

Geometria diferencial

Aulas teoricas

Docente: Nicolas Van Goethem

vangoeth@fc.ul.pt,
Sala 6.2.20.

June 19, 2023

Objectivos de aprendizagem

1. Teória (partes A e B)

- ▶ Introdução aos conceitos de base da geometria extrínseca: curvas e superfícies em \mathbb{R}^n (com ênfase em \mathbb{R}^3)
- ▶ Análise local das propriedades geométricas: regularidade, parametrização, curvatura, vizinhanças e coordenadas geodésicas; transporte paralelo
- ▶ O conceito de geometria intrínseca (=curvas e superfícies como variedades diferenciáveis=sem ser conjuntos em ambiente Euclidiano); variedades Riemannianas; curvatura de Riemann, conexão, torção; imersões e mergulhos
- ▶ Alguns teoremas clássicos: teorema fundamental das curvas; teorema egregium de Gauss; teoremas de Gauss-Bonnet; teorema fundamental das superfícies; Rigidez da esfera; teoremas de Whitney

Avaliação

2. Prática

- ▶ Pôr em prática a teoria realizando exercícios
- ▶ Aprender a calcular e a demonstrar
- ▶ Aprender a conceber uma resposta escrita e a partilha-la oralmente; trabalhar em grupo e participar à dinâmica da turma

A avaliação tem 3 partes:

- ▶ Exercícios: relatórios escritos e participação aos TPs e a dinâmica da turma (40%)
- ▶ Exame escrito, parte prática: exercícios vistos nos TPs e/ou próximos dos exercícios feitos nos TPs (20%)
- ▶ Exame escrito de teoria (40%).

Apoio e sessões de esclarecimento

- ▶ Durante a aula de TP, depois das apresentações dos exercícios (pode-se conversar além da hora prevista com quem o desejar)
- ▶ Quem participou a aula mas continua com dúvidas que não foram solucionadas nas TPs pode solicitar uma reunião particular

Sugestão de textbooks de apoio para a parte A

- ▶ **Manfredo do Carmo:** *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* (existe uma versão pdf em espanhol no link <https://www.academia.edu/38949108>); deve existir versões portuguesas ou inglesas quer em pdf/ps/djvu no web, quer nas bibliotecas. Este livro é a referência a nível internacional em geometria diferencial. Irão encontrar todas as definições necessarias, e todos os enunciados dos teoremas classicos com as demonstrações. Obviamente o livro contém mais detalhes, mais exercícios e mais resultados do que veremos nas aulas, mas aconselho a sua lida no acompanhamento dos meus apontamentos.
- ▶ **Christian Bär:** *Elementary Differential Geometry* (Cambridge university press)
- ▶ **M. Umehara, K. Yamada:** *Differential Geometry of Curves and Surfaces* (World Scientific press)

Sugestão de textbooks de apoio para a parte B

- ▶ **Manfredo do Carmo:** *Riemannian geometry* (Birkhäuser (1992))
- ▶ **B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov:** *Modern Geometry — Methods and Applications Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields* (Springer (1992))
- ▶ **Ph. G. Ciarlet:** *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications* (SIAM-Society for Industrial and Applied Mathematics (2013))

Objectivos do curso

1. PARTE A: Geometria diferencial em \mathbb{R}^n (Feb-Mar-Abril 2023)

- ▶ Curvas regulares em $3d$ parametrizações; triedro e fórmulas de Frenet (revisão). Hopf's Umlaufsatz (casos regular e irregular); teorema fundamental das curvas.
- ▶ Superfícies regulares; bases locais curvilíneas; símbolos de Christoffel; curvas em superfícies; cinemática das curvas; geodésicas; mapa de Gauss; primeira e segunda formas fundamentais; comprimento e área; superfícies isométricas, equilaterais e conformais; equações de Gauss e de Codazzi-Mainardi; teorema fundamental das superfícies.
- ▶ Curvaturas normal, principais, média e de Gauss; teorema de Weingarten; teorema "Egregium" de Gauss; aplicação a cartografia; caracterização dos pontos.
- ▶ Interpretações da curvatura de Gauss; coordenadas geodésicas (ou normais) e coordenadas das curvaturas principais.
- ▶ Um teorema global: a rigidez da esfera: "uma superfície isométrica à esfera é uma esfera" (evidente?).

Objectivos do curso - cont.

- ▶ Teorema de Gauss-Bonnet na forma local, global e topológica; triangulações; característica de Euler, género.
- 2. PART B: cálculo diferencial em variedades diferenciáveis. (Abril-Maio 2023)
 - ▶ Variedades topológicas e diferenciáveis; variedade metrizável; vetor e plano tangente; métrica e variedades Riemannianas.
 - ▶ Imersões e mergulhos; teoremas de Whitney (forma super fraca, clássica e super forte), teorema de Nash-Kuiper.
 - ▶ Introdução aos tensores e ao cálculo tensorial.
 - ▶ Derivação covariante de tensores; conexão; conexão compatível com a métrica (ou de Levi-Civita); símbolos de Christoffel; torção.
 - ▶ Curvatura de Riemann, de Ricci e curvatura escalar; simetrias; identidade de Bianchi.
 - ▶ Formas diferenciais; cálculo exterior; operador de Hodge, operador "push forward".
 - ▶ Integração e teorema de Stokes.

Conteúdo das aulas teoricas

PART A: Geometria das curvas e superfícies em \mathbb{R}^3

- ▶ Aula 1: Curvas planas e em $3d$; triedro e fórmulas de Frenet. (14/2)
- ▶ Aula 2: Teorema fundamental das curvas; número de enrolamento: classificação de curvas fechadas; teorema de Whitney; Hopf's Umlaufsatz. (16/2)
- ▶ Aula 3: Curvas em superfície em $3d$; geodésicas; primeira forma fundamental e comprimento das curvas. (23/2)
- ▶ Aula 4: Superfícies isométricas, equilateral e conformais; área e angulos em superfícies; segunda forma fundamental. (28/2)
- ▶ Aula 5: Mapa de Weingarten; equações de compatibilidade (Gauss-Codazzi-Mainardi); sistema de Pfaff; compatibilidade da métrica e da conexão (Teorema de Levi-Civita). (2/3)

- ▶ Aula 6: Teorema fundamental das superfícies. (7/3)
- ▶ Aula 7: Curvaturas principais, média, de Gauss; expressão explícita de K ; caracterização dos pontos. (9/3)
- ▶ Aula 8: Análise de casos; expressão explícita dos símbolos de Christoffel e de K ; teorema "Egregium" de Gauss. (14/3)
- ▶ Aula 9: Rigidez da esfera; geodésicas. Propriedades variacionais das geodésicas; coordenadas geodésicas; métrica geodésica. (16/3)
- ▶ Aula 10: Interpretações da curvatura de Gauss. (21/3)
- ▶ Aula 11 & 12: Teoremas de Gauss-Bonnet. (23 & 28/3)
- ▶ Aula 13: Derivação covariante em superfícies. (30/3)

PART B: Variedades diferenciáveis

- ▶ Aula 14: Variedades topológicas e diferenciáveis. (4/4)
- ▶ (Teste parte A. (6/4))
- ▶ Aulas 15 & 16: Imersões e mergulhos. Teorema do rank constante. (13 & 18/4)

Conteúdo das aulas teoricas

- ▶ Aula 17: Teoremas de Whitney: forma fraca, clássica, e forte. (20/4)
- ▶ Aula 18: Métrica e variedade Riemanniana. Isometrias e teorema de Nash-Kuiper. Conexão. Vetores e covetores, tensores. (25/4)
- ▶ Aulas 19 & 20: Conexão compatível com a métrica; símbolos de Christoffel; derivação covariante de tensores; transporte paralelo e geodésicas; torção da conexão. Curvatura de Riemann; identidades de Bianchi. (27/4 & 4/5)
- ▶ Aulas 21: Comutador; definição de torção e curvatura sem coordenadas. Teorema egregium. Curvatura de Ricci e curvatura escalar. (9/5)
- ▶ Aula 22: Campos de Jacobi e aproximação da métrica pela curvatura de Riemann. (12/5)

PART C: Cálculo exterior em variedades

- ▶ Aula 23 & 24: Cálculo exterior: álgebra de Grassman dos vetores e covetores; m -formas diferenciais; diferenciação exterior; formas extatas e fechadas; operadore dual de Hoge, push forward; integração. (16 & 18/5)
- ▶ Aula 25: Cálculo exterior: teorema de Stokes (23/5)

AULA 1 (14/02/2023)

Curvas planas e em $3d$; triedro e fórmulas de Frenet.

Curva parametrizada

Uma curva parametrizada é um par (I, γ) onde γ é um mapa suave $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, e I é um intervalo de \mathbb{R} . A mesma é dita regular (γ torna-se portanto, por definição, uma imersão) se o seu vetor velocidade $c := \dot{\gamma}(t) \neq 0, \forall t \in I$.

♣ A condição $\dot{c}(t) \neq 0$ significa que o ponto $c(t)$ está em movimento em t . Sem esta condição existem poucas propriedades genericas das curvas. Exemplos e contra-exemplos:

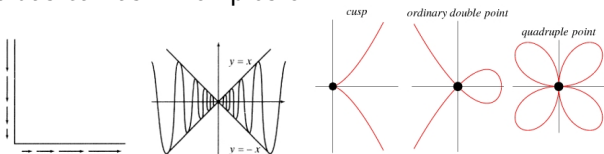


Figure: (i) Curva não suave com velocidade nula num ponto; (ii) curva suave com velocidade nula, sem tangente; (iii) curva suave com velocidade nula, com tangente; (iv) curva regular com um ponto duplo (existem duas tangentes); (v) curva regular com ponto quadruplo.

Curva geométrica

Uma curva geométrica é um sub-conjunto de \mathbb{R}^n que pode ser em cada ponto, localmente, e num referencial bem escolhido, representado como o gráfico de uma função.

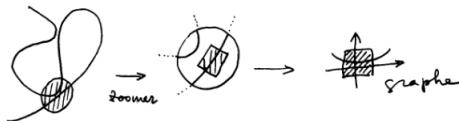


Figure: A curva é globalmente geométrica, pois zoomando em torno a um ponto qualquer pode ser representada por um gráfico.

Lema: Uma curva parametrizada regular (num intervalo aberto I) é sempre localmente uma curva geométrica:

$\forall t \in I, \exists \epsilon, \text{ t.q. o segmento de curva } \gamma[t - \epsilon; t + \epsilon] \text{ é uma curva geométrica.}$

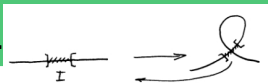


Figure: A curva não é globalmente geométrica pois que γ não é injetiva, i.e., existe um ponto duplo; o pequeno segmento de curva é geométrica.

Ligação entre as duas noções

♣ A imagem $f(I)$ da curva parametrizada dá pouca informação:

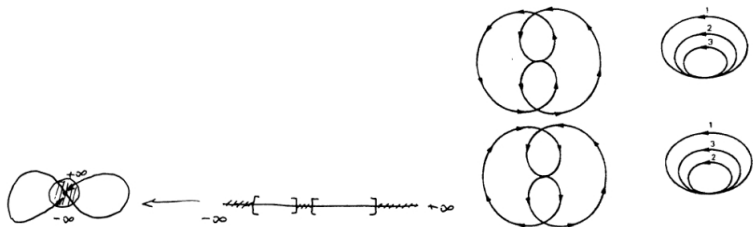


Figure: (i) $f : I =] - \infty, + \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ é injetiva, porem a curva não é globalmente geométrica, pois que em cada compacto em torno ao ponto de cruzamento asintótico há sempre 3 pedaços de curva desconexos;
 (ii) Curvas regulares, com $f(I)$ compacto, não injetivas, com tangente partilhada, e com duas parametrizações diferentes

♣ Sem hipótese suplementar, uma curva parametrizada regular pode ser horrível. Portanto introduzimos a noção de curva "generica": sem pontos \geq duplos e sem pontos auto-tangentes.

Os dois primeiros invariantes

Reparametrização

Seja $\psi : I \rightarrow J$ um difeomorfismo (i.e., um homeomorfismo tal que ψ e ψ^{-1} são diferenciáveis), com $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Logo, a curva $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma reparametrização da curva γ . Uma vez que $\psi \circ \psi^{-1} = \text{Id}$, vale $\dot{\psi}(\psi^{-1}) \frac{d}{dt} \psi^{-1} = \mathbb{I}$, então $\dot{\psi} \neq 0$ e portanto $\dot{\tilde{\gamma}} \neq 0$, logo cada reparametrização de uma curva regular é regular. Além disto, se $\dot{\psi} > 0$ (resp. < 0) a reparametrização preserve (resp. inversa) a orientação.

Primeiro invariante: comprimento

Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada.

O seu comprimento é dado por

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt, \quad \|a\| := \left(\sum_i a_i^2\right)^{1/2}, \quad a \in \mathbb{R}^n.$$

O mesmo é invariante por re-parametrização (verificar em casa).

Abcissa curvilínea ou parametrização pelo comprimento

Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada regular. Definimos $t \mapsto s(t) := \int_a^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau$. Sendo regular, $c(t) := \dot{s}(t) := \frac{d}{dt}s(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| > 0$, logo é crescente, então é invertível; portanto $s \mapsto t(s) = s^{-1}(t)$ com $t'(s) := \frac{dt}{ds} = 1/\dot{s}(t)$ e $\tilde{\gamma}(s) := \gamma \circ t(s)$ é uma re-parametrização da curva, onde $\tilde{\gamma} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $l := \mathcal{L}(\gamma)$. O novo parâmetro s é chamado abcissa curvilínea; satisfaz $\tilde{\gamma}'(s) = \frac{\dot{\gamma}(t(s))}{\|\dot{\gamma}(t(s))\|}$, logo tem velocidade unitária: $\|\tilde{\gamma}'\| = 1$.

Curvas em \mathbb{R}^2 . Referencial de Frenet e curvatura

Seja uma curva parametrizada pela sua abcissa. Definimos o vetor tangente $e = \gamma' = (e_1, e_2)$. O vetor normal é definido como $n = (-e_2, e_1)$. Sendo que $e^2 = 1$, temos $e \cdot e' = 0$, logo $e'(s) = \gamma''(s) = \kappa(s)n(s)$ com κ a curvatura algébrica (i.e., com sinal). Temos

$$\kappa(s) = (\gamma' \times \gamma'') \cdot (e \times n) = \det(\gamma' | \gamma''). \quad (\star) = \pm |\gamma' \times \gamma''|$$

Lema. Segundo invariante: curvatura algebraica

Seja uma curva $\tilde{\gamma}(I) \subset \mathbb{R}^2$ parametrizada por $t \in I$ não necessariamente abscissa curvilínea. A curvatura algebraica, definida como $\kappa(t) := \frac{\det(\dot{\tilde{\gamma}}(t)|\ddot{\tilde{\gamma}}(t))}{\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|^3}$ é invariante por re-parametrização.

DEM. Re-escrevemos (\star) como $\kappa(s) = \det(\gamma'(s)|\gamma''(s))$. Consideremos a re-parametrização $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(s(t))$. O resultado segue uma vez que

$\det(\dot{\tilde{\gamma}}(t)|\ddot{\tilde{\gamma}}(t)) = \det(\gamma'(s(t))\dot{s}(t)|\gamma'(s)\ddot{s}(t) + \gamma''(s(t))(\dot{s}(t))^2) =$
 $= (\dot{s}(t))^3 \det(\gamma'(s(t))|\gamma''(s(t)))$ pelas propriedades do determinante; logo,

$\kappa(s(t)) = \det(\gamma'(s(t))|\gamma''(s(t))) = \frac{\det(\dot{\tilde{\gamma}}(t)|\ddot{\tilde{\gamma}}(t))}{(\dot{s}(t))^3} = \tilde{\kappa}(t)$, sendo que

$\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| = \dot{s}(t) \|\gamma'(s(t))\| = \dot{s}(t)$. QED. ■

Nota: QED="quod erat demonstrandum"

Corolário: decomposição normal e tangencial da aceleração

Seja uma curva $\tilde{\gamma}(I) \subset \mathbb{R}^2$ parametrizada por $t \in I$ (não necessariamente abscissa curvilínea). Notemos $c := \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|$, o modulo da sua velocidade, e $e = \frac{\dot{\tilde{\gamma}}(t)}{c}$ o vetor unitário tangente a curva em cada ponto. Notemos também n o vetor unitário, ortogonal a e e situado do lado de $\ddot{\tilde{\gamma}}$ (i.e. aponta para o centro de curvatura, ao contrário do anterior onde era fixo). Portanto temos: $\ddot{\tilde{\gamma}} := \dot{c}e + \frac{c^2}{R}n$, onde $R := |\kappa|^{-1}$.

DEM. $e^2 = 1$ implica $\dot{e} = \frac{de}{dt} = \alpha n$ com $\alpha \in \mathbb{R}_*$. Mas $\dot{\tilde{\gamma}} = \frac{d\tilde{\gamma}}{dt} = \gamma'(s) \frac{ds}{dt} = ec$, logo $\dot{e} = \frac{\ddot{\tilde{\gamma}}}{c} - \frac{\dot{\tilde{\gamma}}}{c^2} \dot{c}$, i.e., $\ddot{\tilde{\gamma}} = c\alpha n + \dot{c}e$. Pelo Lema, $|\dot{\tilde{\gamma}} \times \ddot{\tilde{\gamma}}| = |\det(\dot{\tilde{\gamma}}(t) \ddot{\tilde{\gamma}}(t))| = |\kappa|c^3 = \|ce \times \ddot{\tilde{\gamma}}\| = c^2|\alpha|$, logo $\alpha = \pm|\kappa|c$. Sendo que n é escolhido t.q. $\alpha > 0$, segue o resultado. QED. ■

Acceleração centrípeta

Temos $\ddot{\gamma} = a^T + a^N$ com a componente tangencial $a^T := \dot{c}e$ e a componente normal (ou centrípeta) $a^N := (c^2/R)n$, com $R := 1/|\kappa|$.



Curva cinemática com menor energia

O movimento de uma massa m ao longo da trajetória (i.e., da curva) γ é obtido sem gasto de energia se $a^T = 0$. De facto, tal movimento é associado com uma potência nula: $ma \cdot ce = 0$. Em dimensão superior tais curvas são chamadas geodésicas (ver mais a frente). Para além, temos expressão afim de t em função de s , i.e., $\dot{c} = \frac{d^2s}{dt^2} = 0$, i.e., $t = \frac{s-s_0}{c}$.

Curvas em $\mathbb{3d}$. fórmulas de Frenet-Serret: abcissa curvilínea

Seja $\gamma \in \mathbb{R}^3$ uma curva regular. A posição de $x \in \gamma$ é dada pelo mapa $s \mapsto \gamma(s)$, com $s \in J$ a abcissa curvilínea.

- (i) Define-se em primeiro o vetor tangente $\tau := \gamma'$; tendo norma unitária, $\tau^2 = 1 \Rightarrow (\tau, \tau')_E = \tau \cdot \tau' = 0$, logo $\tau \perp \tau'$.
- (ii) Defina-se em segundo a curvatura num ponto da curva, $\kappa(s) := \|\tau'(s)\| = \|\gamma''(s)\|$
- (iii) O vetor normal n é definido como o único vetor unitário n que satisfaz $\tau' = \kappa n$.
- (iv) Um triedro é um conjunto de 3 vetores unitários linearmente independentes em cada ponto da curva. Define-se enfim o triedro de Frenet-Serret no ponto $\gamma(s)$ como $\{\gamma(s); \tau(s), n(s), b(s)\}$ onde $b := \tau \times n$.
 - É um exemplo de base movél curvilínea (no sentido em que varia em cada ponto).

Curvas em 3d. fórmulas de Frenet-Serret: abcissa curvilínea e vetor de Darboux

(v) Derivando o vetor bi-normal obtemos

$b' = \tau' \times n + \tau \times n' = \tau \times n'$: deduzimos que $b' \perp \tau$. D'outro lado $b^2 = 1 \Rightarrow b' \perp b$. Portanto b tem de ser colinear (paralelo) com n , logo existe $s \mapsto \xi(s)$ tal que $b'(s) = -\xi n(s)$, onde o número $\xi(s)$ é chamado torção da curva em $\gamma(s)$.

(v) Pela relação $n = b \times \tau$, deduzimos enfim que, utilizando as relações obtidas anteriormente, $n'(s) = -\kappa(s)\tau(s) + \xi(s)b(s)$.

(vi) Finalmente, definindo o **vetor de Darboux** (ou "de rotação infinitesimal") $\omega := \xi\tau + \kappa b$, obtemos

$$\tau' = \omega \times \tau, \quad n' = \omega \times n, \quad b' = \omega \times b.$$

(verificar em casa).

Caso geral em \mathbb{R}^3 . Segundo e terceiro invariantes

♣ Seja $\gamma \in \mathbb{R}^3$ uma curva regular com parametrização qualquer e parâmetro t não necessariamente abscissa curvilínea. A questão é a de definir um triedro de Frenet quando a abscissa é qualquer. Em relação ao caso da abscissa curvilínea, a ordem das definições tem de ser adaptado:

(i) Vetor tangente: $\tau(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$

(ii) Vetor bi-normal (ou "out of plane"):

$$b(t) := \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|}$$

(iii) Vetor normal:

$$n(t) := b(t) \times \tau(t) = \frac{(\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)) \times \dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\| \|\dot{\gamma}(t)\|}$$

(iv) Curvatura: $\kappa(t) := \frac{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}$

(v) Torção: $\xi(t) := \frac{\det(\dot{\gamma} | \ddot{\gamma} | \dddot{\gamma})}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|^2}$.

Invariança das curvatura e torção geométricas

- Se $\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = 0$, i.e., se a aceleração for paralela à velocidade, logo a curva é localmente uma reta, e n, b podem ser tomados quaisquer vetores unitários ortogonais à e . Senão, é evidente que τ, b e n são ortonormados, pelo que definem a base móvel (de Frenet-Serret) associada à curva. Falta verificar que κ e ξ coincidem com κ e ξ definidas anteriormente mediante a abscissa curvilínea. É o objeto do lema seguinte.

Lema. Invariança das curvatura e torção geométricas.

As funções curvatura κ e torção ξ são invariantes da curva (logo são bem definidos).

Matrix de Darboux

DEM. Seja $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(s(t))$. Sendo por definição de s , $\|\dot{\tilde{\gamma}}\| = \left| \frac{ds}{dt} \right|$, vem $\tau = \gamma' = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\dot{\tilde{\gamma}}}{\|\dot{\tilde{\gamma}}\|}$ e $\tau' = \gamma'' = \frac{\ddot{\tilde{\gamma}}}{\|\dot{\tilde{\gamma}}\|^2} + \left(\frac{1}{\|\dot{\tilde{\gamma}}\|}\right)' \dot{\tilde{\gamma}}$. Temos $|\kappa| = \|\tau \times \kappa n\| = \|\gamma' \times \gamma''\| = \frac{\|\dot{\tilde{\gamma}}(t) \times \ddot{\tilde{\gamma}}(t)\|}{\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\|^3} = |\tilde{\kappa}(t)|$ com $\tilde{\kappa} := \kappa \circ s$. Nos lembramos da identidade $\|a \cdot (b \times c)\| = |\det(a|b|c)|$ ($a, b, c \in \mathbb{R}^3$). Logo, vem $\tau \cdot (\tau' \times \tau'') = \tau \cdot (\kappa n \times \kappa(-\kappa\tau + \xi b)) = \kappa^2 \xi \tau \cdot (n \times b) = \kappa^2 \xi = |\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')| = |\det(\dot{\tilde{\gamma}}, \ddot{\tilde{\gamma}}, \ddot{\tilde{\gamma}})| / \|\dot{\tilde{\gamma}}\|^6$, uma vez que $\gamma'' = \frac{\ddot{\tilde{\gamma}}}{\|\dot{\tilde{\gamma}}\|^2}$ mais um vetor colinear com $\dot{\tilde{\gamma}}$, e d'outro lado $\gamma''' = \frac{\ddot{\tilde{\gamma}}}{\|\dot{\tilde{\gamma}}\|^3}$ mais uma combinação linear de $\dot{\tilde{\gamma}}$ e $\ddot{\tilde{\gamma}}$. QED. ■

♣ Seja a matrix $\mathcal{F} = (\tau|n|b)^T$. A representação de Darboux $\tau' = \omega \times \tau$, $n' = \omega \times n$ e $b' = \omega \times b$ pode ser re-escrita como (verificar em casa)

$$\frac{d\mathcal{F}}{ds} = \Omega \mathcal{F}, \quad \text{onde} \quad \Omega := \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \xi \\ 0 & -\xi & 0 \end{pmatrix}. \quad (\star)$$

AULA 2 (16/02/2023)

**Teorema fundamental das curvas; número de enrolamento;
classificação de curvas fechadas; teorema de Whitney;
Hopf's Umlaufsatz (teorema das tangentes girantes).**

Teorema fundamental das curvas

Teorema fundamental das curvas espaciais

Seja $s \in [0, l] \mapsto (\kappa(s), \xi(s))$ suave e tal que $\kappa > 0$ em $[0, l]$. Existe uma única curva regular e invariante por difeomorfismo crescente (i.e., preservante a orientação) cuja abscissa curvilínea é s e cujas curvatura e torção são κ e ξ .

