National Board of Education, 2004
- Números e operações, Luís Sequeira, Pedro Freitas, Suzana Nápoles, Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1º e 2º ciclos do ensino básico, DGIDC, 2009
- Primary Mathematics Teaching and Learning Syllabus, Ministry of Education SINGAPORE, 2012
- Programa de Matemática do Ensino Básico, Ponte, J.P., Serrazina, L., Guimarães, H.M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M.E. & Oliveira, P.A., DGIDC, 2007
- Teaching Geometry According to the Common Core Standards, Wu, H. (<http://math.berkeley.edu/~wu/>)
- TIMSS 2011 International Results in Mathematics, Ina V.S. Mullis, Michael O. Martin, Pierre Foy, and Alka Arora, 2012