DEM. Tomemos $\mathcal{F}(0) = \mathbb{I}$. Logo a ODE sob forma de sistema (matricial) (\star) tem uma solução única, nomeadamente o campo matricial $s \mapsto \mathcal{F}(s)$. Mostremos que \mathcal{F} é ortogonal: com efeito, um vez que $\Omega = -\Omega^T$, logo temos $\frac{d}{ds}(\mathcal{F}^T \mathcal{F}) = (\mathcal{F}^T)' \mathcal{F} + \mathcal{F}^T \mathcal{F}' = \mathcal{F}^T \Omega^T \mathcal{F} + \mathcal{F}^T \Omega \mathcal{F} = 0$, i.e. $\mathcal{F}^T \mathcal{F}(s) = \mathcal{F}^T \mathcal{F}(0) = \mathbb{I}$.

Portanto $\mathcal{F}(s)$ pode ser escrita como um triedro ortonormado $(\tau(s)|n(s)|b(s))^T$. Pela representação de Darboux (\star) , a curva

$\gamma(s) := \int_0^s \tau(\zeta) d\zeta$ torna-se a única curva procurada. QED. ■

Aplicação às curvas planas

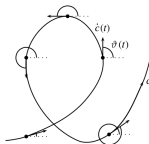
♣ Tomando $\xi(s) = 0, \forall s$, a curva é dita plana (i.e., não sai do quadro). Seja a curvatura $s \in [0, l] \mapsto \kappa(s) \in \mathbb{R}$. Sendo τ plano e unitário, notamos $\tau(\zeta) = e^{i\vartheta(\zeta)} = (\cos \vartheta(\zeta), \sin \vartheta(\zeta))$. A única curva plana com curvatura κ (não necessariamente > 0) é dada por $\gamma(s) = \int_0^s \tau(\zeta) d\zeta = \int_0^s e^{i\vartheta(\zeta)} d\zeta$ com $\vartheta(\zeta) = \int_0^\zeta \kappa(t) dt$ (★★).

Com efeito, $\tau(s) := \gamma'(s) = e^{i(\int_0^s \kappa(t) dt)}$ é a tangente unitária, enquanto $\tau'(s) = \gamma''(s) = i\kappa(s)e^{i(\int_0^s \kappa(t) dt)} = n(s)\kappa(s)$ onde o vetor $n(s) := ie^{i(\int_0^s \kappa(t) dt)}$ tal que $n \cdot \tau = 0$ é a normal (desta vez, definida sem ambiguidade como uma rotação de τ de $+90^\circ$).

♣ Sendo que $\tau(s) = e^{i\vartheta(s)} = (\cos(\vartheta(s)), \sin(\vartheta(s)))$, a função $\vartheta(s)$ representa o ângulo entre $e_x := (1, 0) = \tau(0)$ e $\tau(s)$, i.e., é o ângulo entre a tangente

à curva e o eixo horizontal.

(na figura, a curva é re-nomeada $\gamma = c$)



Grau, índice e número de enrolamento

Número de enrolamento - winding number

Seja γ uma curva fechada e suave, i.e. $\gamma(0) = \gamma(l)$, $\gamma'(0) = \gamma'(l)$ (e todas as derivadas também coincidentes nas extremidades).

A curvatura total de γ é definida como $\mathcal{K}_\gamma := \int_0^l \kappa(s) ds$. O número de enrolamento (ou número de voltas) de γ é definido como $i_\gamma := \frac{\mathcal{K}_\gamma}{2\pi}$.

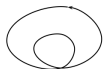
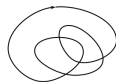
Lema

O número de enrolamento é um número inteiro.

DEM. Sendo que $\gamma'(l) = \gamma'(0)$
 $= e^{i\vartheta(l)} = e^{i\vartheta(0)}$ temos $\vartheta(l) =$
 $\vartheta(0) + 2k\pi$ com k inteiro.

Logo, por (**), $\vartheta(0) = 0$ e
 $\mathcal{K}_\gamma = \vartheta(l) = 2k\pi$. QED.

(na figura $i_\gamma = n_c$).


 $n_c = 2$

 $n_c = -3$

 $n_c = 0$

 $n_c = 1$


Grau de uma aplicação do círculo unitário

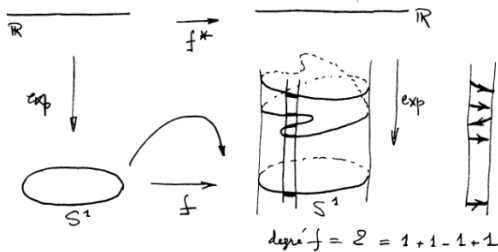
♣ Seja uma aplicação $f : S^1 \rightarrow S^1$ contínua. Consideramos a exponencial complexa $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ (i.e., $\exp(u) = e^{iu}$).

Pela continuidade de f e sendo \exp localmente um difeomorfismo, existe uma aplicação $f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \circ \exp = \exp \circ f^*$.

O grau de f é definido como $\mathcal{G}_f := \frac{f^*(2\pi) - f^*(0)}{2\pi}$.

Sendo que $\exp(f^*(2\pi)) - \exp(f^*(0)) = f(\exp(2\pi)) - f(\exp(0)) = 0$ temos necessariamente que \mathcal{G}_f é um número inteiro.

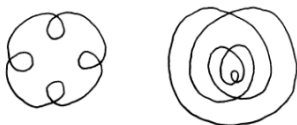
♣ O grau representa "quantas vezes o círculo unitário é recoberto por f ."



♣ O número de enrolamento i_γ de uma curva fechada regular γ foi definido a partir de parametrizações canônicas. Para uma parametrização qualquer, corresponde à noção de grau do mapa $f = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|} : [0, 2\pi] \mapsto S^1$, com $[0, 2\pi]$ identificado com S^1 . Portanto temos no plano um terceiro invariante, i_γ pois que $i_\gamma = \mathcal{G} \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}$. Esta invariança por re-parametrização não é a única: o índice de enrolamento é também invariante por difeomorfismos (p.e., rotação, expansão ou reflexão) do plano e por homotopia de curvas:

Teorema de Whitney

Duas curvas regulares e fechadas são homotopas se e somente se têm o mesmo número de enrolamento.



♣ Porém não têm a mesma "forma", i.e. não são difeomorfas no plano (por falta de homotopia mediante boas curvas, "genericas")

Classificação das curvas fechadas

- ♣ A classificação das curvas fechadas é ainda um tópico de investigação científica (*Arnold, V. (1994 b). Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications. Adv. Sov. Math., 21,33-91.*)
- O elemento chave é a identificação de 3 invariantes (ditos de Arnold) que são as "singularidades" das curvas: ponto triplos (St para "strangicity number"), e 2 tipos de auto-tangentes (J^+ e J^-):

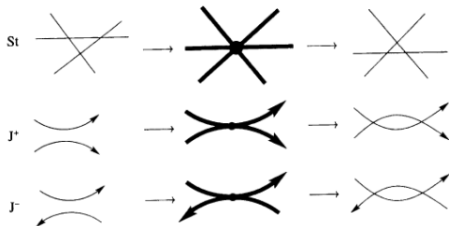


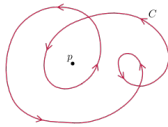
Diagrama de Gauss-Arnold (curvas com 4 pontos duplos)

$i = 1$															
St	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	4
J^*	0	0	0	0	0	0	0	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-8
J^*	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-4	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-12
$i = 1$															
St	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3
J^*	2	2	2	0	0	0	0	0	-2	-2	-2	-4	-4	-4	-6
J^*	-2	-2	-2	-4	-4	-4	-4	-4	-6	-6	-6	-8	-8	-8	-10
$i = 1$							$i = 1$							$i = 1$	
St	0	0	0	0	1	1	1	St	-2	1	1	1	2	2	St
J^*	2	2	2	2	0	0	0	J^*	4	-2	-2	-2	-4	-4	J^*
J^*	-2	-2	-2	-2	-4	-4	-4	J^*	0	-6	-6	-6	-8	-8	J^*
$i = 3$															
St	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	6
J^*	-4	-4	-4	-4	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-12
J^*	-8	-8	-8	-8	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-10	-16
$i = 3$															
St	1	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	3
J^*	-2	-4	-4	-4	-6	-6	-6	-6	-8	-8	-8	-8	-10	-10	-10
J^*	-6	-8	-8	-8	-10	-10	-10	-10	-12	-12	-12	-12	-14	-14	-14
$i = 3$				$i = 3$					$i = 3$						
St	2	3	3	St	0	3	4	4	St	2	2	2	2	2	2
J^*	-2	-4	-4	J^*	0	-6	-8	-8	J^*	-4	-4	-4	-4	-4	-4
J^*	-6	-8	-8	J^*	-4	-10	-12	-12	J^*	-8	-8	-8	-8	-8	-8
$i = 5$					$i = 5$					$i = 5$					
St	6	7	10	St	5	6	8	9	St	4	4	4	4	4	7
J^*	-12	-14	-20	J^*	-10	-12	-16	-18	J^*	-8	-8	-8	-8	-8	-14
J^*	-16	-18	-24	J^*	-14	-16	-20	-22	J^*	-12	-12	-12	-12	-12	-18

Índice de um ponto com respeito à uma curva fechada

Seja uma parametrização periódica sobre $[0, 2\pi]$ de uma curva $\gamma(t)$, plana regular e fechada. Seja $p \in \mathbb{R}^2$ um ponto do plano. Definimos a aplicação $f_p(t) := \frac{p - \gamma(t)}{\|p - \gamma(t)\|}$. Logo, identificando t com um ponto de S^1 (i.e., um vetor unitário e um ângulo), $f_p : S^1 \rightarrow S^1$ representa um "ângulo" entre p e a curva.

- O índice de p com respeito à curva é definido como o grau de f : representa "quanta curva pode ser vista de p , incluindo os enrolamentos": quanto mais longe p da curva tanto menor o ângulo, logo tanto menor a porção de S^1 percorrida por f_p .
- Em particular se p estiver no exterior da curva o índice vale 0 e se estiver no interior vale um número inteiro conforme a sua localização nos nós: e.g., é igual á i_γ se p está no interior do último nó da curva.



Umlaufsatz -1-

- ♣ Seja uma curva plana regular, fechada e simples, i.e., injetiva, parametrizada por $t \in I := [0, 1] \sim S^1$. A partir do mapa $g(p, t) := f_p(t)$ definimos o mapa contínuo $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^1$:
 $h(t_1, t_2) := g(\gamma(t_2), t_1) = \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{\|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\|}$ se $t_1 < t_2$ e $(t_1, t_2) \neq (0, 1)$
 e $h(t, t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$ se $t = t_1 = t_2$. Falta definir h em $(0, 1)$. Por continuidade e periodicidade, $h(0, 1) = \lim_{t \rightarrow 1} h(0, t) = \lim_{t \rightarrow 1} h(1, t) = -h(0, 0) = -\frac{\dot{\gamma}(0)}{\|\dot{\gamma}(0)\|} = -\gamma'(0) = (0, -1)$ (\square).
- Com s a abscissa curvilínea, sabemos que $h(s, s) = \gamma'(s) = e^{i\vartheta(s)}$ onde $\vartheta(s) = \int_0^s \kappa(\zeta) d\zeta$, $0 \leq s \leq l = \mathcal{L}(\gamma)$.
 - Portanto o número de enrolamento de γ é $i_\gamma = \frac{\vartheta(l)}{2\pi}$. Apesar de sabermos que $\vartheta(l)$ é múltiplo inteiro de 2π , não é evidente demonstrar que vale exatamente $\pm 2\pi$ no caso de uma curva simples geral. Notem que, se a curva for conexa, i.e., com as tangentes do lado exterior, é fácil demonstrar que a tangente gira de $\pm 2\pi$.

Umlaufsatz -2-

♣ Para isto, precisamos de um resultado importante valido nos dominios A do plano estrelados com respeito a um ponto x_0 (significa que o segmento $[x_0, x]$, $\forall x \in A$ pertence a A).

Teorema de levantamento de Hopf

**Seja A um aberto de \mathbb{R}^2 estrelado com respeito a $x_0 \in A$.
Seja $h : A \rightarrow S^1$ um mapa contínuo. Portanto existe um mapa contínuo $\theta : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = e^{i\theta(x)}$, $\forall x \in A$. O mapa é único mediante a prescrição $\theta(x_0) = \theta_0$.**

• Voltando ao h definido acima, suponhamos que $h(0, 0) = \gamma'(0) = (0, 1)$. Significa que

$$\theta(0, 0) = \pi/2 + 2k\pi \quad (\square\square).$$

Umlaufsatz -3-

- Apliquemos o teorema de levantamento em

$A = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1\}$, logo obtemos um mapa contínuo $\theta : A \rightarrow S^1$.

- ♣ Definimos o nosso referencial Cartesiano tal que $\gamma(0) = (1, 0)$, e de maneira que a imagem $\gamma(I)$ se situe inteiramente entre os eixos verticais $x_1 = -1$ e $x_1 = 1$, e tal que $\gamma(t^*) = (-1, 0)$.

Hopf's "Umlaufsatz", ou teorema das tangentes girantes

Seja uma curva plana, regular, injetiva e fechada. Então, a tangente à curva efetua uma rotação completa de 2π ou de -2π , i.e. a curva tem número de enrolamento igual a ± 1 .

DEM. **Step 0.** Calculemos $2\pi i_\gamma = \vartheta(l) - \vartheta(0) = \arg \gamma'(1) - \arg \gamma'(0) = \arg h(1, 1) - \arg h(0, 0) := \theta(1, 1) - \theta(0, 0) = (\theta(1, 1) - \theta(0, 1)) + (\theta(0, 1) - \theta(0, 0))$.

Por ($\square\square$) p.36 já sabemos que $\theta(0, 0) = \frac{\pi}{2}$ modulo $2k\pi$.

Umlaufsatz -4-

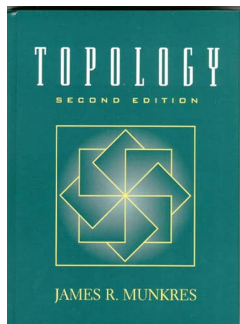
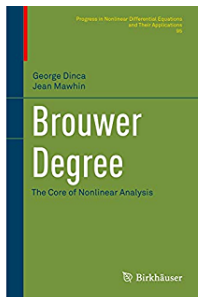
DEM (cont.). Falta determinar $\theta(0, 1)$ e $\theta(1, 1)$.

Step 1 ($\theta(0, 1)$). Pela definição de h , temos $\forall 0 < t < 1$, $h(0, t) \neq (1, 0)$, já que pelo absurdo, se $h(0, t) = (1, 0)$ então teríamos $\gamma_1(t) = 1 + \|\gamma(t) - \gamma(0)\| > 1$, uma contradição uma vez que a curva encontra-se a esquerda de $x_1 = 1$. Deduzimos então que $2k\pi < \theta(0, t) < 2(k+1)\pi$ onde $k \geq 0$ (Δ). Por (\square) p.35, temos $h(0, 1) = -h(0, 0) = (0, -1)$, i.e., por (Δ) $\theta(0, 1) = \lim_{t \rightarrow 1} \theta(0, t) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$.

Step 2. ($\theta(1, 1)$). Analogamente $h(t, 1) \neq (-1, 0)$ implica $\pi + 2k\pi < \theta(t, 1) < \pi + 2(k+1)\pi$ onde $k \geq 0$ ($\Delta\Delta$). Sendo γ fechada, temos $h(0, 0) = h(1, 1) = (0, 1) = \lim_{t \rightarrow 1} h(t, 1)$, logo, modulo 2π , vem $\pi < \theta(1, 1) = \lim_{t \rightarrow 1} \theta(t, 1) < 3\pi$, i.e. por ($\Delta\Delta$), $\theta(1, 1) = \frac{5\pi}{2} + 2k\pi$.

Step 3. Temos $2\pi i_\gamma = \theta(1, 1) - \theta(0, 1) + (\theta(0, 1) - \theta(0, 0)) = \pi + \pi = 2\pi$. QED. ■

Sugestão de referências em teoria do grau / topologia



- A propriedade $\exists f^*$ t.q. $f \circ \exp = \exp \circ f^*$ chama-se "path-lifting lemma" e se encontra no Lemma 54.1 do livro de Munkres.

Hopf para curvas regulares por partes

Função com variação limitada

Seja uma função $\vartheta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que ϑ tem variação limitada se a quantidade "variação total de f ",

$$VT(\vartheta) := \sup \sum_i |\vartheta(t_{i+1}) - \vartheta(t_i)| < C < \infty,$$

com o supremo tomado em todas as possíveis partições de $[0, l]$, sempre que $t_i \leq t_{i+1}$, $t_0 = 0$, $t_N = l$. Para além existe o seguinte resultado de aproximação. Seja $\vartheta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^1 por partes, i.e. é C^1 em todos os pontos excepto num número finito de pontos $\{\dots, \tau_i, \tau_{i+1}, \dots\}$ entre 0 e l onde ϑ é descontínua. Se ϑ tiver variação limitada, então existe uma sucessão de funções aproximantes $\vartheta_k \in C^\infty([0, l]; \mathbb{R})$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^l |\vartheta'_k(t)| dt = \sum_i \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\vartheta'(t)| dt + \sum_i |[\theta_i]|,$$

onde $[\theta_i]$ é o salto de ϑ nos pontos de discontinuidade τ_i de ϑ .

Hopf para curvas regulares por partes -1-

♣ Este resultado diz que se contabilizarmos os saltos junto com os integrais nos pedaços onde a função é derivável, então a variação total da função é o limite da variação total das aproximantes, uma vez que se a função for diferenciável, sua variação total é mesmo o integral $VT(\vartheta) = \int_0^l |\vartheta'| dt$.

- Se a função f for diferenciável com derivada limitada, ou com derivada integrável no sentido de Lebesgue, então temos sempre $VT(f) = \int_0^l |f'| dt$.

- A função $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$ é diferenciável em \mathbb{R} mas sua derivada não é limitada na origem, logo não tem variação limitada na origem; até não tem variação limitada em $[0, 1]$.

- Se f tiver variação limitada, então admite em cada ponto um limite a direita e a esquerda. O conjunto de pontos onde não é contínua é chamado conjunto de saltos. O mesmo é pelo mais numerável.

Hopf para curvas regulares por partes -2-

- É fácil verificar que se f é crescente, logo tem variação limitada.
- Um outro resultado é o seguinte: se f tiver variação limitada, então é a diferença entre 2 funções crescentes, cada uma com variação limitada.

Hopf's "Umlaufsatz" generalizado

Seja $\gamma : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana, continua, regular por partes, simples e fechada. Sejam $\mathcal{T} := \{\dots, \tau_i, \tau_{i+1}, \dots\}$ um número finito de pontos entre 0 e l onde γ' é descontínua.

Seja ϑ o ângulo entre γ' e e_1 .

Então vale $\sum_i (\vartheta(\tau_{i+1}) - \vartheta(\tau_i)) + \sum_i [\vartheta_i] = \pm 2\pi$.

- Na demonstração utilizaremos que $\vartheta = \bar{\vartheta} - \tilde{\vartheta}$ onde $\bar{\vartheta}$ e $\tilde{\vartheta}$ são crescentes, logo com variação limitada. Para além, as aproximantes tem uma decomposição similar e vale $\bar{\vartheta} = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\vartheta}_k$ e $\tilde{\vartheta} = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\vartheta}_k$ no sentido acima.

Hopf para curvas regulares por partes -3-

DEM. Seja γ_k curvas \mathcal{C}^1 tal que $\|\gamma - \gamma_k\|_{\mathcal{C}^0} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Seja ϑ_k o ângulo entre γ'_k e e_1 . Portanto ϑ é descontínuo em \mathcal{T} , \mathcal{C}^1 por partes e com variação limitada (já que existe um número finito de saltos limitados). Logo por Hopf suave e pelo resultado anterior:

$$\begin{aligned} \vartheta_k &:= \bar{\vartheta}_k - \tilde{\vartheta}_k \in \mathcal{C}^\infty([0, l]; \mathbb{R}) \text{ existe tal que } \pm 2\pi = \lim_{k \rightarrow \infty} \vartheta_k(l) = \\ &\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^l \vartheta'_k(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^l \bar{\vartheta}'_k(t) - \tilde{\vartheta}'_k(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^l |\bar{\vartheta}'_k(t)| dt - \\ &\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^l |\tilde{\vartheta}'_k(t)| dt = \sum_i \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\bar{\vartheta}'(t)| dt + \sum_i |[\bar{\vartheta}_i]| - \\ &\sum_i \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\tilde{\vartheta}'(t)| dt - \sum_i |[\tilde{\vartheta}_i]| = \sum_i \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \bar{\vartheta}'(t) dt + \sum_i [\bar{\vartheta}_i] - \\ &\sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{\vartheta}'(t) dt - \sum_i [\tilde{\vartheta}_i] = \sum_i (\vartheta(t_{i+1}) - \vartheta(t_i)) + \sum_i [\theta_i], \text{ onde} \\ &\theta_i \text{ é, por convenção, um ângulo exterior. QED.} \end{aligned}$$

└ A.2. Geometria extrínseca das superfícies

└ A.2.1. Curvas em superfícies em $3d$

AULA 3 (23/2/2023)

Curvas em superfície em $3d$; geodésicas; primeira forma fundamental e comprimento das curvas.

Superfície regular

Superfície regular (definição)

Uma superfície regular de \mathbb{R}^3 é dada pelo par (p, A) onde $A \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto e $p : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma função suave e injetiva tal que o mapa inverso é contínuo (i.e., é um homeomorfismo suave).

Para além, o gradiente do mapa p tem também de ser injetivo, ou seja, a matriz 3×2 , ∇p (com componentes $\partial_\alpha p_i$, $\alpha \in \{1, 2\}, i \in \{1, 2, 3\}$) tem rank 2 (i.e. p torna-se uma imersão suave e injetiva).

- O sub-conjunto bi-dimensional de \mathbb{R}^3 , $S \equiv p(u, v) \subset \mathbb{R}^3$, $(u, v) \in A$ é chamado superfície regular parametrizada (i.e., pelo par de coordenadas $(u, v) \in A$).
- O ponto $p = p(u, v) \in S$ é chamado ponto posição.

- Esta definição pode ser generalizada da seguinte maneira: dizemos que S é uma superfície regular se em cada ponto p de S existe uma vizinhança U de p e um mapa $p : A \rightarrow U$ onde A é um aberto de \mathbb{R}^2 que verifica as condições de regularidades acima (i.e., é localmente uma imersão injetiva). dizemos que S é de classe \mathcal{C}^k se tais mapas têm regularidade \mathcal{C}^k para todas as vizinhanças em S .

Plano tangente em $p \in S$ (definição)

O plano tangente à uma superfície regular S em $p \in S$ é o sub-conjunto de \mathbb{R}^3 :

$$T_p S := \{v \in \mathbb{R}^3 : \text{existe uma curva regular } \gamma : I \rightarrow S \text{ tal que } \gamma(0) = p \\ \text{e } \gamma'(0) = v\}.$$

- Tais vetores v são chamados vetores tangentes. Portanto o plano tangente em p é o conjunto dos vetores tangentes em p .

Diferencial de f em p (definição)

Tome $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável (significa que $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável enquanto função de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}) e uma curva $\gamma : I \rightarrow S$ t.q. $\gamma(0) = p$. Notemos $\gamma(t) =: (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$.

Temos a definição seguinte do diferencial de f em p :

$$\dot{\gamma}(0)f := \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i(0) = \sum_{i=1}^3 \left(\dot{x}_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f.$$

- O vetor $\dot{\gamma}(0) := \dot{x}_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathbb{R}^3$ pertence por definição ao plano tangente designado por $T_p S$ e é expressado na base movél $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{1 \leq i \leq 3}$ (nota-se que $\frac{\partial}{\partial x_i}$ é apenas uma notação para o i .esimo vetor de base pertencente ao espaço Euclidiano $T_p S$. Para além, é dito "movél" por ser definido em cada ponto p , i.e., não é uma base fixa tipo Cartesianas), enquanto $\dot{\gamma}(0)$ é visto como um operador diferencial aplicado a f , que, com efeito, corresponde ao diferencial de f na direcção $\dot{\gamma}$, uma vez que $df(p)[\dot{\gamma}(0)] := \dot{\gamma}(0)f$.

Cinemática de uma curva em superfície em \mathbb{R}^3 -1-

• **Nota:** ver $\dot{\gamma}(0)$ como um operador será crucial nas variedades.

♣ Seja uma superfície bi-dimensional regular e suave

$S = p(u, v) \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por $(u, v) \in A \subset \mathbb{R}^2$: logo,

$p : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ é suave e injetiva com ∇p de rank 2.

Sendo que $p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, definimos

$$g_u := \left. \frac{\partial p}{\partial u} \right|_{v=\text{cst}} \text{ e } g_v := \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_{u=\text{cst}}$$

dois vetores tangentes à S em $P = p(u, v)$.

Notemos $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha}$, $\alpha \in \{u, v\} = \{1, 2\}$ e a matrix 3×2

$\nabla p = \partial_{u,v} p = (g_u | g_v)$ (varias notações para o gradiente de p).

• Suponhamos que S seja orientável, i.e., que existe um campo vetorial suave ν que fica sempre ortogonal quer a g_u quer a g_v .

Logo, consideremos uma base local de \mathbb{R}^3 , $\{g_u, g_v, \nu\}$, com ν um campo vetorial unitário e ortogonal à S . O mapa $\nu : S \rightarrow S^2$ é chamado **mapa de Gauss** (S^n designa a esfera unitária de \mathbb{R}^{n+1}).

Cinemática de uma curva em superfície em \mathbb{R}^3 -2-

♣ Seja $t \in I \mapsto \gamma(t) \subset S$ uma curva suave de S . Portanto $\gamma(I)$ é a imagem por p de uma curva plana $(u(t), v(t)) \subset \mathbb{R}^2$, i.e., $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$. Notemos $w(t) := (u(t), v(t))$.

• A velocidade da curva é

$$c(u(t), v(t)) := \dot{\gamma}(t) := \frac{d}{dt}\gamma(t) = (\dot{w} \cdot \nabla)(p \circ w)(t) := \dot{w}_1 \partial_u(p \circ w)(t) + \dot{w}_2 \partial_v(p \circ w)(t) = \dot{u}(t)g_u(w(t)) + \dot{v}(t)g_v(w(t)).$$

• A aceleração da curva é

$$a(u(t), v(t)) := \frac{d}{dt}c(u(t), v(t)) = \ddot{\gamma}(t) = (\dot{w} \cdot \nabla)(c \circ w)(t) = \ddot{u}g_u + \ddot{v}g_v + \dot{u}^2 \partial_u g_u + \dot{v}^2 \partial_v g_v + 2\dot{u}\dot{v} \partial_v g_u.$$

■ Gostaríamos de decompor a aceleração numa componente ortogonal à superfície, a^ν , e outra tangente à superfície, a^T , com componentes a^σ , $\sigma \in \{1, 2\} = \{u, v\}$. Temos duas abordagens:

Geodésica em superfície em \mathbb{R}^3 -3-

♣ **Abordagem directo:** Sendo $\partial_u g_u, \partial_v g_v$ e $\partial_u g_v = \partial_v g_u$ vetores $3d$, expressamos os mesmos em função dos vetores da base móvel $g_i := \{g_\alpha, \nu\}_{1 \leq \alpha \leq 2} = \{g_u, g_v, \nu\}$, i.e.,

$$\partial_\alpha g_\beta = \sum_k \Gamma_{\alpha\beta}^k g_k,$$

com $\alpha, \beta \in \{u, v\} = \{1, 2\}$, soma em $k \in \{1, 2, 3\}$, e coeficientes $\Gamma_{\alpha\beta}^k$ ainda por determinar (chamados símbolos de Christoffel).

• Assim, obtemos a decomposição da aceleração a da curva: $a = \sum_\sigma (a^\sigma g_\sigma) + a^3 \nu$ com as duas componentes tangenciais

$$a^\sigma = \ddot{w}^\sigma + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \dot{w}^\alpha \dot{w}^\beta, \quad \sigma \in \{u, v\},$$

e uma normal, $a^3 := (\dot{u})^2 \Gamma_{uu}^3 + (\dot{v})^2 \Gamma_{vv}^3 + 2\dot{u}\dot{v} \Gamma_{uv}^3$.

Geodésica em superfície em \mathbb{R}^3 -4-

• **Aplicação:** seja um ponto em movimento na superfície da esfera de raio R ao longo de um paralelo; logo, tem um ângulo azimutal constante $\varphi \geq 0$. Suponhamos que tem uma velocidade constante apenas tangencial ao longo da curva, i.e., $v = V\tau$ ($V = \text{cste}$, $v \cdot n = v \cdot \nu = 0$, onde n é o vetor unitário normal à curva e tangente a superfície, e ν o vetor unitário normal à superfície).

Uma vez que $\dot{\varphi} = 0$ (por ficar na curva com azimute constante) e $\dot{\theta} = V/R$ (por definição da velocidade de rotation angular), sua aceleração é $\vec{a} = \Gamma_{\theta\theta}^{\varphi} \dot{\theta}^2 n + \Gamma_{\theta\theta}^r \dot{\theta}^2 \nu$, ou seja, calculando explicitamente os símbolos de Christoffel,

$$\vec{a} = V^2 / (R \tan \varphi) n + V^2 / R \nu.$$

Logo existe uma força de atração azimutal (dirigida ao equador) enquanto $\varphi > 0$. Esta força é na natureza geométrica.

Geodésica em superfície em \mathbb{R}^3 -5-

Curva geodésica (definição)

Uma curva numa superfície é dita geodésica se a componente tangencial da sua aceleração é nula: $a^\sigma = 0$, onde $\sigma \in \{u, v\}$.

Portanto a sua equação é

$$\ddot{w}^\sigma + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \dot{w}^\alpha \dot{w}^\beta = 0. \quad (\star)$$

- Notemos:

- ▶ (\star) tem uma solução única dados $w(0)$ e $\dot{w}(0)$
- ▶ (\star) re-escreve-se como: $\sum_{\beta} \dot{w}^\beta \frac{\partial \dot{w}^\gamma}{\partial w^\beta} + \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \dot{w}^\alpha \dot{w}^\beta = \sum_{\beta} c^\beta \left(\frac{\partial c^\gamma}{\partial w^\beta} + \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma c^\alpha \right) =: \sum_{\beta} c^\beta (\nabla^\Gamma c)^\gamma = \sum_{\beta} c^\beta c_{\parallel\beta}^\gamma = c \cdot (\nabla^\Gamma c^\gamma) = 0$, com c^γ a componente de c na base local curvilínea, definindo assim a **derivada covariante** de c , $\nabla^\Gamma c$, mediante os símbolos de Christoffel Γ .

Geodésica numa superfície em \mathbb{R}^3 -6-

Algumas propriedades e comentários:

- ▶ A velocidade é constante uma vez que $\frac{d}{dt}c^2 = 2c \cdot \dot{c} = 2c \cdot (a^\nu \nu) = 0$.
- ▶ Sendo a velocidade c constante, o elemento de comprimento de curva satisfaz $ds = \|\dot{\gamma}\|dt = \|c\|dt$, portanto o parâmetro t (o "tempo") é proporcional à abcissa curvilínea.
- ▶ A potência necessária ao movimento de uma massa pontual m ao longo de γ é $ma \cdot c = m\dot{c} \cdot c$, logo é nula numa geodésica: diz-se que uma geodésica é a curva com menor "energia"
- ▶ Uma geodésica é uma curva que minimiza o comprimento entre 2 pontos de S . A demonstração será feita mais a frente.

Geodésica em superfície em \mathbb{R}^3 -7- (matéria extra)

♣ Abordagem mediante a derivada covariante: definimos as componentes da derivada covariante do vetor velocidade

$c = \dot{u}g_u + \dot{v}g_v = c^\alpha g_\alpha$ (com soma em $\alpha \in \{1, 2\} = \{u, v\}$), nomeadamente $c_{\parallel\beta}^k$ da maneira seguinte:

$\partial_\beta c = \partial_\beta(c^\alpha g_\alpha) =: c_{\parallel\beta}^k g_k$, com soma em $k \in \{1, 2, 3\}$.

- Portanto $a = (\dot{w} \cdot \nabla)c = \dot{w}^\beta \partial_\beta c = \dot{w}^\beta c_{\parallel\beta}^k g_k$. Logo $a^\gamma = \dot{w}^\beta c_{\parallel\beta}^\gamma$.
- Vetorialmente: $a^\gamma = c^\alpha g_\alpha \cdot c_{\parallel\beta}^\gamma g^\beta$, pois que $g_\alpha \cdot g_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ e $c^\beta = \dot{w}^\beta$ são as componentes da velocidade na base local $\{g_u, g_v\}$.
- O gradiente covariante $\nabla^\Gamma c$ tem componentes na base local curvilínea, sendo que $\nabla^\Gamma c = (\nabla^\Gamma c)^\gamma g_\gamma \otimes g^k = (\nabla^\Gamma c^\gamma)_k g_\gamma \otimes g^k = (\nabla^\Gamma c^l)_k g_l \otimes g^k = (\nabla^\Gamma c)_k^l g_l \otimes g^k = \partial_j c^i e_i \otimes e^j = \nabla c$ onde ∇ é o gradiente Cartesiano. Portanto, temos a transformação "tensorial" $\partial_j c^i = (g_l)^i (g^k)_j (\nabla^\Gamma c^l)_k$.

Métrica induzida e comprimento de uma curva

Métrica induzida na superfície (definição)

Sendo $g_\alpha(t) := \partial_\alpha p(w(t))$, $\alpha \in \{u, v\}$ com $w(t) = (u(t), v(t))$, i.e., $g_u := \partial_u p$ e $g_v := \partial_v p$, dois vetores independentes e tangentes à superfície em $p = p(w) = p(u, v)$, a **métrica induzida** (pelo produto escalar Cartesiano de \mathbb{R}^3) é definida como o conjunto de 4 componentes dados pela matriz 2×2 $g_{\alpha\beta} := g_\alpha \cdot g_\beta$, $\alpha, \beta \in \{u, v\}$.

Elemento de comprimento entre 2 pontos numa superfície

Consideremos os pontos $p := p(w)$ e $q := p(w + \delta w)$ pertencentes à S . Questão: qual é a distância (em \mathbb{R}^3) entre p e q ? Partimos de $p(w + \delta w) = p(w) + \sum_{\alpha=1}^2 \delta w^\alpha \partial_\alpha p + o(\|\delta w\|)$ e calculemos $\|p(w + \delta w) - p(w)\| = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^2 \delta w^\alpha g_\alpha \cdot \sum_{\beta=1}^2 \delta w^\beta g_\beta + o(\|\delta w\|)} = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^2 \delta w^\alpha g_\alpha \cdot \sum_{\beta=1}^2 \delta w^\beta g_\beta + o(\|\delta w\|)}$. O termo principal é o termo na primeira ordem, ou seja $\delta s := \sqrt{\sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} \delta w^\beta \delta w^\alpha}$.

Primeira forma fundamental (ou métrica) -1-

Comprimento de uma curva (definição):

Seja uma curva $\gamma : I \rightarrow S$. Seu comprimento é definido por

$$\mathcal{L}(\gamma) := \int_I \|\dot{w}\|_g dt \text{ com a velocidade } \|\dot{w}\|_g := \sqrt{\sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} \dot{w}^\alpha \dot{w}^\beta},$$

obtida mediante a métrica $g_{\alpha\beta}$ induzida na superfície.

Primeira forma fundamental (definição)

Calculemos a norma ao quadrado da velocidade de $\gamma(t) = p(w(t))$:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}^2(t) &= \left\| \frac{d}{dt} p \circ w(t) \right\|^2 = \sum_{\alpha=1}^2 \partial_\alpha p \frac{dw^\alpha}{dt} \cdot \sum_{\beta=1}^2 \partial_\beta p \frac{dw^\beta}{dt} = \\ &= (g_u \dot{u} + g_v \dot{v}) \cdot (g_u \dot{u} + g_v \dot{v}) = E \dot{u}^2 + G \dot{v}^2 + 2F \dot{u} \dot{v} \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} \dot{w}^\alpha \dot{w}^\beta \text{ com } E := g_u \cdot g_u, G := g_v \cdot g_v, F := g_u \cdot g_v. \end{aligned}$$

• A "primeira forma fundamental" é o mapa bilinear e simétrico:

$$\mathbb{I}_1(a, b) := E a_1 b_1 + F(a_1 b_2 + a_2 b_1) + G a_2 b_2, \quad (\forall a, b \in T_p S).$$

Primeira forma fundamental (ou métrica) -2-

- Temos $ds := |\dot{\gamma}|dt$, i.e., o elemento de comprimento ao quadrado $ds^2 := dp \cdot dp$ é definido como o mapa quadrático definido positivo:

$$ds^2 := \mathbb{I}_1[dw] = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

onde $dw := (du, dv)$.

Superfícies isométricas (definição)

Duas superfícies regulares $p : A \rightarrow S$ e $\tilde{p} : A \rightarrow \tilde{S}$ são ditas **isométricas** se as curvas imagem $\gamma := p \circ w$ e $\tilde{\gamma} := \tilde{p} \circ w$ têm o mesmo comprimento, i.e., se $\forall J \subset I$ e (para qualquer curva) $\forall t \in J \mapsto w(t) \in A$, temos $\mathcal{L}(p \circ w(J)) = \mathcal{L}(\tilde{p} \circ w(J))$, ou seja:

$$\int_J \sqrt{\sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} \dot{w}^\alpha \dot{w}^\beta} dt = \int_J \sqrt{\sum_{\alpha, \beta=1}^2 \tilde{g}_{\alpha\beta} \dot{w}^\alpha \dot{w}^\beta} dt, \quad \forall J \subset I,$$

com $g_{\alpha\beta} := \partial_{\alpha} p \cdot \partial_{\beta} p$ e $\tilde{g}_{\alpha\beta} := \partial_{\alpha} \tilde{p} \cdot \partial_{\beta} \tilde{p}$.

Primeira forma fundamental (ou métrica) -3-

- Logo, para $x := w(t)$, com escolhas de curvas particulares $w(\tau) = x + (\tau - t)e_u$, $\bar{w}(\tau) = x + (\tau - t)e_v$, e $\hat{w}(\tau) = x + (\tau - t)(e_u + e_v)$, vem (pelo teorema do valor intermédio), escolhendo o sub-intervalo $J_n := [t - 1/n, t + 1/n]$, dividindo por $2/n$, e deixando $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{g_{11}}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \int_{t-1/n}^{t+1/n} \sqrt{g_{11}(w(\tau))} d\tau =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \int_{t-1/n}^{t+1/n} \sqrt{\tilde{g}_{11}(w(\tau))} d\tau = \sqrt{\tilde{g}_{11}(x)}, \text{ (etc. para as outras}$$

componentes da métrica), pelo que a propriedade de isometria equivale a:

$$g_{\alpha\beta}(x) = \tilde{g}_{\alpha\beta}(x),$$

$$\forall x = w(t) \in A, \forall t \in I.$$

• **Nota:** o cilindro com métrica $ds^2 = d(r\theta)^2 + dz^2$ é isométrico ao plano (onde $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$), i.e., se escolhermos no cilindro as variáveis $x_1 = r\theta$ e $x_2 = z$, obtemos a mesma métrica $E = G = 1$ e $F = 0$.

Como consequência, partilhem quantidades intrínsecas como comprimento, ângulo e área.

♣ Uma **métrica isothermal** é definida como uma métrica tal que $F = 0$ e $E = G = \lambda(u, v)$ onde λ é uma função de u e v . Logo

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda(u, v) & 0 \\ 0 & \lambda(u, v) \end{pmatrix}$$

• É uma **métrica Euclidiana** se $\lambda = 1$.

Lema. Curvas isométricas

Todas as curvas pertencentes a superfície $S \equiv p(A)$ têm comprimento igual ao das suas pre-imagem em A , se e somente se a métrica de S for Euclidiana.

DEM. • O sentido "se" é evidente já que $\mathcal{L}(\gamma) = \int_I \|\dot{w}\|_g dt = \int_I \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt = \int_I \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2} dt$.

• No outro sentido: tome um ponto qualquer $w(t_0) \in A$ e considere o segmento $t \mapsto \tilde{w}(t) := w(t_0) + t(\cos \alpha, \sin \alpha)$ com $\alpha \in \mathbb{R}$, $t_0 \in I$ e $0 \leq t \leq b$. Por hipótese, o comprimento de $p(\tilde{w}([0, b]))$ é igual à b .

• Toma-se o quadrado da derivada com respeito a b da igualdade $b = \int_0^b \sqrt{(E \cos^2 \alpha + 2F \cos \alpha \sin \alpha + G \sin^2 \alpha)} dt$, logo vem $1 = E \cos^2 \alpha + 2F \cos \alpha \sin \alpha + G \sin^2 \alpha$.

• Tome $\alpha = 0$, logo $E = 1$. Tome $\alpha = \pi/2$, logo $G = 1 = E$.

Portanto, para α qualquer, $1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2F \cos \alpha \sin \alpha = 1 + 2F \cos \alpha \sin \alpha, \forall \alpha$, daí a tese, $F = 0$. QED. ■

AULA 4 (28/2/2023)

Superfícies isométricas, equilateral e conformais; área e ângulos em superfícies; segunda forma fundamental.

Elemento de área (definição)

O elemento de área numa superfície em $q \in S$ é definido como

$$\begin{aligned}
 dS &= \|\vec{dS}\| = \|\vec{dp}_u \times \vec{dp}_v\| := \|\partial_u p(q) du \times \partial_v p(q) dv\| \\
 &= |g_u(q) \times g_v(q)| dudv = \left| \begin{array}{ccc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ g_u^1 & g_u^2 & g_u^3 \\ g_v^1 & g_v^2 & g_v^3 \end{array} \right| dudv = \\
 &= \sqrt{(g_u^2 g_v^3 - g_u^3 g_v^2)^2 + (g_u^1 g_v^3 - g_u^3 g_v^1)^2 + (g_u^1 g_v^2 - g_u^2 g_v^1)^2} dudv = \\
 &= \sqrt{\begin{vmatrix} g_u \cdot g_u & g_u \cdot g_v \\ g_v \cdot g_u & g_v \cdot g_v \end{vmatrix}} dudv = \sqrt{\det g_{\alpha\beta}} dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv.
 \end{aligned}$$

Superfícies equi-areais (definição)

Duas superfícies regulares $p : A \rightarrow S$ e $\tilde{p} : A \rightarrow \tilde{S}$ são ditas **equi-areais** se as superfícies imagem têm a mesma área, i.e., se $\forall B \subset A$ t.q. \bar{B} é compacto, temos

$$\int_B dS = \int \int_B \sqrt{\det g_{\alpha\beta}} dudv = d\tilde{S} = \int \int_B \sqrt{\det \tilde{g}_{\alpha\beta}} dudv. \quad (\Delta)$$

• Analogamente com caso anterior, definindo $B := B(x, \epsilon)$, dividindo (Δ) por $\text{vol}(B)$ e deixando $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos pelo teorema do valor intermédio, que ser equi-areais equivale a identidade puntual

$$|\det g_{\alpha\beta}|(x) = |\det \tilde{g}_{\alpha\beta}|(x), \forall x \in A.$$

Ângulo entre duas curvas numa superfície (definição)

Sejam duas curvas $\gamma := p \circ w$ e $\eta := p \circ z$ pertencentes à S , parametrizadas por $t \in I$. O ângulo χ no ponto de intersecção q de γ e η é definido como o ângulo entre os dois vetores tangentes

$$\begin{aligned} \text{em } q, \text{ ou seja (com } ' := \frac{d}{dt}) \quad \cos \chi &= \frac{(p \circ w)' \cdot (p \circ z)'}{\|(p \circ w)'\| \|(p \circ z)'\|} \\ &= \frac{\sum_{\alpha=1}^2 \partial_{\alpha} p(w')^{\alpha} \cdot \sum_{\beta=1}^2 \partial_{\beta} p(z')^{\beta}}{\|(p \circ w)'\| \|(p \circ z)'\|} = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \frac{g_{\alpha\beta}(w')^{\alpha}(z')^{\beta}}{\|(p \circ w)'\| \|(p \circ z)'\|} \\ &= \frac{g[w', z']}{\sqrt{g[w', w']g[z', z']}}, \text{ onde } g[a, b] := \sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} a_{\alpha} b_{\beta} = \mathbb{I}_1[a, b]. \end{aligned}$$

Superfície conformal (definição)

Duas superfícies regulares $p : A \rightarrow S$ e $\tilde{p} : A \rightarrow \tilde{S}$ são ditas **conformais** se as curvas imagem conservem o seu ângulo nos seus pontos de intersecção, i.e., se para cada duas curvas $\gamma := p \circ w$, $\eta := p \circ z \in S$ com intersecção $q \in S$ e $\tilde{\gamma} := \tilde{p} \circ w$, $\tilde{\eta} := \tilde{p} \circ z \in \tilde{S}$ com intersecção $\tilde{q} \in \tilde{S}$, temos $\chi(q) = \tilde{\chi}(\tilde{q})$.

Lema

Seja A um aberto de \mathbb{R}^2 . Duas superfícies conformais $p(A)$ e $\tilde{p}(A)$ verificam $\exists C > 0 : g_{\alpha\beta} = C\tilde{g}_{\alpha\beta}$.

DEM.

• A relação $\cos \chi = \cos \tilde{\chi}$ implica $\frac{g[w',z']}{\sqrt{g[w',w']g[z',z']}} = \frac{\tilde{g}[\tilde{w}',\tilde{z}']}{\sqrt{\tilde{g}[\tilde{w}',\tilde{w}']\tilde{g}[\tilde{z}',\tilde{z}']}}$,
 i.e., $g[W',Z'] = \tilde{g}[\tilde{W}',\tilde{Z}']$ com os vetores unitários $Y := \frac{y}{\sqrt{g[y,y]}}$

(mediante a norma $\|y\|_g := \sqrt{g[y,y]}$).

• D'outro lado, sendo g uma forma definida positiva, escreve-se mediante uma matriz definida positiva G , i.e. temos $GX \cdot X = 1$ com X unitário na norma induzidas por g . Escolhendo X e \tilde{X} os primeiros vetores próprios ortonormados de G e \tilde{G} (nas normas induzidas por g e \tilde{g} , respetivamente), temos $GX \cdot X = 1 = \tilde{G}\tilde{X} \cdot \tilde{X}$ e portanto $GX \cdot X = \lambda X^2 = \tilde{G}\tilde{X} \cdot \tilde{X} = \tilde{\lambda}\tilde{X}^2 \Rightarrow X = \pm\zeta\tilde{X}$, com $\zeta := \sqrt{\tilde{\lambda}/\lambda}$.

DEM. (cont.) Os segundos vetores próprios ortonormados Y, \tilde{Y} verificam também $Y = \pm\sqrt{\tilde{\mu}/\mu}\tilde{Y}$, com μ e $\tilde{\mu}$ os valores próprios associados. Mas, sendo Y e \tilde{Y} uma rotação de 90° de X, \tilde{X} , temos necessariamente $\sqrt{\tilde{\mu}/\mu} = \zeta$, e $Y = \pm\zeta\tilde{Y}$.

• Ora, para os vetores W' e Z' temos $W' = aX + bY$ e $Z' = cX + dY$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$; mas também, $\tilde{W}' = \tilde{a}\tilde{X} + \tilde{b}\tilde{Y}$ e $\tilde{Z}' = \tilde{c}\tilde{X} + \tilde{d}\tilde{Y}$ com $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d} \in \mathbb{R}$. Logo

$GW' \cdot Z' = acGX \cdot X + bdGY \cdot Y$, uma vez que $GX \cdot Y = 0$, i.e. obtemos $GW' \cdot Z' = ac + bd$. Da mesma maneira vem $\tilde{G}\tilde{W}' \cdot \tilde{Z}' = \tilde{a}\tilde{c} + \tilde{b}\tilde{d}$.

• Pela conformalidade, $GW' \cdot Z' = \tilde{G}\tilde{W}' \cdot \tilde{Z}'$, logo $ac + bd = \tilde{a}\tilde{c} + \tilde{b}\tilde{d}$.

• D'outro lado, se calcularmos explicitamente, pelas relações $X = \pm\zeta\tilde{X}$ e $Y = \pm\zeta\tilde{Y}$, vem, $GW' \cdot Z' = G(aX + bY) \cdot (cX + dY) = \zeta^2 G(a\tilde{X} + b\tilde{Y}) \cdot (c\tilde{X} + d\tilde{Y}) = \tilde{G}\tilde{W}' \cdot \tilde{Z}' = \tilde{G}(\tilde{a}\tilde{X} + \tilde{b}\tilde{Y}) \cdot (\tilde{c}\tilde{X} + \tilde{d}\tilde{Y}) = \tilde{a}\tilde{c} + \tilde{b}\tilde{d} = ac + bd = \tilde{G}(a\tilde{X} + b\tilde{Y}) \cdot (c\tilde{X} + d\tilde{Y})$, a última igualdade vindo da

DEM. (cont.) ortonormalidade de \tilde{X} e \tilde{Y} .

- Sendo isto válido para quaisquer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, definimos $U := a\tilde{X} + b\tilde{Y}$ e $V := c\tilde{X} + d\tilde{Y}$, pelo que a sucessão de igualdades implica $\zeta^2 G U \cdot V = \tilde{G} U \cdot V$ para quaisquer vetores $U, V \in \mathbb{R}^3$.

- Daí, concluímos que $\zeta^2 G = \tilde{G}$ (verifica-se componente por componente, tomando $U = e_1, V = e_1$, depois $U = e_1, V = e_2$ e enfim $U = e_2, V = e_2$). QED. ■

♣ Um resultado crucial é o seguinte:

Lema

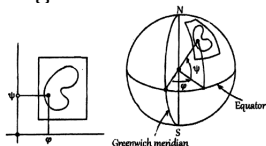
Duas superfícies conformais e equi-areais são necessariamente isométricas.

DEM. Sendo conformais temos pelo Lema $\exists C > 0 : g_{\alpha\beta} = C\tilde{g}_{\alpha\beta}$ pelo que $|\det g_{\alpha\beta}| = C^2 |\det \tilde{g}_{\alpha\beta}|$. Logo, pela propriedade de equi-área, necessariamente $C = 1$. QED. ■

Mapas cartográficos

Um mapa cartográfico é uma imersão injetiva suave de um aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ em $S \subset \{x : \|x\| = R\}$ (o globo). O Lema anterior diz que num mapa cartográfico não se pode haver quer as áreas quer os ângulos iguais às medidas na superfície do globo.

A demonstração completa requer provar que não existe nenhum mapa $p : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ isométrico, uma vez que o plano e a esfera não têm a mesma curvatura de Gauss (vê mais a diante o Teorema Egregium).



- A projeção de Mercator preserva os ângulos (i.e., as formas) mas não as áreas enquanto a de Peters preserve às áreas mas não os ângulos.



Segunda forma fundamental

Segunda forma fundamental e curvatura normal

• Já vimos que a aceleração de uma curva tem uma componente tangencial e outra normal, i.e., $a = a^T + a^\nu \nu$, onde a aceleração centrípeta tem componente $a^\nu := \dot{u}^2 \Gamma_{uu}^3 + \dot{v}^2 \Gamma_{vv}^3 + 2\dot{u}\dot{v} \Gamma_{uv}^3$, com $\Gamma_{uu}^3 = L := \partial_u g_u \cdot \nu = \partial_u (g_u \cdot \nu) - g_u \cdot \partial_u \nu = -g_u \cdot \partial_u \nu$; $\Gamma_{vv}^3 = N := \partial_v g_v \cdot \nu = -g_v \cdot \partial_v \nu$; $\Gamma_{uv}^3 = M := \partial_v g_u \cdot \nu = -g_u \cdot \partial_v \nu$. Daí definimos a **curvatura normal** em $p(s)$ como

$$\kappa_n(p(s)) := |a^\nu(s)| = L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2$$

(com s , a abcissa curvilínea). Portanto definimos o mapa quadrático (não necessariamente definido positivo):

$$\mathbb{I}_2[dw] := -dp \cdot d\nu = Ldu^2 + Ndv^2 + 2Mdudv, \quad (dw := (du, dv)),$$

associado ao mapa bilinear e simétrico "**segunda forma fundamental**":

$$\mathbb{I}_2(a, b) := La_1b_1 + M(a_1b_2 + a_2b_1) + Na_2b_2, \quad \forall a, b \in T_pS.$$

Fórmula de Meusnier

• **Interpretação:** a 2.^a forma fundamental nos diz como a 1.^a forma (o comprimento de uma curva) varia com a normal a superfície, i.e., como a superfície se afasta do plano tangente: repare-se que se trata de um efeito na 2.^a ordem pois que, por Taylor vem (o termo na 1.^a ordem é automaticamente nulo)

$$(p(u + \Delta u, v) - p(u, v)) \cdot \nu = \frac{1}{2}L(\Delta u)^2 + o(\Delta u^2).$$

Globalmente o afastamento é dado por

$$(p(u + \Delta u, v + \Delta v) - p(u, v)) \cdot \nu = \frac{1}{2} (L(\Delta u)^2 + M\Delta u\Delta v + N(\Delta v)^2),$$

modulo um resto desprezável.

♣ A **fórmula de Meusnier** é dada por

$$\kappa_n(\gamma(s)) = \mathbb{I}_2[\gamma'(s)] = \mathbb{I}_2(u', v'),$$

e nos diz que a curvatura normal (apesar de ser uma aceleração centrípeta) depende apenas das velocidades no ponto.

AULA 5 (2/3/2023)

Mapa de Weingarten; equações de compatibilidade (Gauss-Codazzi-Mainardi); sistema de Pfaff; compatibilidade da métrica e da conexão (Teorema de Levi-Civita).

Invariança por mudança de coordenadas

♣ Seja $A := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ e $B := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ as matrizes associadas à primeira e segunda forma fundamental, i.e.,

$$\mathbb{I}_1[dw, d\tilde{w}] = Adw^T \cdot d\tilde{w}, \quad \mathbb{I}_2[dw, d\tilde{w}] = Bdw^T \cdot d\tilde{w},$$

• Seja o difeomorfismo "mudança de coordenadas" $(\tilde{u}, \tilde{v}) = \psi(u, v)$. Seja $\tilde{p} := p \circ \phi(\tilde{u}, \tilde{v})$ com $\phi := \psi^{-1}$. Seja $\mathcal{J} := \frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}$ a jacobiana associada. As componentes da 1.^a forma são $\tilde{E} = \partial_{\tilde{u}}\tilde{p} \cdot \partial_{\tilde{u}}\tilde{p} = (\partial_u p \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \partial_v p \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}) \cdot (\partial_u p \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \partial_v p \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}) = E(\frac{\partial u}{\partial \tilde{u}})^2 + 2F \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} + G(\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}})^2$, etc. com F e G , i.e. matricialmente $\tilde{A} = \mathcal{J}^T A \mathcal{J}$. Da mesma maneira: $\tilde{B} = \mathcal{J}^T B \mathcal{J}$.

• Para além, temos $\det \tilde{A} = |\det \mathcal{J}|^2 \det A$ e $\det \tilde{B} = |\det \mathcal{J}|^2 \det B$.

Mapa de Weingarten

♣ A matriz $W := A^{-1}B$ é chamada **matriz de Weingarten**. Sob mudança de coordenadas temos $\tilde{W} = \tilde{A}^{-1}\tilde{B}$
 $= (\mathcal{J}^T A \mathcal{J})^{-1}(\mathcal{J}^T B \mathcal{J}) = \mathcal{J}^{-1}W \mathcal{J}$. In particular $\det \tilde{W} = \det W$
 e $\text{tr } \tilde{W} = \text{tr } W$. Logo W e \tilde{W} têm os mesmo valores próprios.

Teorema de Weingarten

Sendo $W = A^{-1}B$, temos

$$d\nu = -dpW \quad \text{i.e., } (\partial_u \nu | \partial_v \nu) = -(g_u | g_v)W \quad (\mathbf{W}).$$

DEM. Seja as matrizes $\mathcal{F} := (g_u | g_v | \nu)$ e $Q := (\partial_u \nu | \partial_v \nu | \nu)$. Logo $\mathcal{F}^T \mathcal{F} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $-\mathcal{F}^T Q = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, com a convenção $a \cdot b = a^T b$. Portanto $-\mathcal{F}^{-1}Q = -(\mathcal{F}^T \mathcal{F})^{-1} \mathcal{F}^T Q = \begin{pmatrix} A^{-1}B & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, logo $Q = -\mathcal{F} \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, i.e. a tese. QED. ■

Relações de compatibilidade da teoria das superfícies -1-

• Em particular, um corolário imediato diz que $\{\partial_u \nu, \partial_v \nu\}$ são linearmente dependentes se e somente se $\det W = 0$, uma vez que $\{g_u, g_v\}$ são linearmente independentes.

♣ Vimos que $\partial_\alpha g_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^k g_k$ (C) e por Weingarten que $\partial_\alpha \nu = -W_{\beta\alpha} g_\beta$. Sendo a superfície suave temos sempre $\partial_\alpha \beta g_\gamma := \partial_\alpha \partial_\beta g_\gamma = \partial_\beta \alpha g_\gamma$. Por exemplo, apliquemos isto à g_u , e identifiquemos os termos múltiplos de g_u, g_v e ν :

$$\begin{aligned} \partial_{vu} g_u - \partial_{uv} g_u &= \mathbf{A}_u g_u + \mathbf{B}_u g_v + \mathbf{C}_u \nu = 0, \text{ i.e., } 0 = \partial_v \Gamma_{uu}^k g_k + \\ &\Gamma_{uu}^k \partial_v g_k - \partial_u \Gamma_{vu}^k g_k - \Gamma_{vu}^k \partial_u g_k = \underbrace{\hspace{15em}}_{=\mathbf{A}_u} \\ &= (\partial_v \Gamma_{uu}^u - \partial_u \Gamma_{vu}^u + \Gamma_{uu}^u \Gamma_{vu}^u + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^u - \Gamma_{uu}^3 W_{uv} - \Gamma_{uu}^u \Gamma_{vu}^u - \Gamma_{vu}^v \Gamma_{uv}^u \\ &+ \Gamma_{vu}^3 W_{uu}) g_u + \mathbf{B}_u g_v + \underbrace{\hspace{15em}}_{=\mathbf{C}_u} \\ &\partial_v \Gamma_{uu}^3 + \sum_{\alpha=1}^2 \Gamma_{uu}^\alpha \Gamma_{v\alpha}^3 - \partial_u \Gamma_{vu}^3 - \sum_{\alpha=1}^2 \Gamma_{vu}^\alpha \Gamma_{u\alpha}^3 \end{aligned}$$

ν .

Relações de compatibilidade da teoria das superfícies -2-

- Isto implica que $\mathbf{A}_u = \mathbf{B}_u = \mathbf{C}_u = 0$. De $\mathbf{A}_u = 0$ ou $\mathbf{B}_u = 0$ obtemos a fórmula de Gauss demonstrada mais a frente.
- ♣ Lembramos que as matrizes associadas às 1.^a e 2.^a formas fundamentais são $A = (a_{\alpha\beta})_{\alpha\beta}$ com $a_{\alpha\beta} := g_{\alpha\beta}$ e

$$B = (b_{\alpha\beta})_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^3 & \Gamma_{uv}^3 \\ \Gamma_{vu}^3 & \Gamma_{vv}^3 \end{pmatrix}.$$

- Definimos as matrizes $\Gamma_\gamma := \begin{pmatrix} (\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha)_{\alpha\beta} & -W_{\alpha\gamma} \\ b_{\gamma\alpha} & 0 \end{pmatrix}$ com $\gamma, \alpha, \beta \in \{u, v\} = \{1, 2\}$, ou seja

$$\Gamma_\gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{\gamma 1}^1 & \Gamma_{\gamma 2}^1 & -W_{1\gamma} \\ \Gamma_{\gamma 1}^2 & \Gamma_{\gamma 2}^2 & -W_{2\gamma} \\ b_{\gamma 1} & b_{\gamma 2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{\gamma u}^u & \Gamma_{\gamma v}^u & -W_{u\gamma} \\ \Gamma_{\gamma u}^v & \Gamma_{\gamma v}^v & -W_{v\gamma} \\ \Gamma_{\gamma u}^3 & \Gamma_{\gamma v}^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Relações de compatibilidade da teoria das superfícies -3-

- Mas, pelo teorema de Weingarten temos $\partial_\gamma \nu = -W_{\beta\gamma} g_\beta$.

Definimos $\Gamma_{\gamma 3}^\tau := \partial_\gamma \nu \cdot g_\tau$.

- Logo, $\Gamma_\gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{\gamma u}^u & \Gamma_{\gamma v}^u & \partial_\gamma \nu \cdot g_u \\ \Gamma_{\gamma u}^v & \Gamma_{\gamma v}^v & \partial_\gamma \nu \cdot g_v \\ \Gamma_{\gamma u}^3 & \Gamma_{\gamma v}^3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{\gamma u}^u & \Gamma_{\gamma v}^u & \Gamma_{\gamma 3}^u \\ \Gamma_{\gamma u}^v & \Gamma_{\gamma v}^v & \Gamma_{\gamma 3}^v \\ \Gamma_{\gamma u}^3 & \Gamma_{\gamma v}^3 & 0 \end{pmatrix} \quad (\bullet),$

ou, com os índices, $(\Gamma_\gamma)_{ij} = \Gamma_{\gamma j}^i$ com $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

- Observemos agora que \mathbf{A}_u escreve-se como

$\mathbf{A}_u = (\partial_v \Gamma_u - \partial_u \Gamma_v + \Gamma_v \Gamma_u - \Gamma_u \Gamma_v)_{11}$ (verifica-se facilmente que:

$$\begin{aligned} (\Gamma_v \Gamma_u - \Gamma_u \Gamma_v)_{11} &= \sum_\tau (\Gamma_{v\tau}^1 \Gamma_{u1}^\tau - \Gamma_{u\tau}^1 \Gamma_{v1}^\tau) - W_{v1} B_{u1} + W_{1u} B_{1v} \\ &= \Gamma_{v2}^1 \Gamma_{u1}^2 - \Gamma_{u2}^1 \Gamma_{v1}^2 - \Gamma_{u1}^3 W_{v1} + \Gamma_{v1}^3 W_{u1}, \text{ onde } (u, v) \equiv (1, 2)). \end{aligned}$$

- Analogamente \mathbf{B}_u escreve-se como

$$\mathbf{B}_u = (\partial_v \Gamma_u - \partial_u \Gamma_v + \Gamma_v \Gamma_u - \Gamma_u \Gamma_v)_{21}$$

e \mathbf{C}_u escreve-se como

$$\mathbf{C}_u = (\partial_v \Gamma_u - \partial_u \Gamma_v + \Gamma_v \Gamma_u - \Gamma_u \Gamma_v)_{31}$$

Relações de compatibilidade da teoria das superfícies -4-

- Assim, o vetor $(\mathbf{A}_u | \mathbf{B}_u | \mathbf{C}_u)$ corresponde a 1.^a coluna da seguinte matrix, i.e.,

$$(\mathbf{A}_u | \mathbf{B}_u | \mathbf{C}_u)^T = (\partial_v \Gamma_u - \partial_u \Gamma_v + \Gamma_v \Gamma_u - \Gamma_u \Gamma_v)_{i1}, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Logo as equações $\mathbf{A}_u = \mathbf{B}_u = \mathbf{C}_u = \mathbf{0}$ escrevem-se na forma

$$0 = (\partial_v \Gamma_u - \partial_u \Gamma_v + \Gamma_v \Gamma_u - \Gamma_u \Gamma_v)_{j1}, \quad j \in \{1, 2, 3\}$$

- Ora, se aplicarmos a compatibilidade também a g_v (i.e., coluna $i2$) e a ν (i.e., coluna $i3$) obteríamos uma equação matricial, chamada condição de **compatibilidade de Pfaff**:

$$0 = (\partial_v \Gamma_u - \partial_u \Gamma_v + \Gamma_v \Gamma_u - \Gamma_u \Gamma_v)_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (\square)$$

Conexão simétrica (definição)

Uma conexão é simétrica se $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Tal conexão é dita sem torção.

Equações de Gauss e de Codazzi-Mainardi -1-

♣ Seja $\mathcal{F} := (g_u | g_v | \nu)$ e definimos $\Omega := \Gamma_u \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e $\Lambda := \Gamma_v \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Pela definição dos símbolos de Christoffel $\partial_\alpha g_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^k g_k$ e pela fórmula de Weingarten $\partial_\alpha \nu = -W_{\beta\alpha} g_\beta$, acabamos de demonstrar o teorema seguinte:

Teorema. Equação de compatibilidade das superfícies

Temos:

$$\partial_u \mathcal{F} = \mathcal{F} \Omega, \quad \partial_v \mathcal{F} = \mathcal{F} \Lambda.$$

Alem disto, valem as equações de Pfaff (\square) na forma seguinte:

$$\Lambda \Omega + \partial_v \Omega = \Omega \Lambda + \partial_u \Lambda \quad (\text{G.C.M.})$$

DEM. As duas primeiras identidades valem por identificação de termos; a última segue da igualdade $\partial_{uv} \mathcal{F} = \partial_{vu} \mathcal{F}$:

$\partial_v(\partial_u \mathcal{F}) = \mathcal{F} \partial_v \Omega + \partial_v \mathcal{F} \Omega = \partial_u(\partial_v \mathcal{F}) = \mathcal{F} \partial_u \Lambda + \partial_u \mathcal{F} \Lambda$, logo multiplicando por \mathcal{F}^T segue a tese. QED. ■

Equações de Gauss e de Codazzi-Mainardi -2-

- Equação (**G.C.M.**) é chamada "condição necessária do teorema fundamental das superfícies", ou "relações de compatibilidade das superfícies regular e suaves" (ou de Gauss-Codazzi-Mainardi). Já vimos as equações de Gauss ($\mathbf{A}_u = 0$ ou $\mathbf{B}_u = 0$). Falta definir as equações de Codazzi-Mainardi:

Equações de Codazzi-Mainardi

Escrevendo $\mathbf{C}_u = 0 = (\Omega\Lambda - \partial_v\Omega - \Lambda\Omega + \partial_u\Lambda)_{31}$, obtemos

$$\partial_v L - \partial_u M = L\Gamma_{vu}^u + M(\Gamma_{vu}^v - \Gamma_{uu}^u) - N\Gamma_{uu}^v \quad (\mathbf{M.C.1}).$$

Analogamente $\mathbf{C}_v = 0 = (\Omega\Lambda - \partial_v\Omega - \Lambda\Omega + \partial_u\Lambda)_{3v}$, donde

$$\partial_v M - \partial_u N = L\Gamma_{vv}^u + M(\Gamma_{vv}^v - \Gamma_{uv}^u) - N\Gamma_{uv}^v \quad (\mathbf{M.C.2}).$$

- **Observação:** Verifica-se que a componente 3α é igual à $\alpha 3$ e que $(\Omega\Lambda - \partial_v\Omega - \Lambda\Omega + \partial_u\Lambda)_{33} = (BW)_{vu} - (BW)_{uv} = 0$. Logo

$$(\Omega\Lambda - \partial_v\Omega - \Lambda\Omega + \partial_u\Lambda) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_u & \mathbf{A}_v & \mathbf{C}_u \\ \mathbf{B}_u & \mathbf{B}_v & \mathbf{C}_v \\ \mathbf{C}_u & \mathbf{C}_v & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (\mathbf{G.C.M.}).$$

Teorema fundamental das superfícies (preliminares) -1-

Condições de compatibilidade

Seja $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ um aberto conexo. Seja $n - 1$ campos matriciais $\Gamma_i \in \mathcal{C}^1(U; \mathbb{R}^{n \times n})$, $1 \leq i \leq n - 1$.

- Definição: as matrizes Γ_i são ditas **compatíveis** se verificam $\partial_i \Gamma_k(x) - \partial_k \Gamma_i(x) + \Gamma_i(x) \Gamma_k(x) - \Gamma_k(x) \Gamma_i(x) = 0, \forall x \in U, 1 \leq i, k \leq n - 1$. (\square)

Teorema preliminar. Sistema matricial de Pfaff

Seja $x_0 \in U$, e $F_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ fixados. Se Γ_i satisfaz (\square) então existe uma única matriz $F \in \mathcal{C}^2(U; \mathbb{R}^{n \times n})$ solução do sistema

$$\partial_i F(x) = \Gamma_i(x) F(x), \quad \forall x \in \Omega, 1 \leq i \leq n - 1,$$

com a condição limite $F(x_0) = F_0$.

- **Nota:** se $n = 2$ o sistema de Pfaff torna-se uma classica EDO.

Teorema fundamental das superfícies (preliminares) -2-

Teorema de Levi-Civita ($n \geq 3$)

Seja uma base local $\{g_\alpha, g_n\}_{1 \leq \alpha \leq n-1} := \{g_1, \dots, g_{n-1}, \nu\}$ **definida numa superfície** $S \subset \mathbb{R}^n$ **e a métrica induzida obtida como** $g_{\alpha\beta} = g_\alpha \cdot g_\beta$, $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n-1\}$. **Os símbolos de Christoffel definidos como** $\partial_\alpha g_\beta = \sum_{k=1}^n \Gamma_{\alpha\beta}^k g_k$ **verificam:**

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma = \frac{1}{2} \sum_{\tau=1}^{n-1} (\partial_\alpha g_{\beta\tau} + \partial_\beta g_{\alpha\tau} - \partial_\tau g_{\alpha\beta}) g^{\tau\sigma}, \quad 1 \leq \sigma \leq n-1 \quad (\text{L.C}).$$

DEM. Calculemos $\partial_\alpha g_{\beta\tau} = \partial_\alpha (g_\beta \cdot g_\tau) = \partial_\alpha g_\beta \cdot g_\tau + g_\beta \cdot \partial_\alpha g_\tau = \sum_\sigma (\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma g_\sigma \cdot g_\tau + g_\beta \cdot \Gamma_{\alpha\tau}^\sigma g_\sigma) = \sum_\sigma (\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma g_{\sigma\tau} + \Gamma_{\alpha\tau}^\sigma g_{\beta\sigma})$ (*). Da mesma maneira obtemos $\partial_\beta g_{\alpha\tau} = \sum_\sigma (\Gamma_{\beta\alpha}^\sigma g_{\sigma\tau} + \Gamma_{\beta\tau}^\sigma g_{\alpha\sigma})$ e enfim $\partial_\tau g_{\alpha\beta} = \sum_\sigma (\Gamma_{\tau\alpha}^\sigma g_{\sigma\beta} + \Gamma_{\tau\beta}^\sigma g_{\alpha\sigma})$. É um simples cálculo obter $\partial_\alpha g_{\beta\tau} + \partial_\beta g_{\alpha\tau} - \partial_\tau g_{\alpha\beta} = 2 \sum_\sigma \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma g_{\sigma\tau}$. Ora, basta multiplicar por $(g^{-1})_{\tau\gamma}$. Notemos que $g_{\sigma\tau} g_{\tau\gamma}^{-1} = \delta_{\sigma\gamma}$ ($= 1$ se $\sigma = \gamma$, $= 0$ senão), logo $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \delta_{\sigma\gamma} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$, logo a tese pois $g^{\tau\gamma} := (g^{-1})_{\tau\gamma}$. QED. ■

Teorema fundamental das superfícies (preliminares) -3-

• Temos $(\star) \implies (\mathbf{L.C.})$. Vale também que $(\mathbf{L.C.}) \implies (\star)$.

Com efeito, multiplicando e somando o membro a esquerda, vem

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} \Gamma_{\tau\alpha}^{\sigma} g_{\sigma\beta} &= \sum_{\sigma} \frac{1}{2} g^{\gamma\sigma} g_{\sigma\beta} (\partial_{\tau} g_{\alpha\gamma} + \partial_{\alpha} g_{\tau\gamma} - \partial_{\gamma} g_{\tau\alpha}) = \\ \sum_{\sigma} \frac{1}{2} \delta^{\gamma\beta} (\partial_{\tau} g_{\alpha\gamma} + \partial_{\alpha} g_{\tau\gamma} - \partial_{\gamma} g_{\tau\alpha}) &= \frac{1}{2} (\partial_{\tau} g_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha} g_{\tau\beta} - \partial_{\beta} g_{\tau\alpha}). \end{aligned}$$

Invertindo α e β temos também $\sum_{\sigma} \Gamma_{\tau\beta}^{\sigma} g_{\sigma\alpha} = \frac{1}{2} (\partial_{\tau} g_{\beta\alpha} + \partial_{\beta} g_{\tau\alpha} - \partial_{\alpha} g_{\tau\beta})$. Efetuando a soma, logo (\star) segue pela simetria de $g_{\alpha\beta}$.

Conexão simétrica e compatível com a métrica

Seja uma métrica $g_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n-1\}$ em $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, i.e., uma matriz simétrica e definida positiva em U . Uma conexão, i.e., uma família de símbolos de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^k$, $k \in \{1, \dots, n\}$ é dita compatível com a métrica se os símbolos $\Gamma_{\alpha\beta}^k$ e a métrica $g_{\alpha\beta}$ satisfazem a fórmula $(\mathbf{L.C.})$. Como consequência, a conexão é automaticamente simétrica, i.e., $\Gamma_{\alpha\beta}^k = \Gamma_{\beta\alpha}^k$, $\forall \alpha, \beta \in \{1, \dots, n-1\}$ e satisfaz a EDO matricial $\partial_{\tau} g_{\alpha\beta} = \sum_{\sigma} (\Gamma_{\tau\beta}^{\sigma} g_{\sigma\alpha} + \Gamma_{\tau\alpha}^{\sigma} g_{\beta\sigma})$ (\star) .

AULA 6 (7/3/2023)

Teorema fundamental das superfícies.

Teorema fundamental das superfícies -4-

♣ Recapitulando, vimos que a relação (\star) ou de maneira equivalente (L.C.) é uma hipótese sobre métrica e conexão para as mesmas serem mutualmente compatíveis.

D'outro lado, por definição dos símbolos de Christoffel, uma vez que temos uma base movél diferenciável $\{g_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq n-1}$ vale

$$\partial_\gamma(g_\alpha \cdot g_\beta) = \partial_\gamma g_\alpha \cdot g_\beta + g_\alpha \cdot \partial_\gamma g_\beta = \sum_m (\Gamma_{\gamma\alpha}^m g_m \cdot g_\beta + g_\alpha \cdot \Gamma_{\gamma\beta}^m g_m) (\star\star).$$

♣ Temos pelo teorema de Weingarten

$$\partial_\gamma(g_3 \cdot g_3) = \partial_\gamma(\nu \cdot \nu) = 2\nu \cdot \partial_\gamma \nu = -2\nu \cdot W_{\beta\gamma} g_\beta = 0.$$

$$\text{Mas, também, } \partial_\gamma(g_\alpha \cdot \nu) = \partial_\gamma g_\alpha \cdot \nu + g_\alpha \cdot \partial_\gamma \nu = \Gamma_{\gamma\alpha}^3 - W_{\alpha\gamma}.$$

Portanto obtemos, pela definição (\bullet) da matriz Γ_γ ,

$$\partial_\gamma(g_i \cdot g_j) = \sum_m (\Gamma_{\gamma i}^m (g_m \cdot g_j) + \Gamma_{\gamma j}^m (g_i \cdot g_m)) (\star\star\star), i, j, m \in \{1, 2, 3\}.$$

Para além, para generalizar (\star) , introduzimos a EDO matricial

$$\partial_\gamma g_{ij} := \sum_m (\Gamma_{\gamma i}^m g_{mj} + \Gamma_{\gamma j}^m g_{mi}) (\star\star\star), i, j, m \in \{1, 2, 3\}.$$

Teorema fundamental das superfícies -5-

♣ Suponhamos que seja dado um campo matricial $g_{\alpha\beta}$, definido em $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, simétrico e definido positivo, i.e. uma métrica, e suponhamos que o mesmo seja compatível com uma conexão, i.e., que verifica-se (\star) em U . Gostaríamos de mostrar que as matrizes $g_{\alpha\beta}$ e $g_\alpha \cdot g_\beta$ são iguais, uma vez que são ambas soluções do mesmo sistema de equações diferenciais. É o objeto do teorema seguinte:

Corolario de Levi-Civita

Sejam, em U , os campos vetoriais diferenciáveis g_α , $\alpha \in \{1, \dots, n-1\}$ associados a uma família de símbolos de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^k$ simétricos. Seja $x_0 \in U$ um ponto fixado em U e g_α^0 , $n-1$ vetores fixados. Se $g_{\alpha\beta}$ é solução de (\star) e $g_\alpha \cdot g_\beta$ é solução de $(\star\star)$ com $g_\alpha(x_0) = g_\alpha^0$, e $g_{\alpha\beta}(x_0) = g_\alpha^0 \cdot g_\beta^0$, $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n-1\}$, então vale $g_{\alpha\beta} = g_\alpha \cdot g_\beta$. A mesma conclusão vale no caso n -dimensional, i.e., se g_{ij} é solução de $(\star\star\star)$ e $g_i \cdot g_j$ solução de $(\star\star\star)$.

Teorema fundamental das superfícies -6-

DEM. Chamemos G a matriz $g_{\alpha\beta}$ e A a matriz $g_\alpha \cdot g_\beta$.
 Consideremos um intervalo de tempo I , um parâmetro $t \in I$ e a família de todas as curvas regulares e suaves em U com extremidades x_0 e $x \in U$.

Definimos as funções matriciais $t \mapsto \mathcal{G} := G \circ \gamma$ e $t \mapsto \mathcal{A} = A \circ \gamma$.

Definimos a matriz $(\Gamma_\tau)_{\alpha\beta} = \Gamma_{\tau\beta}^\alpha$, $\gamma \in \{1, 2\}$.

Por um lado, (\star) implica $\frac{d}{dt}\mathcal{G} = \sum_\tau \partial_\tau \mathcal{G} \dot{\gamma}_\tau = \sum_\tau \dot{\gamma}_\tau (\Gamma_\tau \mathcal{G} + \mathcal{G} \Gamma_\tau)$.

Por outro lado, $(\star\star)$ implica $\frac{d}{dt}\mathcal{A} = \sum_\tau \dot{\gamma}_\tau (\Gamma_\tau \mathcal{A} + \mathcal{A} \Gamma_\tau)$

(por definição dos símbolos de Christoffel).

Portanto, uma vez que \mathcal{G} e \mathcal{A} são soluções da mesma equação diferencial ordinária, com a mesma condição inicial

$g_\alpha(\gamma(0)) \cdot g_\beta(\gamma(0))$, necessariamente os campos \mathcal{G} e \mathcal{A} coincidem ao longo de γ . Logo pela arbitrariedade de γ coincidem em tudo o domínio U . QED. ■

Teorema fundamental das superfícies -7-

Lema de Poincaré

Seja $U \subset \mathbb{R}^d$ um aberto simplesmente conexo. Seja uma função vetorial $h \in \mathcal{C}^1(U; \mathbb{R}^d)$ que verifica $\text{rot } h = 0$, i.e., $\partial_j h_i = \partial_i h_j, \forall i, j \in \{1, \dots, d\}$. Então existe uma função escalar $p \in \mathcal{C}^2(U; \mathbb{R})$ tal que $h = \text{grad } p$. Qualquer outra função \tilde{p} que verifica $h = \text{grad } \tilde{p}$ satisfaz $\tilde{p} = p + Qx + v$, onde Q é uma matriz anti-simétrica e v é um vetor de \mathbb{R}^d .

- Já definimos $\Gamma_\gamma := \begin{pmatrix} (\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha)_{\alpha\beta} & -W_{\alpha\gamma} \\ b_{\gamma\alpha} & 0 \end{pmatrix}$ com $\gamma, \alpha, \beta \in \{u, v\}$
- Vimos que a condição de Gauss-Codazzi-Mainardi é uma condição necessária uma vez que temos uma superfície regular: $\Lambda\Omega + \partial_v\Omega = \Omega\Lambda + \partial_u\Lambda$ (G.C.M.). A mesma é equivalente à condição de Pfaff (\square) com $n = 3$, e com $\Gamma_1 = \Omega$ e $\Gamma_2 = \Lambda$. Vamos demonstrar que a mesma é também condição suficiente.

Teorema fundamental das superfícies -8-

Teorema fundamental das superfícies em \mathbb{R}^3

Seja o aberto simplesmente conexo $U \subset \mathbb{R}^2$. Dados 6 campos escalares E, F, G, L, M, N , de classe \mathcal{C}^1 em U , define-se a matriz simétrica e definida positiva $A = (g_{\alpha\beta})_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ e

a matriz $B = (b_{\alpha\beta})_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$. Seja uma conexão $\Gamma_{\alpha\beta}^k$

simétrica e compatível com a métrica A , i.e. dada por (L.C.) \iff (\star). Suponhamos que valem as equações de Gauss-Codazzi-Maindardi (G.C.M.). Então existe uma imersão $p : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe \mathcal{C}^3 t.q. a superfície $S := p(U)$ tem A e B como 1.^a e 2.^a formas fundamentais.

Teorema fundamental das superfícies -9-

DEM. (i) Step 1. Fixemos um $x_0 \in U$ e consideremos a matriz $g_{\alpha\beta}(x_0)$. Podemos escrever $g_{\alpha\beta}(x_0) = g_\alpha^0 \cdot g_\beta^0$, $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$ (os vetores g_β^0 podem ser obtidos tomando as linhas da matriz raiz quadrada de $g_{\alpha\beta}(x_0)$). Definimos: $g_\alpha(x_0) = g_\alpha^0$, $\alpha \in \{1, 2\}$. Uma vez que fizemos a hipótese (**G.C.M.**), pelo teorema preliminar, o sistema (de Pfaff) $\partial_\gamma \mathcal{F} = \Gamma_\gamma \mathcal{F}$, $\gamma \in \{1, 2\}$, com condição inicial $\mathcal{F}(x_0) = \left(g_1(x_0) | g_2(x_0) | \frac{g_1 \times g_2}{\|g_1 \times g_2\|}(x_0) \right)^T$, tem uma solução única de classe \mathcal{C}^2 . Seja \mathcal{F} a solução obtida.

(ii) Step 2. Ora, definimos o vetor $g_i := \mathcal{F}_{i\bullet}$ (i.e., a linha i de \mathcal{F}). Tomemos a linha α da equação $\partial_\beta \mathcal{F} = \Gamma_\beta \mathcal{F}$, i.e. $\partial_\beta g_\alpha = \sum_\sigma \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma \mathcal{F}_{\sigma\bullet} + b_{\beta\alpha} \mathcal{F}_{3\bullet} = \sum_\sigma \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma g_\sigma + b_{\beta\alpha} g_3 = \sum_k \Gamma_{\alpha\beta}^k g_k$ (\blacktriangle). Para além, por (\blacktriangle) e pela simetria da conexão e de B , temos $\partial_\beta g_\alpha = \partial_\alpha g_\beta$. Pelo Lema de Poincaré aplicado a cada componente de g_α e com $n = 2$, i.e., $\partial_\beta g_\alpha^i = \partial_\alpha g_\beta^i$, e $h = (g_\gamma^i) \in \mathbb{R}^2$,

Teorema fundamental das superfícies -10-

DEM. (cont.) $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $\gamma \in \{1, 2\}$, existe um mapa $p^i \in \mathcal{C}^3(U; \mathbb{R})$ tal que $g_\gamma^i = \partial_\gamma p^i$, logo um mapa $p \in \mathcal{C}^3(U; \mathbb{R}^3)$, onde $p = (p^i)$ tal que $g_\gamma = \partial_\gamma p$.

(iii) Step 3. Pela relação (\blacktriangle) vale ($\star\star$), i.e., $\partial_\gamma(g_\alpha \cdot g_\beta) = \sum_m (\Gamma_{\gamma\alpha}^m(g_\sigma \cdot g_\beta) + \Gamma_{\gamma\beta}^m(g_m \cdot g_\alpha))$, $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2\}$, $m \in \{1, 2, 3\}$. Também, tomando todas as 3 linhas de $\partial_\beta \mathcal{F} = \Gamma_\beta \mathcal{F}$, vale ($\star\star\star$), i.e., $\partial_\gamma(g_i \cdot g_j) = \sum_m (\Gamma_{\gamma i}^m(g_m \cdot g_j) + \Gamma_{\gamma j}^m(g_m \cdot g_i))$, $i, j, m \in \{1, 2, 3\}$.

(iv) Step 4. Demonstremos agora que $g_{\alpha\beta} = g_\alpha \cdot g_\beta = \partial_\alpha p \cdot \partial_\beta p$. Para isto, tornamos a matriz A uma matriz 3×3 definindo uma 3a linha e coluna $g_{i3} = g_{3i} = \delta_{i3} = (0|0|1)^T$. Logo pela existência de uma conexão compatível com a métrica, temos, por hipótese, $\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = \sum_\sigma (\Gamma_{\gamma\alpha}^\sigma g_{\sigma\beta} + \Gamma_{\gamma\beta}^\sigma g_{\sigma\alpha})$ (\star), $\alpha, \beta, \gamma, \sigma \in \{1, 2\}$.

Teorema fundamental das superfícies -11-

DEM. (cont.) Ora, verifiquemos que vale também seu análogo $3d$

$$\partial_\gamma g_{ij} = \sum_m (\Gamma_{\gamma i}^m g_{mj} + \Gamma_{\gamma j}^m g_{mi}) \quad (***) , i, j, m \in \{1, 2, 3\}.$$

Com efeito, de um lado temos $0 = \partial_\gamma g_{i3}$, e do outro,

$$\sum_m (\Gamma_{\gamma i}^m g_{m3} + \Gamma_{\gamma 3}^m g_{mi}) =$$

$$= \sum_m (\Gamma_{\gamma i}^m \delta_{m3} + \Gamma_{\gamma 3}^m g_{mi}) = \Gamma_{\gamma i}^3 + \sum_m \Gamma_{\gamma 3}^m g_{mi} = b_{\gamma i} -$$

$$\sum_m g_{im} W_{m\gamma} = 0 \text{ pela simetria de } A \text{ e } B \text{ e a definição}$$

$W = A^{-1}B$. Logo, o acréscimo das terceiras linhas e colunas deu

lugar a equação trivial $0 = 0$, pelo que vale $(***)$ junto com

$(***)$. Portanto, estamos nas hipóteses do corolário de

Levi-Civita e concluímos que $g_{ij} = g_i \cdot g_j$, i.e.

$$g_{\alpha\beta} = g_\alpha \cdot g_\beta = \partial_\alpha p \cdot \partial_\beta p \text{ e } g_{i3} = g_i \cdot g_3 = \delta_{i3} \text{ (lembrete: } := 1 \text{ se } i = 3, = 0 \text{ senão).}$$

Em particular deduzimos que g_α ($\alpha \in \{1, 2\}$) é ortogonal à $g_3 = \nu$.

Portanto, $g_3 = \pm \frac{g_1 \times g_2}{\|g_1 \times g_2\|}$, mas com sinal ainda indefinido.

Teorema fundamental das superfícies -12-

DEM. (cont.) **(v) Step 5.** Determinemos o sinal e demonstremos enfim que $b_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha} p \cdot \frac{\partial_1 p \times \partial_2 p}{\|\partial_1 p \times \partial_2 p\|} = \partial_{\alpha} g_{\beta} \cdot g_3$ e que p é uma imersão. Com efeito pelo step 4, temos que

$$\mathcal{F}^T \mathcal{F} = \begin{pmatrix} (g_{\alpha} \cdot g_{\beta})_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{ij} = \begin{pmatrix} (g_{\alpha\beta})_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{ij}$$

é necessariamente,

por hipótese, uma matriz definida positiva, pelo que $\det \mathcal{F}^T \mathcal{F} > 0$ e assim $\det \mathcal{F}(x) = \pm \sqrt{\det \mathcal{F}^T \mathcal{F}(x)} \neq 0, \forall x \in U$. Isto demonstra já que p é uma imersão pois que $(g_{\alpha} \cdot g_{\beta})_{\alpha\beta}$ tem rank= 2.

D'outro lado, $\det \mathcal{F}(x_0) = \det \left(g_1(x_0) | g_2(x_0) | \frac{g_1 \times g_2}{\|g_1 \times g_2\|}(x_0) \right) = (g_1^0 \times g_2^0) \cdot \frac{g_1^0 \times g_2^0}{\|g_1^0 \times g_2^0\|} = \|g_1^0 \times g_2^0\| > 0$. Sendo $\det \mathcal{F}$ uma função não nula em todos os pontos, contínua, e positiva num ponto, necessariamente, $\det \mathcal{F} > 0$ e $g_3(x) = + \frac{g_1 \times g_2}{\|g_1 \times g_2\|}(x), \forall x \in U$.

Enfim, multiplicando escalarmente (\blacktriangle) do step 2 por $g_3(x)$, vem $b_{\alpha\beta}(x) = \partial_{\beta} \partial_{\alpha} p(x) \cdot g_3(x) = \partial_{\beta} g_{\alpha}(x) \cdot \nu(x)$. QED. ■

AULA 7 (9/3/2023)

Curvaturas principais, media, de Gauss; expressão explícita de K ; caracterização dos pontos.

Curvatura normal e seccional

♣ Vimos que, por construção (fórmula de Meusnier p. 70), em cada $p \in S$,

$$\kappa_n(p) = \mathbb{I}_2(u', v') = -(u'g_u + v'g_v) \cdot (u'\partial_u\nu + v'\partial_v\nu) = -\gamma' \cdot \nu',$$

pois que $g_u \cdot \partial_u\nu = \partial_u(g_u \cdot \nu) - \partial_u g_u \cdot \nu = -L$, etc.

• **Interpretação:** Sendo L, M, N (bem como E, F, G) dadas na a superfície S , a curvatura normal κ_n da curva γ em S , apesar de ser o modulo da aceleração centrípeta, depende apenas de γ' no ponto onde for calculada, mediante a segunda forma.

Direções e curvas assintóticas

Uma curva regular numa superfície é assintótica em P se tem curvatura normal, i.e. aceleração normal (i.e., centrípeta), evanescente em P .

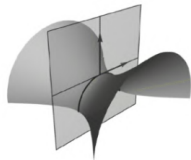
Curvatura normal e seccional

Lema.

Seja S uma superfície regular. A curvatura normal da curva $\gamma \subset S$ é igual a curvatura seccional em p , i.e., é a curvatura da curva que passa por p e se encontra contida no plano $\Pi := \langle \gamma'_p, \nu_p \rangle$. (Vê plano de corte na figura).

DEM. Seja $\eta(\tilde{s}) = S \cap \Pi$ a curva seccional, com \tilde{s} abscissa curvilínea, passando por $p = \gamma(s_0) = \eta(\tilde{s}_0)$ e t.q. $\eta'(\tilde{s}_0) = \gamma'(s_0)$. A parametrização de γ é escolhida t.q. $s_0 = \tilde{s}_0$. Sendo η' unitária, vem $\eta'(s_0) \cdot \eta''(s_0) = 0$. Ademais, sendo plana, $\eta''(s_0) \parallel \nu_p$ logo $\eta'(s_0) \cdot \nu_p = 0$, daí integrando por partes, $\kappa_n(s_0) = -\gamma'(s_0) \cdot \nu'(s_0) = -\eta'(s_0) \cdot \nu'(s_0) = \eta''(s_0) \cdot \nu(s_0)$. Sendo $\eta(\tilde{s})$ plana, logo $\eta''(s_0) = \kappa(s_0)\nu(s_0)$, onde κ é a curvatura de η em

$\tilde{s}_0 = s_0$,
a tese.
QED. ■



Curvaturas principais

♣ A curvatura normal em $P = p(u(s_0), v(s_0))$ depende apenas do vetor velocidade em P . Consideremos então uma rotação do mesmo em torno de ν . No plano de parametrização, seja então θ o ângulo entre $w'_0 := (u'(s_0), v'(s_0))$ e o eixo- u no plano uv . Seja $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tal que $\alpha \tan \theta = \beta$.

• Seja por convenção $p = \gamma(0) \in S$. Consideremos o vetor no plano $w'(0) = (\alpha, \beta) \subset A$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Lema. Forma explícita da curvatura normal

Temos $\kappa_n(\alpha, \beta) = \frac{L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2}{E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2} = \frac{L \cos^2 \theta + 2M \cos \theta \sin \theta + N \sin^2 \theta}{E \cos^2 \theta + 2F \cos \theta \sin \theta + G \sin^2 \theta}$.

DEM. Temos $w'(0) = \rho(\cos \theta, \sin \theta)$, $\rho > 0$. Sendo s abcissa curvilínea $\mathbb{I}_1[w'_0] = 1 = \rho^2(E \cos^2 \theta + 2F \sin \theta \cos \theta + G \sin^2 \theta)$.

Mas $\kappa_n = \mathbb{I}_2[w'_0] = \rho^2(L \cos^2 \theta + 2M \sin \theta \cos \theta + N \sin^2 \theta)$. O resultado segue explicitando ρ^2 e multiplicando por $\frac{\alpha^2}{\cos^2 \theta}$. QED. ■

Curvaturas principais: definição

Seja $\theta \mapsto \hat{\kappa}_n(\theta)$ contínua no intervalo fechado $[-\pi/2, \pi/2]$ atinge o seu máximo e o seu mínimo. As curvaturas principais são definidas como o mínimo e o máximo de $(\alpha, \beta) \mapsto \kappa_n(\alpha, \beta)$, nomeadamente, $\kappa_m := \kappa_n(\alpha_m, \beta_m)$ e $\kappa_M := \kappa_n(\alpha_M, \beta_M)$.

Curvatura média e de Gauss

Definimos agora a curvatura média H e a curvatura de Gauss K em $p \in S$:

$$\begin{cases} 2H := \kappa_m + \kappa_M \\ K := \kappa_m \kappa_M \end{cases} \quad (**)$$

- Portanto κ_m e κ_M são solução de $k^2 - 2Hk + K = 0$, i.e.,

$$\kappa_{m,M} = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Teorema. Expressão extrínseca das curvaturas principais

As expressões extrínsecas das curvaturas média e de Gauss são dadas por

$$(\star\star\star) \begin{cases} 2H = \kappa_m + \kappa_M = \frac{EN+GL-2FM}{EG-F^2} = \text{tr } W \\ K = \kappa_m \kappa_M = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{\det \mathbb{I}_2}{\det \mathbb{I}_1} = \det W \end{cases} .$$

As curvaturas principais são os valores próprios de W . As mesmas bem como K e H são invariantes por mudança de coordenadas.

DEM. Calculemos os pontos críticos de $(\alpha, \beta) \mapsto \kappa_n(\alpha, \beta)$. Para isto, escrevemos $\kappa_n = \frac{B:=L\alpha^2+2M\alpha\beta+N\beta^2}{A:=E\alpha^2+2F\alpha\beta+G\beta^2}$, logo nos pontos críticos

temos $\frac{\partial \kappa_n}{\partial \alpha} = 0 = \frac{\partial \kappa_n}{\partial \beta}$, logo, multiplicando por $A \neq 0$,

$B_{,\alpha}/A - (BA_{,\alpha})/A^2 = 0 = B_{,\beta}/A - (BA_{,\beta})/A^2$, i.e.,

$B_{,\alpha} - \kappa_n A_{,\alpha} = 0 = B_{,\beta} - \kappa_n A_{,\beta}$.

Portanto, $\frac{\partial}{\partial \alpha}(B - \kappa_n A) = 0 = \frac{\partial}{\partial \beta}(B - \kappa_n A)$. Então temos de resolver

DEM. (cont.) $\begin{cases} \alpha(L - \kappa_n E) + \beta(M - \kappa_n F) = 0 \\ \alpha(M - \kappa_n F) + \beta(N - \kappa_n G) = 0 \end{cases}$. A única

solução não trivial satisfaz $\det \begin{pmatrix} L - \kappa_n E & M - \kappa_n F \\ M - \kappa_n F & N - \kappa_n G \end{pmatrix} = 0$, i.e.,

$$\kappa_n^2(EG - F^2) + \kappa_n(EN + GL - 2FM) - (LN - M^2) = 0,$$

obtemos $(\star\star\star)$, tomando em conta $(\star\star)$.

A expressão em termos de $W := A^{-1}B$ segue de

$$W = \frac{1}{\det A}(\text{cof } A)B = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}. \text{ Pela}$$

igualdade dos valores próprios de W e \tilde{W} , temos invariância das curvaturas principais e portanto de K e H perante uma mudança arbitrária de coordenadas. QED. ■

• O corolário do teorema de Weingarten pode ser reformulado na forma seguinte: $\{\partial_u\nu, \partial_v\nu\}$ são linearmente dependentes sse $K = \det W = 0$.

• No caso ortonormado temos $F = M = 0$ e portanto

$$W = \begin{pmatrix} L/E & \\ & N/G \end{pmatrix}. \text{ Logo}$$

$$k_m = \frac{L}{E} \leq k_M = \frac{N}{G}.$$

Lema. Invariança sob isometrias

A curvatura de Gauss K e a curvatura média H são invariante sob isometria de \mathbb{R}^3 (i.e., roto-translações).

DEM. Sob uma isometria, $\tilde{p} = Qp + c$ com Q uma matriz ortogonal ($\det Q = \pm 1$) e c um vetor constante. Logo (g_u, g_v) e $(\partial_u\nu, \partial_v\nu)$ transformam-se nos vetores $(Qg_u, Qg_v) = (\tilde{g}_u, \tilde{g}_v) := (\partial_u\tilde{p}, \partial_v\tilde{p})$ e $(\partial_u\tilde{\nu}, \partial_v\tilde{\nu})$, onde $\tilde{\nu} := Q\nu$ verifica $\tilde{\nu} \cdot \tilde{g}_\alpha = 0$ e $\|\tilde{\nu}\| = 1$.

O mapa de Weingarten (ou operador de forma)

Logo $\tilde{E} := \tilde{g}_u \cdot \tilde{g}_u = Qg_u \cdot Qg_u = Q^T Q E = E$, $\tilde{L} = -\tilde{g}_u \cdot \partial_u \tilde{\nu} = -Qg_u \cdot Q\partial_u \nu = Q^T Q L = L$, etc. A tese segue de $(\star\star)$. QED. ■

Mapa de Weingarten

O mapa de Weingarten $\mathcal{W} : T_p S \rightarrow T_p S$ é definido de tal maneira que $\mathcal{W}X = \mathcal{W}(x_\alpha g_\alpha) = W_{\beta\alpha} x_\alpha g_\beta = ((g_u | g_v) \mathcal{W}) \mathbf{x}$, onde

$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_u \\ x_v \end{pmatrix}$ e $X = (g_u | g_v) \mathbf{x} = x_u g_u + x_v g_v = x_\alpha g_\alpha$.

Este mapa é auto-adjuncto, i.e.

$$g(\mathcal{W}X, Y) = g(X, \mathcal{W}Y),$$

uma vez que $g(X, Y) = \mathbb{I}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, logo

$$\mathbb{I}_1(\mathcal{W}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}^T A \mathcal{W}\mathbf{x} = \mathbf{y}^T B\mathbf{x} = \mathbb{I}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =: \mathcal{L}(X, Y),$$

logo é auto-adjuncto, pela simetria de \mathbb{I}_2 .

- **Nota:** a relação $g(\mathcal{W}X, Y) =: \mathcal{L}(X, Y)$ é às vezes tomada como definição da segunda forma fundamental.
- Para além, a identidade $\mathbb{I}_2(X, Y) = \mathbb{I}_1(WX, Y)$, pode ser obtida pela relação $d\nu = -\mathcal{W}dp$, com efeito (aqui \cdot está para o produto interno Euclidiano de \mathbb{R}^3),

$$-d\nu \cdot dp(X, Y) = \mathcal{W}dp[X] \cdot dp[Y] = dp[Y] \cdot dp[\mathcal{W}X] = dp \cdot dp(\mathcal{W}X, Y).$$

- Pelo seu carácter auto-adjuncto, existe uma base do plano tangente tal que a matriz W se encontre simétrica. Logo, existe uma transformação ortogonal do plano Q tal que

$$QWQ^T = \Lambda = \begin{pmatrix} \kappa_m & 0 \\ 0 & \kappa_M \end{pmatrix}. \text{ Seja } (\tilde{u}|\tilde{v})^T = Q(u|v)^T.$$

- A fórmula de Weingarten re-escreve-se:

$$\begin{aligned} (\partial_{\tilde{u}}\nu | \partial_{\tilde{v}}\nu)_p &= (\partial_u\nu | \partial_v\nu)_p Q^T = -(g_u | g_v)_p W Q^T = -(g_{\tilde{u}} | g_{\tilde{v}})_p QWQ^T \\ &= (\kappa_m g_{\tilde{u}} | \kappa_M g_{\tilde{v}})_p. \end{aligned}$$

Essas relações definem as **direções principais** em p :

$$e_M(p) := g_{\tilde{u}}(p) \text{ e } e_m(p) := g_{\tilde{v}}(p).$$

Linhas de curvatura (definição)

Uma curva $\gamma \in S$ tal que $\forall p \in \gamma$, γ'_p é paralelo á $e_M(p)$ ou $e_m(p)$ é chamada **linea de curvatura (ou linha principal)**.

Lema. (Olinde Rodrigues)

Seja $C = \gamma[I]$ uma curva regular. Então C é uma linha principal se e somente se $\dot{\nu} = -k\dot{\gamma}$, onde k é uma curvatura principal.

DEM. Seja $(\dot{u}|\dot{v})$ uma direção principal, associada a curvatura principal k . Por Weingarten temos $\dot{\nu} = (\partial_u \nu | \partial_v \nu)(\dot{u}|\dot{v})^T = -(g_u | g_v)W(\dot{u}|\dot{v})^T = -k(g_u | g_v)(\dot{u}|\dot{v})^T$, com $\dot{\gamma} = (g_u | g_v)(\dot{u}|\dot{v})^T$. QED. ■

Equação das linhas principais

Temos $W = \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ -FL + EM & -FM + EN \end{pmatrix}$. Logo,

$W(\dot{u}|\dot{v})^T = k(\dot{u}|\dot{v})^T$ re-escreve-se como

$$\begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ -FL + EM & -FM + EN \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = (EG - F^2)k \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}, \text{ i.e.,}$$

$$\begin{cases} (GL - FM)\dot{u} + (GM - FN)\dot{v} = k(EG - F^2)\dot{u} \\ (-FL + EM)\dot{u} + (-FM + EN)\dot{v} = k(EG - F^2)\dot{v} \end{cases},$$

logo, multiplicando a primeira linha por \dot{v} e a segunda por \dot{u} e subtraíndo, vem

$$(-FL + EM)\dot{u}^2 - (GM - FN)\dot{v}^2 + (-GL + EN)\dot{u}\dot{v} = 0, \text{ i.e.,}$$

$$\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & -\dot{u}\dot{v} & \dot{u}^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Derivada direccional do campo das normais

♣ Definimos $D\nu := (\partial_u\nu | \partial_v\nu)$ e seja uma direcção do plano tangente $X := x_u g_u + x_v g_v = (g_u | g_v)x$ onde $x := \begin{pmatrix} x_u \\ x_v \end{pmatrix}$. O gradiente de ν é definido como

$\nabla\nu = D\nu \begin{pmatrix} g_u \\ g_v \end{pmatrix} = \partial_u\nu \otimes g_u + \partial_v\nu \otimes g_v$. Seja γ uma curva na superfície. A derivada direccional de ν na direcção $X = \gamma'(0)$ é o vetor do plano tangente

$$D_X\nu := \frac{d}{dt}\nu(u(t), v(t))|_{t=0}, \quad X = \dot{\gamma}(0) = \dot{u}(0)g_u + \dot{v}(0)g_v, \quad \text{i.e.,}$$

$$D_X\nu = D\nu \begin{pmatrix} \dot{u}(0) \\ \dot{v}(0) \end{pmatrix} = (D\nu)x = -(g_u | g_v)Wx = -\mathcal{W}X.$$

- Podemos então definir a segunda forma fundamental como o operador bilinear e auto-adjuncto $\mathcal{L} : T_pS \times T_pS \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}(X, Y) := g(-D_X \nu, Y) = g(WX, Y).$$

Caracterização de pontos

Seja $p \in S$. Calcule $K(p) = \det W(p)$. O ponto p é dito:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Elítico} & \text{se } K(p) > 0, \\ \text{Hiperbólico} & \text{se } K(p) < 0 \\ \text{Parabólico} & \text{se } K(p) = 0 \text{ e } \mathbb{I}_2 \neq 0 \\ \text{Plano} & \text{se } \mathbb{I}_2 = 0 \\ \text{Umbilical} & \text{se } K(p) > 0 \text{ e } \kappa_m = \kappa_M \end{array} \right. .$$

• **Exemplos:** O cilindro tem todos seus pontos parabólicos, na esfera são todos umbilicais.

• Se $K \neq 0$, então $e_1 \neq e_2$ e $e_1 \cdot e_2 = 0$, pelo que o referencial é ortonormado; logo neste referencial, chamado referencial das curvaturas principais, $F = M = 0$, e portanto $\kappa_m = \frac{L}{E}$ e $\kappa_M = \frac{N}{G}$.

AULA 8 (14/3/2023)

Análise de casos; expressão explícita dos símbolos de Christoffel e de K ; teorema "Egregium" de Gauss.

Lema.

Uma superfície regular e compacta admite pelo menos um ponto elítico.

DEM. Sendo S compacta é um conjunto limitado, logo contido numa bola de raio r . Tomemos o infimo de tais raios, $\inf r =: R$ logo a bola de raio R é tangente à S em p . Por construção os raios de curvatura de S em p são menores que R , logo as curvaturas principais são maiores do que $1/R > 0$. QED. ■

Lema. Caso das curvaturas iguais (e constantes)

Num ponto umbilical temos (i) $K = H^2$; (ii)

$\exists \alpha \in \mathbb{R}_* : W = \alpha \mathbb{I}$. (iii) Para além, se em todos os pontos de S vale $\kappa_M = \kappa_m$, então S é uma porção de esfera ou de plano.

└ A.2. Geometria extrínseca das superfície

└ A.2.4. As várias noções de curvatura

DEM. (ii) já foi demonstrado e (i) segue de $\kappa_m = \kappa_M = \kappa = H + \sqrt{H^2 - K} = H - \sqrt{H^2 - K}$. (iii) Pelo teorema de Weingarten com $W = \kappa \mathbb{I}$ temos $\kappa \partial_{\tilde{u}} p + \partial_{\tilde{u}} \nu = 0$ (W1) e $\kappa \partial_{\tilde{v}} p + \partial_{\tilde{v}} \nu = 0$ (W2). Derivando em relação a \tilde{v} e \tilde{u} e sendo que $\partial_{\tilde{u}\tilde{v}} \nu - \partial_{\tilde{v}\tilde{u}} \nu = 0 = \partial_{\tilde{u}\tilde{v}} p - \partial_{\tilde{v}\tilde{u}} p$, vem $\partial_{\tilde{u}} \kappa g_{\tilde{v}} = \partial_{\tilde{v}} \kappa g_{\tilde{u}}$, pelo que $\kappa = \text{cst}$, uma vez que $g_{\tilde{u}} \perp g_{\tilde{v}}$. Ora, se $\kappa = 0$ então $\nu = \text{cst}$ e $p(u, v) \perp \nu$, logo S é contida num plano. Suponhamos $\kappa \neq 0$. Logo vem $\partial_{\tilde{u}} (\kappa p + \nu) = 0$ e $\partial_{\tilde{v}} (\kappa p + \nu) = 0$. Portanto $p + (1/\kappa)\nu = \text{cst} = p_0$, i.e., $\|p - p_0\| = |1/\kappa| = \text{cst}$, i.e., p é esférico. QED. ■

Lema. Caso das curvaturas constantes (não iguais)

Uma superfície onde K e H são constantes com $K \neq H^2$ é uma porção de um cilindro circular.

DEM. Sendo que $K \neq H^2$ sabemos que $\kappa_m \neq \kappa_M$ são constantes. Suponhamos $\kappa_M \neq 0$ (mas κ_m pode ser 0). Por Weingarten $\partial_u \nu = -\kappa_M g_u$ e $\partial_v \nu = -\kappa_m g_v$, logo diferenciando, $\partial_v \partial_u \nu = \partial_u \partial_v \nu = -\kappa_M \partial_v g_u = -\kappa_m \partial_u g_v = -\kappa_M \partial_v \partial_u p = -\kappa_m \partial_u \partial_v p$. Ora, $\kappa_m \neq \kappa_M$ e portanto $\partial_u \partial_v p = 0$ e então $p(u, v) = a(u) + b(v)$. Sendo regular, vale $a'(u) \neq 0$ e $b'(v) \neq 0$, podemos supor que $a'(u) \cdot a'(u) = 1$ e $b'(v) \cdot b'(v) = 1$. Então valem $a''(u) \perp a'(u)$ e $b''(v) \perp b'(v)$. Uma vez que $0 = F = g_u \cdot g_v = a'(u) \cdot b'(v), \forall u, v (\Delta)$, diferenciando em ordem u sai $b'(v) \cdot a''(u) = 0$, logo deduzimos que $a''(u) \perp b'(v)$, e portanto $a''(u)$ é paralelo à $\nu(u, v) = a'(u) \times b'(v)$. Sendo a aceleração da linha de curvatura $u \mapsto a(u)$ paralela à ν , é uma aceleração normal, logo por Frenet-Serret, $\|a''(u)\| = \kappa_M$ ou $= \kappa_m$. Mas também, pelo mesmo raciocínio, $\|b''(v)\| = \kappa_m$ ou $= \kappa_M$. Suponhamos $\|a''(0)\| = \kappa_M > 0$: isto significa que para u perto de 0, $a'(0)$ é linearmente independente de $a''(u)$, uma vez que a linha tem curvatura não nula neste ponto.

Pela relação (Δ) , temos $b'(v) \perp a'(0), \forall v$ e para os tais u na vizinhança de 0, $b'(v) \perp a'(u), \forall v$. Portanto, $\exists \alpha(v) \in \mathbb{R}$:
 $b'(v) = \alpha(v) a'(0) \times a'(u), \forall v$. D'outro lado, já sabemos que $b''(v) = \alpha'(v) a'(0) \times a'(u)$ é ortogonal à $b'(v) = \alpha(v) a'(0) \times a'(u)$, dois vetores paralelos, logo necessariamente $\alpha'(v) = 0$, i.e., $b''(v) = 0$, i.e., $b'(v) = \text{cst} = z$ e portanto $b(v) = zv + z_0$, com $z \perp a'(u), \forall u$ na vizinhança de 0. Então, $p(u, v) = a(u) + zv + z_0$, i.e. trata-se dum cilindro em torno do eixo com orientação z e com base a porção de curva $a(u)$, uma vez que esta última é ortogonal ao vetor constante z . Sendo que a velocidade da curva $a'(u)$ é ortogonal à um vetor constante numa vizinhança de 0, necessariamente a porção de curva é plana situada num plano com normal ν . A outra curvatura principal κ_m é constantemente nula, por ser a curvatura da reta $zv + z_0$. Para além, a porção de curva tem raio de curvatura constante igual à κ_M^{-1} , logo a superfície é uma porção de cilindro circular. QED. ■

Rumo a expressão explícita da conexão e da curvatura de Gauss

- Lembramo-nos da definição:

$$E := g_u \cdot g_u, G = g_v \cdot g_v, F = g_u \cdot g_v.$$

- D'outro lado,

$$\partial_u g_u = \Gamma_{11}^1 g_u + \Gamma_{11}^2 g_v + \Gamma_{11}^3 \nu, \quad \partial_u g_v = \Gamma_{12}^1 g_u + \Gamma_{12}^2 g_v + \Gamma_{12}^3 \nu,$$

$$\partial_v g_u = \partial_u g_v \text{ e } \partial_v g_v = \Gamma_{22}^1 g_u + \Gamma_{22}^2 g_v + \Gamma_{22}^3 \nu$$

- Logo, $\frac{1}{2} \partial_u E = g_u \cdot \partial_u g_u = E \Gamma_{11}^1 + F \Gamma_{11}^2$.

- Alem disto, $F \Gamma_{11}^1 + G \Gamma_{11}^2 = \partial_u g_u \cdot g_v = \partial_u (g_u \cdot g_v) - \partial_u g_v \cdot g_u = \partial_u (g_u \cdot g_v) - \partial_v g_u \cdot g_u = \partial_u (g_u \cdot g_v) - \frac{1}{2} \partial_v (g_u \cdot g_u) = \partial_u F - \frac{1}{2} \partial_v E$.

- Similarmente, $\frac{1}{2} \partial_u E = E \Gamma_{11}^1 + F \Gamma_{11}^2$ $\frac{1}{2} \partial_v G = F \Gamma_{22}^1 + G \Gamma_{22}^2$,

$$\frac{1}{2} \partial_v E = E \Gamma_{12}^1 + F \Gamma_{12}^2, \quad \frac{1}{2} \partial_u G = F \Gamma_{12}^1 + G \Gamma_{12}^2,$$

- Enfim, $E \Gamma_{22}^1 + F \Gamma_{22}^2 = \partial_v F - \frac{1}{2} \partial_u G$.

Expressão explícita dos símbolos de Christoffel

♣ Seja a matriz $\Gamma := \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix}$.

• Re-escrevemos matricialmente os cálculos acima como:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_u E & \partial_v E & 2\partial_v F - \partial_u G \\ 2\partial_u F - \partial_v E & \partial_u G & \partial_v G \end{pmatrix},$$

pelo que obtem-se

$$\Gamma = \frac{1}{2(EG - F^2)}$$

$$\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_u E & \partial_v E & 2\partial_v F - \partial_u G \\ 2\partial_u F - \partial_v E & \partial_u G & \partial_v G \end{pmatrix} \quad (***)$$

♣ Agora, podemos enunciar e provar o "grande" teorema de Gauss:

Teorema Egregium de Gauss

Teorema de Gauss - expressão intrínseca da curvatura

A curvatura de Gauss $K := \frac{\det \mathbb{I}_2}{\det \mathbb{I}_1}$ em $p \in S$ depende apenas de E, F e G e das suas derivadas tangenciais. Sendo que não depende de ν , é uma quantidade intrínseca à superfície. Em outras palavras, duas superfícies isométricas têm a mesma curvatura de Gauss.

• **Observação:** Ao contrário, a curvatura média não é uma quantidade intrínseca, pois depende da imersão em \mathbb{R}^3 (i.e., de ser uma sub-variedade de \mathbb{R}^3), i.e., depende do campo das normais ν . Por exemplo o cilindro e o plano são intrinsecamente iguais mas têm curvaturas médias diferentes.

DEM. Obtivemos as componentes $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2\}$, em termos de E, F e G e suas derivadas tangenciais. Faltam $L := \Gamma_{11}^3, M := \Gamma_{12}^3$ e $N := \Gamma_{22}^3$.

Demonstração do teorema de Gauss

DEM. É suficiente mostrar que $\det \mathbb{I}_2 = LN - M^2$ pode ser expressido apenas em termos de E, F e G e suas derivadas tangenciais. Calculemos $\partial_{uv}g_u \cdot g_v = \partial_v(\partial_u g_u \cdot g_v) - \partial_u g_u \cdot \partial_v g_v = \partial_v(\partial_u F - \frac{1}{2}\partial_v E) - \partial_u g_u \cdot (\Gamma_{vv}^u g_u + \Gamma_{vv}^v g_v + \Gamma_{vv}^3 \nu) = \partial_v(\partial_u F - \frac{1}{2}\partial_v E) - \frac{\Gamma_{vv}^u}{2}\partial_u E - \Gamma_{vv}^v(\partial_u F - \frac{1}{2}\partial_v E) - LN = \partial_v(\partial_u F - \frac{1}{2}\partial_v E) - \frac{\partial_u E}{4(EG-F^2)}(G(2\partial_v F - \partial_u G) - F\partial_v G) - \frac{\partial_v G}{2(EG-F^2)}E(\partial_u F - \frac{1}{2}\partial_v E) - LN$ (●).

D'outro lado $\partial_{uv}g_u \cdot g_v = \partial_{vu}g_u \cdot g_v = \partial_u(\partial_v g_u \cdot g_v) - \partial_u g_u \cdot \partial_v g_v = \frac{1}{2}\partial_u^2 G - \frac{E(\partial_u G)^2}{4(EG-F^2)} - \frac{2F\partial_v E\partial_u G + G(\partial_v E)^2}{4(EG-F^2)} - M^2$ (●●).

Ora, efetuando (●●) - (●), logo vem

$$\det \mathbb{I}_2 = LN - M^2 = -\frac{\partial_u^2 G}{2} + \frac{E(\partial_u G)^2}{4(EG-F^2)} + \mathcal{F}(\partial_\alpha E, \partial_\alpha F, \partial_\alpha G),$$

($\alpha \in \{u, v\}$). Portanto vê-se que $\det \mathbb{I}_2$ e então K depende apenas de E, F e G e das suas derivadas tangenciais, a tese. QED. ■

Demonstração alternativa do teorema egregium

- Lembramo-nos das equações de Gauss, e re-escrevemos $\mathbf{A} = 0$ (cf. p. 75 & 76) como

$$\partial_v \Gamma_{uu}^u - \partial_u \Gamma_{vu}^u + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^u - \Gamma_{vu}^v \Gamma_{uv}^u = LW_{uv} - MW_{uu}$$

com o lado esquerda dependente apenas de E, F, G e suas derivadas, por $(\star \star \star)$.

- D'outro lado temos

$$W = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix},$$

e portanto

$$\begin{aligned} \partial_v \Gamma_{uu}^u - \partial_u \Gamma_{vu}^u + \Gamma_{uu}^v \Gamma_{vv}^u - \Gamma_{vu}^v \Gamma_{uv}^u &= \frac{(L(\cancel{GM} - FN) - M(\cancel{GL} - FM))}{EG - F^2} \\ &= \frac{-F(LN - M^2)}{EG - F^2} = -F \frac{\det B}{\det A} = -FK, \end{aligned}$$

logo K depende apenas de E, F, G e das suas derivadas. QED. ■

♣ calculando K mediante esta fórmula no caso ortonormado, i.e., $F = 0$ obtemos (verificar em casa mediante manipulação de ((••)-(•)) na demonstração do teorema de Gauss):

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\partial_v \left(\frac{\partial_v E}{\sqrt{EG}} \right) + \partial_u \left(\frac{\partial_u G}{\sqrt{EG}} \right) \right).$$
 Logo temos

$$-2EGK = \partial_{vv}E + \partial_{uu}G + \mathcal{F}(u, v)\partial_v E + \mathcal{G}(u, v)\partial_u G \quad (\Delta),$$
 onde \mathcal{F} e \mathcal{G} dependem de u, v através de $E, \partial_\alpha E, G, \partial_\alpha G$ ($\alpha \in \{u, v\}$).

• **Lembramos:**

$$\Gamma = \frac{1}{2(EG - F^2)}$$

$$\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_u E & \partial_v E & 2\partial_v F - \partial_u G \\ 2\partial_u F - \partial_v E & \partial_u G & \partial_v G \end{pmatrix} \quad (***)$$

• No caso $F = M = 0$, re-escrevemos, mediante (***), as equações de Mainardi-Codazzi em termos das curvaturas principais: $\partial_v L = L\Gamma_{uv}^u - N\Gamma_{uu}^v = \frac{\partial_v E}{2} \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G} \right) = \frac{\partial_v E}{2} (\kappa_m + \kappa_M)$
e $\partial_u N = -L\Gamma_{vv}^u + N\Gamma_{uv}^v = \frac{\partial_u G}{2} \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G} \right) = \frac{\partial_u G}{2} (\kappa_m + \kappa_M).$

AULA 9 (16/3/2023)

Rigidez da esfera; geodésicas. Propriedades variacionais das geodésicas; coordenadas geodésicas; métrica geodésica.

♣ O lema seguinte servirá na demonstração da rigidez da esfera:

Lema

Nos pontos críticos de k_m e k_M temos ou $k_m = k_M$ ou $(k_M - k_m)EGK = -E\partial_{vv}k_m + G\partial_{uu}k_M$.

DEM. No referencial das curvaturas principais, $k_m = L/E$ e $k_M = N/G$, e $F = M = 0$, logo segue de Mainardi-Codazzi que $\partial_v L = \frac{\partial_v E}{2}(\kappa_m + \kappa_M)$ e $\partial_u N = \frac{\partial_u G}{2}(\kappa_m + \kappa_M)$. Introduzindo as mesmas nas relações $\partial_v(Ek_m) = \partial_v L$ e $\partial_u(Nk_M) = \partial_u G$, obtemos $E\partial_v k_m = \frac{\partial_v E}{2}(k_M - k_m)$, e $G\partial_u k_M = \frac{\partial_u G}{2}(k_m - k_M)$. Mas, $\partial_v k_m = 0 = \partial_u k_M$, logo $k_M = k_m$ ou $\partial_v E = 0 = \partial_u G$. Caso $k_M \neq k_m$, vem $\partial_v E = \frac{2E}{k_M - k_m}\partial_v k_m$ e $\partial_u G = -\frac{2G}{k_M - k_m}\partial_u k_M$. Derivando mais uma vez, vem $\partial_{vv}E = \frac{2E}{k_M - k_m}\partial_{vv}k_m$ e $\partial_{uu}G = -\frac{2G}{k_M - k_m}\partial_{uu}k_M$, uma vez que $\partial_v E = 0 = \partial_u G$. O resultado segue de (Δ) p.117:
 $-2EGK = \partial_{vv}E + \partial_{uu}G + \mathcal{F}(u, v)\partial_v E + \mathcal{G}(u, v)\partial_u G$. QED. ■

Teorema

Seja S uma superfície regular, conexa, compacta e sem bordo. Se S tem K constante, então S é uma esfera.

DEM. Sendo regular e compacta, sabemos que S admite um ponto elítico, logo sendo K constante, temos $K = k_m k_M > 0$, i.e., k_m é uma função decrescente de k_M . Sendo compacta, k_m um mapa contínuo e $\partial S = \emptyset$, k_m admite um mínimo e k_M um máximo em $P \in S$. Logo, $\partial_{vv} k_m(P) \geq 0$ e $\partial_{uu} k_M(P) \leq 0$. Pelo lema acima, $(k_M - k_m) EGK \leq 0$. Mas $EGK > 0$, logo $k_M(P) = k_m(P)$. Para um ponto qualquer $Q \in S$, temos $k_M(P) \geq k_M(Q) \geq k_m(Q) \geq k_m(P) = k_M(P)$, donde $k_M(Q) = k_m(Q)$, $\forall Q \in S$, logo todos os pontos são umbilicais. Pelo lema anterior, S é ou uma porção de esfera ou um plano, mas como $K > 0$, deve ser contido numa esfera. Ora, S é topologicamente fechado por ser compacto, e por ser regular existe um homeomorfismo local $\forall P \in S$ num aberto de \mathbb{R}^2 , logo S é topologicamente aberto. Sendo aberto, fechado, conexo e contido numa esfera, tem de ser uma esfera. QED. ■

- **Nota:** se $U \subset X$ é conexo, é contido numa componente conexa $V \subset X$; logo, $V = U \cup (V \setminus U)$, onde U e $V \setminus U$ são abertos.

Corolário

Seja S uma superfície regular, conexa, compacta e sem bordo. Se S tem $K > 0$ e H constante, então S é uma esfera.

DEM. A demonstração é idêntica à anterior, pois que H constante implica que k_m é uma função decrescente de k_M . QED. ■

Teorema. Um teorema global: a rigidez da esfera

Seja Σ uma superfície regular, conexa e compacta. Se Σ é homeomorfo e isométrico a uma esfera, Σ é uma esfera.

DEM. Seja o homeomorfismo $\varphi : S \rightarrow \Sigma$ uma isometria da esfera S em $\Sigma = \varphi(S)$, logo Σ tem a mesma curvatura que S , $K = \text{cst}$. Sendo φ contínuo e S conexo, compacto e sem bordo, Σ é conexa, compacta e sem bordo. A tese segue do teorema anterior. QED. ■

Equações cinémáticas das curvas geodésicas

- O termo "rigidez" vem da mecânica, pois uma esfera feita num material flexível mas não elástico não pode ser deformada, uma vez que sem elasticidade não há possibilidade nem de extensão nem de contracção das fibras, pelo que a deformação deve ser isométrica.

♣ Já vimos as equações das geodésicas

$$\begin{cases} \ddot{u} + \sum_{\alpha,\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^u \dot{w}_\alpha \dot{w}_\beta = 0 \\ \ddot{v} + \sum_{\alpha,\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^v \dot{w}_\alpha \dot{w}_\beta = 0 \end{cases} \quad (\star) \text{ com } \dot{w} = (\dot{u}, \dot{v}).$$

Ora, gostaríamos de explicitá-las mediante a relação que obtivemos:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u & \Gamma_{uv}^u & \Gamma_{vv}^u \\ \Gamma_{uu}^v & \Gamma_{uv}^v & \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_u E & \partial_v E & 2\partial_v F - \partial_u G \\ 2\partial_u F - \partial_v E & \partial_u G & \partial_v G \end{pmatrix} \quad (\star\star\star).$$

Equações cinématicas das curvas geodésicas

Calculando, obtemos então

$$\begin{cases} E\ddot{u} + F\ddot{v} = -\frac{1}{2} \left(\partial_u E\dot{u}^2 + \partial_v E\dot{u}\dot{v} + 2\partial_v F\dot{v}^2 - \partial_u G\dot{v}^2 \right) \\ F\ddot{u} + G\ddot{v} = -\frac{1}{2} \left(2\partial_u F\dot{u}^2 - \partial_v E\dot{u}^2 + \partial_u G\dot{u}\dot{v} + \partial_v G\dot{v}^2 \right). \end{cases}$$

De outro lado temos

$$\begin{cases} E\ddot{u} + F\ddot{v} = \frac{d}{dt} (E\dot{u} + F\dot{v}) - \partial_u E\dot{u}^2 - \partial_v E\dot{u}\dot{v} - \partial_u F\dot{u}\dot{v} - \partial_v F\dot{v}^2 \\ F\ddot{u} + G\ddot{v} = \frac{d}{dt} (F\dot{u} + G\dot{v}) - \partial_u F\dot{u}^2 - \partial_v F\dot{u}\dot{v} - \partial_u G\dot{u}\dot{v} - \partial_v G\dot{v}^2. \end{cases}$$

- Portanto as equações das geodésicas são

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (E\dot{u} + F\dot{v}) = \frac{1}{2} \left(\partial_u E\dot{u}^2 + 2\partial_u F\dot{u}\dot{v} + \partial_u G\dot{v}^2 \right) \\ \frac{d}{dt} (F\dot{u} + G\dot{v}) = \frac{1}{2} \left(\partial_v E\dot{u}^2 + 2\partial_v F\dot{u}\dot{v} + \partial_v G\dot{v}^2 \right). \end{cases} \quad (\star\star)$$

Lema.

Uma superfície regular é localmente um gráfico.

DEM. Seja $p : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, $(u, v) \mapsto p(u, v) = (x, y, z) = (p_1(u, v), p_2(u, v), p_3(u, v))$. Por convenção, escolhemos $P = (p_1(0, 0), p_2(0, 0), p_3(0, 0)) = (0, 0, 0)$ como origem do plano tangente $T_p S \equiv \{(x, y)\}$. Seja $\mathbb{P}(u, v) = p - (p \cdot \nu)\nu$, a projeção de $p \in S$ em $T_p S$. Sendo p regular, é invertível localmente em P , donde $z = p_3(u, v) = p_3 \circ \mathbb{P}^{-1}(x, y) = f(x, y)$. QED. ■

Corolário. Existência e unicidade de geodésicas

Para cada $p \in S$ e um vetor arbitrário $\dot{\gamma} \in T_p S$, existe localmente uma única geodésica em P com velocidade $\dot{\gamma}$.

Para além, em P existe uma métrica Euclideana.

Esta métrica é chamada métrica géodesica.

DEM. Acabamos de introduzir uma aplicação do plano tangente em p em S , i.e. $p : (x, y) \in T_p S \mapsto (x, y, f(x, y)) \in S$. Uma vez que o plano é tangente, por definição $\partial_x f(0, 0) = \partial_y f(0, 0) = 0$; d'outro lado $f(0, 0) = 0$ por convenção, e então $e_1 := \partial_x p(0, 0) = (1, 0, 0)$, $e_2 := \partial_y p(0, 0) = (0, 1, 0)$. Logo, $\forall \dot{\gamma} \in T_p S$, $\exists \xi, \eta \in \mathbb{R}_*$ t.q. $\dot{\gamma} = \xi e_1 + \eta e_2$. Tome $u = x$ e $v = y$, localmente em $T_p S$. Ora, basta resolver o sistema (★★) com as condições iniciais $(\dot{x}, \dot{y})(0) = (\xi, \eta)$ e $(x, y)(0) = (0, 0)$. A solução é única num intervalo de tempo I , e $(x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ é a única geodésica pretendida. Em P , vale $E = G = 1$ e $F = 0$, pelo que a métrica é Euclideana. QED. ■

♣ Lembramo-nos das equações das geodésicas

$$\ddot{w}^\sigma + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \dot{w}^\alpha \dot{w}^\beta = 0 \quad (\star).$$

Geodésicas como curvas otimizadas -1-

♣ Vamos mostrar que (★) (ou (☆) p.122) representam as equações de Euler-Lagrange do problema variacional

$$\text{MIN} \int_a^b ds(t) :$$

i.e., minimizar o comprimento de uma curva entre dois pontos fixados.

Equações de Euler-Lagrange

Seja $\mathcal{A}(x(t)) := \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$ com $x \in \mathbb{R}^3$ e $y(t) = \dot{x}(t)$.

O mínimo do funcional \mathcal{A} com respeito a todas as curvas admissíveis com dados limites as duas extremidades fixadas $P = x(a)$ e $Q = x(b)$ é obtido resolvendo as equações de Euler-Lagrange associadas ao problema de minimização:

$$0 = \nabla_x L(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} \nabla_y L(t, x(t), \dot{x}(t)). \quad (\square)$$

Geodésicas como curvas otimizadas -2-

Lagrangiano

Definimos o lagrangiano como elemento de comprimento $Ldt = ds(t) = \sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta(t)}dt$. Queremos mostrar que é equivalente procurar os mínimos do funcional $\int_a^b L^2(t, x(t), \dot{x}(t))dt$.

• Com efeito, calculamos $\text{MIN} \int_a^b L^2 dt$. As equações correspondentes de Euler-Lagrange são

$0 = \nabla_x L^2(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} \nabla_y L^2(t, x(t), \dot{x}(t))$, i.e.,
 $2L\nabla_x L - \frac{d}{dt}(2L\nabla_y L) = 2L(\nabla_x L - \frac{d}{dt}\nabla_y L) - 2\frac{dL}{dt}\nabla_y L$. Portanto coincidem com as equações correspondente à minimização de $Ldt = ds$ se conseguissemos provar que $\frac{dL}{dt} = 0$.

• Mas, é uma propriedade das soluções de E.-L. chamada igualdade de energia, que $(\square) \Rightarrow L - \dot{x}^\tau g_{\tau\sigma} \partial_{y^\sigma} L = \text{cst}$.

Aqui, com L^2 no lugar de L , vem

$$L^2 - \dot{x}^\tau g_{\tau\sigma} \partial_{y^\sigma} L^2 = -L^2 = \text{cst} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 0.$$

Geodésicas como curvas otimizadas -3-

- Esta última propriedade é que nos permite afirmar que $\text{MIN} \int_a^b L^2 dt = \text{MIN} \int_a^b L dt$, uma vez que ambas satisfazem (\square).
- Portanto calcular $\text{MIN} \int_a^b ds(t)$ é equivalente a resolver (\square) que a sua vez é equivalente a resolver $0 = \partial_{x^\gamma} L^2 - \frac{d}{dt} \partial_{y^\gamma} L^2$ com $L^2 = (s'(t))^2 = \sum_{\alpha, \beta} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta(t)$.
- Basta explicitar esta última, para obtermos a equação $\sum_{\gamma, \alpha, \beta} \frac{1}{2} g^{\kappa\gamma} (\partial_\gamma g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\gamma\beta} - \partial_\beta g_{\alpha\gamma}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \ddot{x}^\kappa$, i.e., pela relação de Levi-Civita (**L.C.**) $0 = \ddot{x}^\kappa + \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\kappa \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$, i.e. obtemos as equações das geodésicas (\star). Desta vez, as condições limites são de contorno, i.e., $x(a) = P$ e $x(b) = Q$. Temos então existência de uma solução $s \mapsto x(s)$ tal que $x(a) = P$ e $x(b) = Q$.
- A mesma tem velocidade $x'(a)$ em P . Ora, vimos que existia localmente uma única geodésica com $x(a)$ e $x'(a)$ fixados, logo a única geodésica é $s \mapsto x(s)$, localmente numa vizinhança de $P \in S$.

Geodésicas como curvas otimizadas -4-

- Além disto, já que $\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \dot{s}(t) = 0$ temos $\gamma' \perp \gamma''$.

♣ Acabamos de provar o seguinte resultado:

Teorema. Geodésicas Riemannianas são curvas otimizadas entre dois pontos.

Seja $P, Q \in S$. Então existe uma curva em S que minimiza a distância entre P e Q , com a distância induzida pela métrica. Esta curva é uma geodésica que passa por P e Q .

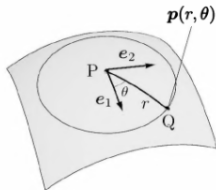
Logo satisfaz $\gamma' \cdot \gamma'' = 0$ e $\|\gamma'\| = \text{cste}$.

Ademais, esta curva é única se Q for numa vizinhança de P .

- A palavra Riemanniana serve para salientar que a conexão (os símbolos de Christoffel) é Riemanniana (ou de Levi-Civita), uma vez que o resultado aplica-se também as variedades Riemannianas.

Vizinhança geodésica

- Com as notações do Lema anterior, identificamos um ponto $Q \in S$, situado numa vizinhança de p (que pode ser tomado como igual à P , origem do plano tangente em p , cf. demonstrações anteriores) com as coordenadas (r, θ) , onde r é a distância geodésica entre Q e P , definida como a mínima distância entre P e Q em S e é obtida mediante a resolução da ODE (\star) .
- O ângulo θ é definido como o ângulo entre e_1 e o vetor tangente (a velocidade) em P .



• Seja $Q' := Q - (Q \cdot \nu_p)\nu_p$ a projeção de Q no plano tangente em p , e seja $r \mapsto r'(r) := \|P - Q'\|$. Temos $\lim_{r \rightarrow 0} |r - r'(r)| = 0$.

• Sendo que a superfície nesta vizinhança é localmente um gráfico, o ponto Q escreve-se na base $\{e_1, e_2, \nu\}$ como

$$Q = p(r, \theta) := r' \cos \theta e_1 + r' \sin \theta e_2 + f_Q(r, \theta)\nu, \text{ onde} \\ f_Q(r, \theta) = f(x, y) = f(r' \cos \theta, r' \sin \theta).$$

• Portanto o primeiro vetor tangente à geodésica em P é

$$g_r(r, \theta) := \partial_r p(r, \theta) = \partial_r r' \cos \theta e_1 + \partial_r r' \sin \theta e_2 + \partial_r f_Q(r, \theta)\nu.$$

O segundo vetor da base é

$$g_\theta(r, \theta) := \partial_\theta p(r, \theta) = -r' \sin \theta e_1 + r' \cos \theta e_2 + \partial_\theta f_Q(r, \theta)\nu.$$

• Seja $E = g_r \cdot g_r$, $F = g_r \cdot g_\theta$, $G = g_\theta \cdot g_\theta =: h^2(r, \theta)$.

O elemento de comprimento, i.e., a métrica associada é:

$$ds^2 = A(dr|d\theta)^T \cdot (dr|d\theta) = E dr^2 + 2F dr d\theta + h^2(r, \theta) d\theta^2.$$

AULA 10 (21/3/2023)

Interpretações da curvatura de Gauss.

Métrica geodésica

Lema. Primeira forma (métrica) geodésica

Em coordenadas geodésicas (ou coordenadas normais) temos

$$E = 1, F = 0, \lim_{r \rightarrow 0^+} h(r, \theta) = 0, \lim_{r \rightarrow 0^+} \partial_r h(r, \theta) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{h}{r} = 1.$$

DEM. Sendo $r \mapsto p(r, \theta)$ uma geodésica, logo $E = 1$. Pela 2.^a equação da geodésica ($w^\kappa = w^2 = \theta$): $\ddot{w}^\kappa + \sum_{\alpha, \beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\kappa \dot{w}^\alpha \dot{w}^\beta = 0$, temos $\ddot{\theta} + \Gamma_{11}^2 \dot{r}^2 + \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha 2}^2 \dot{w}^\alpha \dot{\theta}$, mas $\dot{\theta} = 0$ na geodésica, logo $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{rr}^\theta = 0$. D'outro lado, vimos (cf. p.112) que $\partial_r E = 2(E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2)$ e portanto $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{rr}^r = 0$. Tivemos também $\partial_r F - 1/2 \partial_\theta E = F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = 0$, i.e. $\partial_r F = 0$, logo $F = \hat{F}(\theta)$ mas também por definição $F = \partial_r f_Q \partial_\theta f_Q$. Pela relação $\nabla f(0) = 0$ (prova do corolário p.125) vem $\lim_{r \rightarrow 0^+} \partial_r f_Q = 0 = \lim_{r \rightarrow 0^+} \partial_\theta f_Q$ e então $F = \hat{F}(\theta) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \partial_r \tilde{f}_Q \partial_\theta \tilde{f}_Q = 0$, uma vez que F é constante em r . Também, $\lim_{r \rightarrow 0^+} h(r, \theta) = 0$.

As duas última relações devem ainda ser demonstradas. Sendo \tilde{E} , \tilde{F} e \tilde{G} as componentes da 1.^a forma expressadas na base $\{e_1, e_2\}$ em P vimos que $\det A = EG - F^2 = G = \det \tilde{A} |\mathcal{J}|^2 = (\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2) |\mathcal{J}|^2$. Segue então de $E = 1, F = 0$ que $h = \sqrt{G} = \sqrt{\det A} = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} = r \sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}$, logo a tese quando tomemos $r \rightarrow 0^+$, uma vez que pelo corolário anterior (p.124), vem $\lim_{r \rightarrow 0^+} (\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2) = 1$ (= valor em P). QED. ■

• Portanto a métrica geodésica é: $ds^2 = dr^2 + h^2 d\theta^2$ e temos $\lim_{r \rightarrow 0^+} ds^2 = dr^2 = dx_1^2 + dx_2^2$. Desta forma, reparemos que a métrica geodésica expressada em coordenadas Cartesianas em P (i.e, na origem do plano tangente em P) é

$A(0) = A_{\text{cart}}^{\text{geod}}(0) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pela expressão explícita dos

símbolos de Christoffel (p. 117) obtemos imediatamente que em P , vale $\Gamma_{ij}^k(P) = 0$. É esse o sentido da métrica geodésica: aproxima a métrica Euclidiana numa vizinhança de cada ponto (sendo diferente em cada ponto).

Mapa exponencial e coordenadas geodésicas

- Então dizemos que em cada ponto, se escolhermos as coordenadas geodésicas, quer a métrica (\mathbb{I}_1 ou A) quer a conexão (i.e., a noção de gradiente) são Euclidianas no ponto e quase-Euclideanas numa vizinhança.
- Fora da origem, conforme a expressão explícita dos símbolos de Christoffel, temos em coordenadas geodésicas: $0 = \Gamma_{rr}^r = \Gamma_{r\theta}^r = \Gamma_{\theta r}^r = \Gamma_{rr}^\theta = 0$, enquanto as não nulas são $\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{-G\partial_r G}{2G} = -h\partial_r h$, $\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{\partial_r G}{2G} = \frac{\partial_r h}{h}$, e $\Gamma_{\theta\theta}^\theta = \frac{\partial_\theta G}{2G} = \frac{\partial_\theta h}{h}$, sendo que $G = h^2(r, \theta)$.
- Vimos a existência local da geodésica γ_v com velocidade inicial um vetor arbitrário v do plano tangente à S em p . Mediante uma mudança de parâmetro e um escalamento de v podemos supor que a mesma é definida no intervalo $[0, 1]$. Para além, sendo a geodésica a curva que minimiza a distância entre dois pontos, podemos supor que existe uma vizinhança U de p tal que todos os pontos de U são atingido por uma única geodésica partindo de p .

Logo, $\forall q \in S \cap U$ existe uma velocidade associada $v = \dot{\gamma}(0) \in T_p S$ a partir da qual temos a única geodésica entre p e q , $t \mapsto \gamma_v(t)$, definindo assim as coordenadas polares geodésicas (r, θ) de um ponto qualquer $q \in U$, onde r é a distância geodésica entre p e q , e θ é o ângulo definido mediante a fórmula: $\|\dot{\gamma}(0)\| \cos \theta = \dot{\gamma}(0) \cdot e_1$, onde $\{e_1, e_2\}_p$ é uma base ortonormada do plano tangente em p .

Mapa exponencial

O mapa exponencial é definido como:

$\exp_p : A \subset T_p \rightarrow U \subset S : v \mapsto \gamma_v(1)$. Em particular $\exp_p(0) = p$.

Coordenadas geodésicas

O par (U, \exp_p^{-1}) é chamado mapa local de coordenadas geodésicas. O mapa inverso $\exp_p^{-1} : U \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n : q \mapsto (r, \theta)$ define as coordenadas geodésicas. (A cada ponto de S numa vizinhança de p sabemos qual é a geodésica associada que une este mesmo ponto a p , logo conhecemos a velocidade v em p e o sistema de coordenadas geodésicas associado).

Interpretação da curvatura de Gauss -1-

Equação de Gauss - relação entre a curvatura e a métrica

Pela demonstração do teorema "egregium" (cf. termos em azul),

$$K = -\frac{\partial_u^2 G}{2(EG-F^2)} + \frac{E(\partial_u G)^2}{4(EG-F^2)^2} = -\frac{(2hh')'}{2h^2} + \frac{(2hh')^2}{4h^4} = -\frac{\partial_r^2 h}{h},$$
 onde $h' = \partial_r h$. Já sabemos que em coordenadas geodésicas a função h traz toda a informação relativa à curvatura e a métrica. Visto que $K = -\frac{\partial_r^2 h}{h}$, a métrica define unicamente a curvatura de Gauss. Acontece que, reciprocamente, resolvendo uma equação diferencial ordinária, a curvatura permite determinar univocamente a métrica, uma vez que usamos as coordenadas geodesicas. Especificamente, no caso de uma curvatura constante, a solução da EDO é :

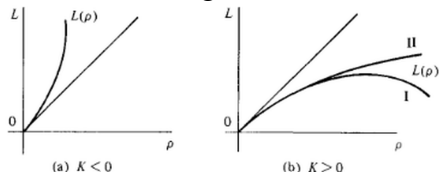
$$h(r, \theta) = \begin{cases} K^{-1/2} \sin(\sqrt{K}r) & K > 0 \\ r & K = 0 \\ (-K)^{-1/2} \sinh(\sqrt{-K}r) & K < 0 \end{cases}$$

Interpretação da curvatura de Gauss -2-

Afastamento das geodésicas

A curva $\gamma_\rho : \theta \mapsto p(\rho, \theta)$ é chamada círculo geodésico (i.e., com o raio ρ fixado). Ora, consideremos a curva $r = \text{cst} = \rho$ situada entre as duas geodésicas $\theta = \theta_1$ e $\theta = \theta_2$. Tem comprimento

$$L(\rho) := \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}_\rho\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{|\dot{\theta}|^2 G} dt = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\theta}| \sqrt{G} dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} h(\rho, \theta) d\theta,$$
 com $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} h = 0$, $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} h' = 1$, e $\partial_{rr} h = -Kh$, vê figura, onde o afastamento das geodésicas é medido por $L(\rho)$.



- Observemos que se $K < 0$, as geodésicas afastam-se sempre, enquanto para $K > 0$ existem 2 casos, conforme o valor de K , um com afastamento, outro com avizinhação (*fonte: do Carmo*).

Interpretação da curvatura de Gauss -3-

Lema

A métrica é Euclidiana (i.e, existe um sistema de coordenadas x_1, x_2 tal que nesse sistema $E = 1, G = 1$ e $F = 0$) sse $K = 0$.

DEM. Se $K = 0$ então $h = r$ e $G = r^2$, logo $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$.
 D'outro lado $dx_1^2 = d(r \cos \theta)^2 = (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2$ e $dx_2^2 = d(r \sin \theta)^2 = (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta)^2$, i.e., $dx_1^2 + dx_2^2 = ds^2$. QED. ■

Isometria

Duas superfícies são localmente isométricas se têm a mesma métrica em p , i.e., 1.^a forma fundamental, i.e. $\mathbb{I}_1(a, b)_p :=$

$A(a|b)_p^T \cdot (a|b)_p$, onde $A := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} (p)$, com $a, b \in T_p S$.

Seja $f : S_1 \rightarrow S_2$ um mapa suave, então f é uma isometria local se $\forall a, b \in T_p S_1 : \mathbb{I}_1(a, b)_p = \mathbb{I}_1(f_{\#}a, f_{\#}b)_{f(p)}$, onde

Interpretação da curvatura de Gauss -4-

$f_{\#}a := d_p f[a], f_{\#}b := d_p f[b] \in T_{f(p)}S_2$ representam as linearizações de f nas direções a e b . O mapa f é dito uma isometria global (ou "mapa congruente") entre S_1 e S_2 se além de ser localmente isométrico é também uma bijecção.

- Quando K for constante, um corolário importante é o resultado seguinte: sendo "dentro da" superfície (é o significado de ser intrínseco) o conhecimento apenas de K não permite distinguir superfícies com formas diferentes mas mesma curvatura de Gauss, como por exemplo o cone, o cilindro e o plano.

Interpretação da curvatura de Gauss -5-

Porém, acabamos de demonstrar o seguinte resultado:

Teorema de Minding

Cada duas superfícies são isométricas se e somente se têm a mesma curvatura de Gauss constante.

Corolário: mapas cartográficos não são isométricos.

DEM. Um mapa é uma imersão injetiva suave de um aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ em $S \subset \{x : \|x\| = R\}$ (a esfera terrestre). O Teorema de Gauss diz que não pode haver mapa cartográfico isométrico, pois que se for isométrico tem de ter a mesma a curvatura de Gauss ($= 1/R^2$ no globo e $= 0$ no mapa plano). QED. ■

Interpretação da curvatura de Gauss -6-

- Vimos que o círculo geodesico de raio r tem comprimento

$$\mathcal{L}(r) := \int_0^{2\pi} h(r, \theta) d\theta.$$

Temos também que a superfície conteúda neste círculo tem área

$$\mathcal{A}(r) := \int_0^r \mathcal{L}(r) dr.$$

Lema. Interpretação geométrica de K

Seja K constante numa vizinhança de p e seja um disco geodésico de raio r centrado em p . Logo

$$K = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{3}{\pi} \left(\frac{2\pi r - \mathcal{L}(r)}{r^3} \right) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{12}{\pi} \left(\frac{\pi r^2 - \mathcal{A}(r)}{r^4} \right).$$

DEM. Sendo que $\lim_{r \rightarrow 0^+} h = 0$ a fração

$$k := \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{3}{\pi} \left(\frac{2\pi r - \mathcal{L}(r)}{r^3} \right)$$

tem limite indefinido, apliquemos a regra de l'Hôpital duas vezes,

Interpretação da curvatura de Gauss -7-

DEM. (cont.) i.e.,

$$k = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{3}{\pi} \left(\frac{2\pi - \int_0^{2\pi} \partial_r h(r, \theta) d\theta}{3r^2} \right)$$

e

$$k = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{3}{\pi} \left(\frac{-\int_0^{2\pi} \partial_{rr} h(r, \theta) d\theta}{6r} \right).$$

Pela equação de Gauss $\partial_{rr} h = -Kh$, logo vem

$$k = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K \frac{h(r, \theta)}{r} d\theta = K(P),$$

uma vez que $\frac{h(r, \theta)}{r} \rightarrow 1$ quando $r \rightarrow 0^+$ pelo lema anterior (p. 133). O cálculo é similar no caso da área. QED. ■

Interpretação da curvatura de Gauss -8-

- **Observação:** no caso K constante, uma vez que $-Kh = h''$, obtemos, expandindo h na ordem 3 (cf. lema p. 133)

$$\begin{aligned}\sqrt{G} &= h(r, \theta) = h(0) + h'(0)r + \frac{1}{2}h''(0)r^2 + \frac{1}{3}h'''(0)r^3 \\ &= r + \frac{1}{2}(-Kh(0))r^2 + \frac{1}{3}(-Kh'(0))r^3, \text{ ou seja,}\end{aligned}$$

$$\sqrt{G} = r - \frac{K}{3}r^3 + o(r^3),$$

pelo que o comprimento de um "pequeno" círculo geodésico é $\int_0^{2\pi} h(r, \theta) d\theta = 2\pi(r - \frac{r^3}{3}K) + o(r^3)$. A quantidade " $2K\pi r^3/3$ " é a diferença entre os comprimentos euclidiano e curvo.

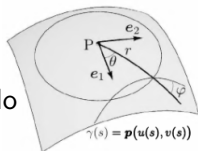
- **Nota:** na última aula da parte B veremos a generalização Riemanniana desta fórmula, i.e. uma aproximação da métrica com a curvatura de Riemann e suas derivadas covariantes.

AULA 11 & 12 (23 & 28/3/2023)

Teoremas de Gauss-Bonnet.

Teorema de Gauss-Bonnet: caso do triângulo geodésico -1-

♣ Seja uma geodésica $\gamma(s) = p(r(s), \theta(s))$, com abcissa curvilínea s e cuja velocidade em $Q = p(r, \theta)$ na vizinhança geodésica de p faz um ângulo φ com a geodésica $r \mapsto p(r, \theta)$ em Q , vê figura.



Lema.

Temos $\varphi'(Q) = -\theta'(Q)\partial_r h(Q)$.

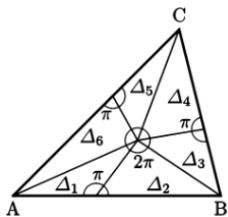
DEM. Sendo $\partial_r p$ e $\frac{1}{h(r, \theta)}\partial_\theta p$ ortonormados, escrevemos

$\gamma'(Q) = \cos \varphi \partial_r p + \frac{\sin \varphi}{h} \partial_\theta p$. D'outro lado $\gamma'(s) = \partial_s p(r(s), \theta(s)) = \partial_r p r'(s) + \partial_\theta p \theta'(s)$, pelo que $r'(s) = \cos \varphi$ e $\theta'(s) = \frac{\sin \varphi}{h}$. A 1.ª equação da geodésica (cf. (\star)) escreve-se em coordenadas normais: $r'' + \Gamma_{rr}^r (r')^2 + \Gamma_{r\theta}^r r' \theta' + \Gamma_{\theta\theta}^r (\theta')^2 = 0 = r'' - h \partial_r h (\theta')^2 = (\cos \varphi)' - h \partial_r h \frac{(\sin \varphi)^2}{h^2} = -\sin \varphi \left(\varphi' + \partial_r h \frac{\sin \varphi}{h} \right)$. Temos 2 hipóteses: ou $\sin \varphi \neq 0$, logo a tese, ou $\sin \varphi = 0$ num intervalo

Teorema de Gauss-Bonnet: caso do triângulo geodésico -2-

aberto, logo $\varphi = 0 = \theta'$, logo a tese, ou enfim $\sin \varphi(s_0) = 0$ e $\exists s_n \rightarrow s_0$ t.q. $\sin \varphi(s_n) \neq 0$, logo $\varphi'(s_n) = \theta'(s_n) \partial_r h(Q_n)$ e então a tese segue por continuidade de φ' , θ' e h . QED. ■

- Vamos demonstrar a fórmula de Gauss-Bonnet num triângulo geodésico ΔABC . Podemos sempre supor que o mesmo se encontra numa vizinhança geodésica centrada num dos seus cumes. Senão a gente restringe-se a um sub-triângulo (vê imagem) onde vale Gauss-Bonnet i.e., $\int_{\Delta_i} K dS = \angle A_i + \angle B_i + \angle C_i - \pi$. Logo, $\sum_{i=1}^6 \int_{\Delta_i} K dS = \sum_{i=1}^6 (\angle A_i + \angle B_i + \angle C_i - \pi) = (\angle A + \angle B + \angle C) + 2\pi + 3\pi - 6\pi = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$.



Teorema de Gauss-Bonnet: caso do triângulo geodésico -3-

- Supomos então estarmos centrados em A .

Logo B e C têm coordenadas $(r_B, 0)$ e $(r_C, \angle A)$,

$AB \equiv s \mapsto p(s, 0)$, $0 \leq s \leq l_1 := |AB|$, $AC \equiv s \mapsto p(s, \angle A)$,

$0 \leq s \leq l_2 := |AC|$ e $BC \equiv s \mapsto p(r(s), \theta(s)) =: \gamma_{BC}(s)$,

$0 \leq s \leq l_3 := |BC|$.

**Teorema de Gauss-Bonnet num triângulo geodésico
(Gauss 1828)**

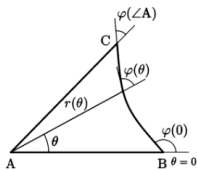
Seja um triângulo ΔABC cujos lados são geodésicas na superfície S . Então $\angle A + \angle B + \angle C = \pi + \int_{\Delta ABC} K dS$.

DEM. Mostramos que $\theta'(s) \neq 0$ e θ é crescente em BC . Com efeito, suponhamos que $\exists s_0 \in [0, l_3]$ tal que $\theta'(s_0) = 0$, logo a geodésica $s \mapsto p(s, \theta(s_0))$ partindo da origem A é tangente à BC em $R := (r(s_0), \theta(s_0)) \in BC$. Portanto temos duas geodésicas tangentes em R , logo, pelo unicidade das geodésicas, são

Teorema de Gauss-Bonnet: caso do triângulo geodésico -4-

coincidentes, logo $A \in BC$, uma contradição. Portanto $\theta'(s) \neq 0$ e como $\theta(0) = 0$ e $\theta(l_3) = \angle A > 0$, $s \mapsto \theta(s)$ é estritamente crescente. Portanto podemos invertir o mapa, logo temos $\theta \mapsto s(\theta)$ e então $BC \equiv \theta \mapsto p(\hat{r}(\theta) := r(s(\theta)), \theta)$ e o triângulo $\Delta ABC = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \angle A, 0 \leq r \leq \hat{r}(\theta)\}$. Ora, pela relação $K = -\frac{\partial_{rr}h}{h}$ e $dS = \partial_r p dr \times \partial_\theta p d\theta = \sqrt{G} dr d\theta = h(r, \theta) dr d\theta$ temos, para $r_n \rightarrow 0^+$ quando $n \rightarrow \infty$ e pelo lema anterior,

$$\begin{aligned} \int_{\Delta ABC} K dS &= -\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\angle A} \int_{r_n}^{\hat{r}(\theta)} \partial_{rr} h(r, \theta) dr d\theta \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\angle A} (h'(r_n, \theta) - h'(\hat{r}(\theta), \theta)) d\theta = \\ &= \int_0^{\angle A} \left(\lim_{r_n \rightarrow 0^+} h'(r_n, \theta) + \frac{\varphi'}{\theta'} \right) d\theta = \\ &= \int_0^{\angle A} \left(1 + \frac{d\varphi}{\frac{ds}{d\theta}} \right) d\theta = \int_0^{\angle A} \left(1 + \frac{d\varphi}{\frac{d\theta}{ds}} \frac{ds}{d\theta} \right) d\theta = \\ &= \int_0^{\angle A} \left(1 + \frac{d\varphi}{d\theta} \right) d\theta = \angle A + \varphi(\angle A) - \varphi(0). \end{aligned}$$



Teorema de Gauss-Bonnet: caso de uma curva geral -1-

Olhando pela figura, $\angle B = \pi - \varphi(0)$ e por definição de φ , $\angle C = \varphi(\angle A)$. Logo $\int_{\Delta_{ABC}} K dS = \angle A + \angle C + \angle B - \pi$. QED. ■

- Um aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo se é estrelado com respeito a todos os seus pontos. Equivalentemente, se uma qualquer curva fechada em A pode ser encolhida a um ponto.
- Lembramos a fórmula de Green:

$$\int_{\ell} f(u, v) du + g(u, v) dv = \int_{\text{int}(\ell)} \left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} \right) dudv$$

sempre que a região $A = \text{int}(\ell) \subset \mathbb{R}^2$ for simplesmente conexa, e tiver ℓ como fronteira, com ℓ uma curva orientada.

- Lembramos também o teorema das tangentes girantes, ou teorema de Hopf:

Teorema de Gauss-Bonnet: caso de uma curva geral -2-

Hopf's "Umlaufsatz" generalizado

Seja $\gamma : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana, contínua, regular por parte, simples e fechada. Sejam $S := \{\dots, s_i, \dots, s_{i+1}, \dots\}$ um número finito de pontos entre 0 e l onde γ' é descontínua. Seja ϑ o ângulo entre γ' e e_1 . Então vale $\sum_i (\vartheta(s_{i+1}) - \vartheta(s_i)) + \sum_i [\theta_i] = 2\pi$.

- Seja $\{e_1, e_2\}$ uma base movél ortonormada de $T_p S$ com origem p . Seja $s \mapsto \gamma(s)$ uma curva em S . Logo em cada ponto $p = \gamma(s)$ temos uma base $\{e_1, e_2\}$ que depende de s . Seja $\theta(s)$ o ângulo entre $\gamma'(s)$ e $e_1(s)$.
- Definimos a **curvatura geodésica** como $\kappa_g := \gamma'' \cdot (\nu \times \gamma')$. Por definição $\kappa_g = 0$ se γ é uma geodésica. Então, pelos resultados obtidos nos exercícios 12 e 21 da 3.^a série (Afonso & Francisco) : $\partial_u e_1 \cdot \partial_v e_2 - \partial_u e_2 \cdot \partial_v e_1 = K \sqrt{\det \mathbb{I}_1}$ e $e_1 \cdot e_2' = \theta' - \kappa_g$.

Teorema de Gauss-Bonnet: caso de uma curva geral -3-

Teorema de Gauss-Bonnet para um polígono curvilínea

Seja uma curva γ regular por partes, simples e fechada.

Então

$$\sum_i \angle A_i = (N - 2)\pi + \int_{\text{int}\gamma} K dS + \sum_i \int_{\gamma_i} \kappa_g dL,$$

onde γ_i são as partes regulares de γ e A_i os N pontos de S onde γ' é descontínua.

Rem. Com $N = 3$ e $\kappa_g = 0$ re-encontramos a fórmula anterior.

DEM. Pelo teorema de Jordan-Schoenflies, a região contida no seu interior $R = \text{int}\gamma$ é simplesmente conexa. Por Hopf generalizado, temos

$$2\pi - \sum_{i=1}^N [\theta_i] = \sum_{i=1}^N (\vartheta(s_{i+1}) - \vartheta(s_i)) = \sum_{i=1}^N \int_{s_i}^{s_{i+1}} \vartheta'(s) ds =,$$

Teorema de Gauss-Bonnet: caso de uma curva geral -4-

DEM. (cont.) pelo Ex. 21 (da série 3), $= \sum_{i=1}^N \int_{s_i}^{s_{i+1}} \kappa_g(s) ds +$
 $\int_0^l e_1(s) \cdot e_2'(s) ds$. Ora, $\int_0^l e_1 \cdot e_2' ds = \int_0^l e_1 \cdot (\partial_u e_2 u' + \partial_v e_2 v') ds$
 $= \int_{\gamma^\sharp} e_1 \cdot \partial_u e_2 du + e_1 \cdot \partial_v e_2 dv$, onde $\gamma = p(\gamma^\sharp)$. Por Green, temos
 $\int_0^l e_1(s) \cdot e_2'(s) ds = \int_{\text{int}\gamma^\sharp} (\partial_u(e_1 \cdot \partial_v e_2) - \partial_v(e_1 \cdot \partial_u e_2)) dudv =$
 $\int_{\text{int}\gamma^\sharp} (\partial_u e_1 \cdot \partial_v e_2 - \partial_v e_1 \cdot \partial_u e_2) dudv$, logo, pelo Ex. 12 (serie 3),
 $\int_0^l e_1(s) \cdot e_2'(s) ds = \int_{\text{int}\gamma^\sharp} K \sqrt{\det \mathbb{I}_1} dudv = \int_{\text{int}\gamma} K dS$.

Portanto, $2\pi - \sum_{i=1}^N [\theta_i] = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \kappa_g dL + \int_{\text{int}\gamma} K dS$. Mas θ_i é um ângulo exterior, pelo que $\angle A_i = \pi - \theta_i$, logo a tese. QED. ■

Gauss-Bonnet para uma superfície compacta -1-

- Seja S uma superfície de \mathbb{R}^3 e $D \subset S$ um compacto. Em cada ponto de D consideremos um disco geodésico. Sendo D compacto, existe um número finito de discos geodésicos que cobrem D . Em cada disco, construímos uma triangulação (com triângulos não necessariamente geodésicos). Para além, em cada disco geodésico existe uma base ortogonal do plano tangente, e portanto aplica-se o teorema anterior para os polígonos curvilíneas. É um resultado de topologia algebraica mostrar que existe uma triangulação de D , i.e., todo D é coberto por triângulos curvilíneas, onde cada dois triângulos são disjuntos ou interseccionam em uma aresta ou em um vértice. Para além, uma aresta pertence a máximo dois triângulos.

Teorema. Existência de uma triangulação

Seja S uma superfície regular de \mathbb{R}^3 e $D \subset S$ um compacto. Então existe uma triangulação de D onde cada triângulo pertence a uma vizinhança geodésica.

Gauss-Bonnet para uma superfície compacta -2-

♣ Se ∂D for suave então divide-se ∂D em um número finito de arcos tal que cada pertence a um só disco geodésico; a seguir, constroi-se a triângulação de D em cada disco geodésico interior partindos destes arcos como arestas e cobrindo então tudo D com as intersecções pretendidas.

Característica de Euler

A característica de Euler de uma triângulação $\mathcal{T}(S)$ de uma superfície compacta S é o número

$$\chi(S) = V - A + T,$$

$$\begin{cases} V & = & \text{número de vertices de } \mathcal{T}(S) \\ A & = & \text{número de arestas de } \mathcal{T}(S) \\ T & = & \text{número de triângulos de } \mathcal{T}(S) \end{cases} .$$

Gauss-Bonnet para uma superfície compacta -3-

Teorema global de Gauss-Bonnet

Seja S uma superfície regular de \mathbb{R}^3 e $D \subset S$ um compacto. Suponhamos que ou ∂D é suave, ou $\partial D = \emptyset$. Então vale

$$\int_D K dS + \int_{\partial D} \kappa_g dL = 2\pi\chi(\bar{D}).$$

DEM. Seja uma triangulação $\mathcal{T}(D)$ de D . Em cada triângulo Δ_i

temos $\int_{\Delta_i} K dS + \int_{\partial\Delta_i} \kappa_g dL = (\angle A_i + \angle B_i + \angle C_i) - \pi$.

Somemos em todos os T triângulos de $\mathcal{T}(D)$.

Step 1. Uma vez que não ha intersecções no interior dos

triângulos, obtemos $\int_D K dS = \sum_{i=1}^T \int_{\Delta_i} K dS$. Uma vez que cada aresta $\partial\Delta_i$ no interior de D é sempre partilhada por 2 triângulos e

Gauss-Bonnet para uma superfície compacta -4-

DEM. (cont.) então percorrida uma vez em cada sentido (vê figura), com $\pm\kappa_g$ consoante a orientação da curva (uma vez que no teorema de Green, a mesma tem orientação), temos

$$\int_{\partial D} \kappa_g dL = \sum_{i=1}^T \int_{\partial \Delta_i} \kappa_g dL.$$



Step 2. Falta somar no membro a direita. Se o vértice P for no interior de D então a soma dos ângulos dos triângulos que partilhem P faz 2π (vê figura a esquerda). Se, ao contrário $P \in \partial D$, como é suave, existe uma tangente em cada vértice é portanto a soma dos ângulos nesses vértices é exatamente π . Seja n_1 o número de vértices interiores, e n_2 o número de vértices na

fronteira. Vem $\sum_{i=1}^T (\angle A_i + \angle B_i + \angle C_i) = 2\pi n_1 + \pi n_2$, logo a direita temos $(2\pi(n_1 + n_2) - \pi n_2) - (3T\pi - 2T\pi)$.

Gauss-Bonnet para uma superfície compacta -5-

Seja l_1 o número de arestas interiores, e l_2 o número de arestas na fronteira, logo $A = l_1 + l_2$. De outro lado, temos $3T = 2l_1 + l_2$, uma vez que um triângulo tem 3 arestas, com uma aresta interior sempre partilhada por 2 triângulos; vale também $n_2 = l_2$. Portanto vem $2\pi(V - A + T)$, a tese. QED. ■

Corolário Gauss-Bonnet 1.

O número de Euler $\chi(S)$ de uma superfície fechada, i.e., compacta e sem bordo, depende apenas de S e não depende da triangulação escolhida.

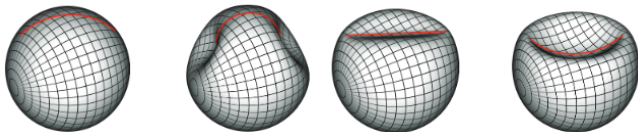
DEM. Toma $D = S$. Sendo fechada temos $\partial S = \emptyset$. Sendo limitada temos S compacta. O membro a esquerda $\int_S K dS$ é independente da triangulação pelo que o membro a direita, i.e. $\chi(S)$ também é independente da triangulação. QED. ■

Gauss-Bonnet para uma superfície compacta -6-

Corolário Gauss-Bonnet 2.

Seja $\varphi(S)$ uma deformação da esfera S por um difeomorfismo φ . Logo $\int_{\varphi(S)} K dS = \int_S K dS = 2\pi\chi(S)$.

DEM. Deformando a esfera, deformamos os triângulos da triângulação mas sem mudar $\chi = V - A + T$, logo a tese. QED. ■



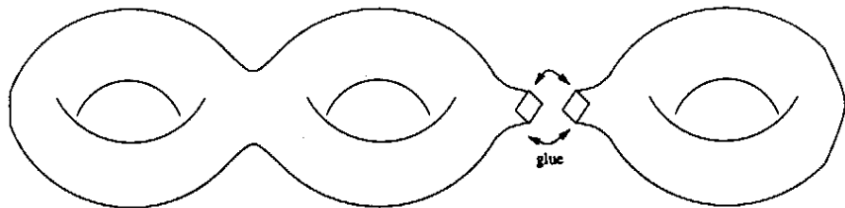
Soma conexa de compactos

Seja S_1 e S_2 duas superfícies compactas e conexas. Seja D um disco bidimensional. Constroimmos uma nova superfície S_{12} chamada soma conexa de S_1 e S_2 da seguinte maneira:

Gauss-Bonnet para uma superfície compacta -7-

- ▶ Retiremos um disco aberto D nas duas superfícies
- ▶ Escolhemos um difeomorfismo φ da fronteira de $S_1 \setminus D$ a fronteira de $S_2 \setminus D$ (ou de $\partial D \cap S_1$ a $\partial D \cap S_2$)
- ▶ Consideremos a superfície obtida como espaço quociente de $S_1 \setminus D \cup S_2 \setminus D$ sob a relação de equivalência $x \sim \varphi(x)$.

Esta operação é chamada colagem suave de S_1 com S_2 . Uma colagem simples é obtida retirando um polígono ou um triângulo em vez de um disco, vê figura. Neste caso φ é apenas um homeomorfismo.



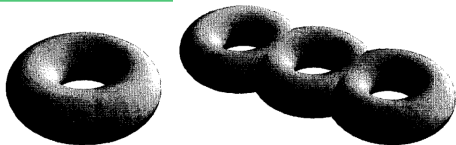
Gauss-Bonnet para uma superfície compacta -8-

Teorema. Classificação dos compactos de dimensão dois

Um superfície conexa e compacta T_g é homeomorfa a uma das seguintes:

- ▶ Uma esfera, $T_0 := S^2$;
- ▶ Uma soma conexa de g torus, $T_g, g \geq 1$;
- ▶ Uma soma conexa de planos projetivos.

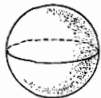
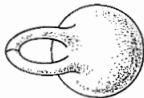
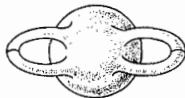
Para além, duas superfícies distintas nesta lista não são homeomorfas. O inteiro g é chamado género da superfície. Caso a superfície for orientável então é necessariamente uma soma de g torus, $g \geq 1$ ou o elemento neutro $T_0 = S^2$.



Gauss-Bonnet para uma superfície compacta -9-

Observações:

- ▶ a soma conexa é comutativa e associativa (não depende da ordem ou de como, ou onde, se "cola")
- ▶ a soma conexa não altera a orientabilidade, excepto no seguinte caso: se somar um plano projectivo a uma superfície orientável, fica automaticamente não orientável
- ▶ na pratica o género é o numero de "alças" (handle)

Sphere $\chi = 2$ Sphere with one handle $\chi = 0$ Sphere with two handles $\chi = -2$ 

Torus

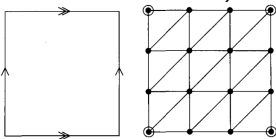


2-Torus

Gauss-Bonnet para uma superfície compacta -10-

Triangulação do torus

Uma triangulação admissível do torus é dada na figura: temos as duas faces opostas de um quadrado colocadas de maneira a coincidir, portanto só se contabilizam as arestas interiores mais as de um dos lados oposto só (i.e., $A = 33 - 3 - 3 = 27$); além disto, só se contam os vértices interiores e os de um dos lados opostos só, enquanto os 4 vértices extremos só contam como um (i.e., $V = 4 + 2 + 2 + 1 = 9$); finalmente, contam todos os triângulos (i.e., $T = 9 \times 2 = 18$). Logo $\chi(T_1) = V - A + T = 0$. Em particular, como consequência do teorema anterior sai $\int_{T_1} K dS = 0$ (vê Exercício 12 da série 4).



Gauss-Bonnet para uma superfície compacta -11-

Teorema. Gauss-Bonnet topológico

Uma superfície orientável, fechada e conexa de género g tem número de Euler $\chi = 2 - 2g$. Assim, $\int_S K dS = 4\pi(1 - g)$.

DEM. Demonstramos isto por indução. O resultado vale para a esfera $g = 0$ já que temos $\chi = 2$. Com efeito, aplicando Gauss-Bonnet global à esfera temos $2\pi\chi = \int_S K dS = 4\pi r^2/r^2 = 4\pi$. O resultado vale para o torus T_1 já que vimos que de um lado $\chi = 0$ e do outro $2(g - 1) = 2(1 - 1) = 0$. Suponhamos que vale para uma superfície compacta e conexa qualquer T_g com $g \geq 1$. Efetuemos então uma colagem simples retirando um n -gono (pensar num triângulo). Logo os números de Euler do conjunto T_{g+1} são

$$\begin{cases} A_{g+1} &= A_g + A_1 - n \\ V_{g+1} &= V_g + V_1 - n. \text{ Portanto, } \chi_{g+1} = A_{g+1} - V_{g+1} + T_{g+1} \\ T_{g+1} &= T_g + T_1 - 2. \end{cases}$$

$$= \chi_g + \chi_1 - 2 = 2 - 2g + 0 - 2 = 2 - 2(g + 1). \text{ QED.} \quad \blacksquare$$

AULA 12 (30/3/2023)

Derivação covariante em superfícies.

Derivação covariante e transporte paralelo -1-

Campo vetorial diferenciável

Um campo vetorial é uma aplicação de $U \subset S$, U aberto, no plano tangente $T_p S$ que a cada $p \in S$ faz corresponder $w(p) \in T_p S$.

Logo, sendo que $S \equiv p(u, v)$, temos $w = w_1(u, v)g_u + w_2(u, v)g_v$.

O campo $p \mapsto w(p)$ é diferenciável em $P = p(0, 0) \in T_p S$ se ambos w_1 e w_2 forem diferenciáveis em P .

É diferenciável em U se for diferenciável em todos os $p \in U$ i.e. em todas as origens dos planos $T_p S$, $\forall p \in S$.

Derivada covariante

Seja $y \in T_p S$ i.e. existe uma curva $t \mapsto \alpha(t)$ t.q. $y = \dot{\alpha}(0)$. Seja $\hat{w} := w \circ \alpha$. A derivada direcional em p na direção y é definida como $\frac{d\hat{w}}{dt}(0) := \frac{d}{dt} w \circ \alpha(t)|_{t=0}$.

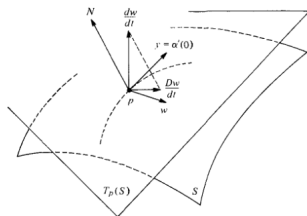
A projecção $D_y w(p)$ de $\frac{d\hat{w}}{dt}(0)$ no plano tangente $T_p S$ é chamada derivada covariante do campo vetorial w em p na direção y .

Derivação covariante e transporte paralelo -2-

É uma forma linear e contínua em y : pelo teorema de Riesz pode ser escrita com um produto interno

$$D_y w(p) = (y \cdot \nabla^\Gamma) w.$$

O vetor $\nabla^\Gamma w$ é chamado gradient covariante (ou curvilínea) de w associado a conexão Γ , uma vez que a diferenciação de g_u e g_v dão lugar a esses símbolos.



Derivação covariante e transporte paralelo -3-

Expressão explícita da derivada covariante

Sendo que $\alpha(t) = p(u(t), v(t))$ temos $\hat{w}(t) = w_1(u(t), v(t))g_u + w_2(u(t), v(t))g_v = w^u(t)g_u + w^v(t)g_v$. Temos $\dot{\alpha}(0) = \dot{u}(0)g_u + \dot{v}(0)g_v$, logo escrevemos $y^\tau = (\dot{u}(0), \dot{v}(0))$, $\tau \in \{1, 2\}$.

Projetando a derivada direcional $\frac{d\hat{w}}{dt}(0) = \dot{w}^u(0)g_u + \dot{w}^v(0)g_v + w^u(0)(\partial_u g_u \dot{u}(0) + \partial_v g_u \dot{v}(0)) + w^v(0)(\partial_u g_v \dot{u}(0) + \partial_v g_v \dot{v}(0))$ em $T_p S$, obtemos a projeção ortogonal que define a derivada covariante do campo w em p e na direção y :

$$D_y w(p) := \frac{d\hat{w}}{dt}(0) - \left(\frac{d\hat{w}}{dt}(0) \cdot \nu \right) \nu.$$

Assim, com a notação $w^\beta := (w^u, w^v)(0)$, tiramos que

$$D_y w(p) = \dot{w}^u(t)g_u + \dot{w}^v(t)g_v + \sum_{\gamma, \beta=1}^2 w^\gamma \left(\Gamma_{\gamma u}^\beta \dot{u} + \Gamma_{\gamma v}^\beta \dot{v} \right) g_\beta.$$

Derivação covariante e transporte paralelo -4-

Seja $x^\tau := (u, v)$, logo $\dot{x}^\tau = y^\tau$, e também

$$\dot{w}^\beta = \sum_{\tau=1}^2 \frac{\partial w^\beta}{\partial x^\tau} \dot{x}^\tau = \sum_{\tau=1}^2 \partial_\tau w^\beta y^\tau.$$

$$\text{Portanto } D_y w(p) = \sum_{\tau, \beta=1}^2 \left(\partial_\tau w^\beta + \sum_{\gamma=1}^2 w^\gamma \Gamma_{\gamma\tau}^\beta \right) y^\tau(0) g_\beta \quad (\spadesuit) =$$

$$= \sum_{\beta=1}^2 \left((y(0) \cdot \nabla^\Gamma) w^\beta \right) g_\beta =: \sum_{\tau, \beta=1}^2 \left((\nabla_\tau^\Gamma) w^\beta \right) y^\tau(0) g_\beta,$$

definindo assim a derivada covariante de w :

$$w_{;\tau}^\beta := \nabla_\tau^\Gamma w^\beta = \partial_\tau w^\beta + \sum_{\alpha=1}^2 w^\alpha \Gamma_{\alpha\tau}^\beta \quad (\diamond).$$

- Observemos que (\diamond) já não depende da curva α .

Derivação covariante e transporte paralelo -5-

♣ Seja $g^\beta \in (\mathbb{R}^3)'$ o dual de $g_\beta \in \mathbb{R}^3$, i.e., o mapa linear $g^\beta[g_\alpha] = \delta_{\alpha\beta}$. Por Riesz, existe $g^\beta \in \mathbb{R}^3$ tal que $g^\beta \cdot g_\alpha = \delta_{\alpha\beta}$ (com um ligeiro abuso de notação). (vê exercício 1.13 de MMC).

Lema. Forma intrínseca da derivada covariante

A derivada covariante de w é obtida como $\nabla_\tau^\Gamma w^\beta = \partial_\tau w \cdot g^\beta$.

$$\text{DEM. } \partial_\tau w \cdot g^\beta = \partial_\tau \left(\sum_{\gamma=1}^2 w^\gamma g_\gamma \right) \cdot g^\beta = \sum_{\gamma=1}^2 \partial_\tau w^\gamma \delta_{\gamma\beta} + \sum_{\gamma=1}^2$$

$$w^\gamma \partial_\tau g_\gamma \cdot g^\beta = \partial_\tau w^\beta + \sum_{j=1}^3 \sum_{\gamma=1}^2 w^\gamma \Gamma_{\gamma\tau}^j g_j \cdot g^\beta = \partial_\tau w^\beta +$$

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{\gamma=1}^2 w^\gamma \Gamma_{\gamma\tau}^j \delta_{j\beta} = \partial_\tau w^\beta + \sum_{\gamma=1}^2 w^\gamma \Gamma_{\gamma\tau}^\beta. \quad \text{QED.}$$



Derivação covariante e transporte paralelo -6-

Transporto paralelo

Um campo vetorial w diferenciável é transportado paralelamente ao longo da curva γ se $D_{\dot{\gamma}(p)}w(p) = 0, \forall p \in S$. Observemos que no caso Euclidiano isto significa $\Gamma = 0$ e $D_{\dot{\gamma}(p)}w(p) = 0 = \partial_{\tau}w^{\beta}$, i.e., o vetor tem componentes constantes ao longo da curva.

Teorema. Geodésicas têm velocidades paralelas a curva

A curva γ é uma geodésica sse a sua velocidade é transportada paralelamente ao longo de γ .

DEM. Sendo que $\dot{\gamma} = \dot{u}g_u + \dot{v}g_v$, apliquemos (\spadesuit) com $w^{\beta} = (\dot{u}, \dot{v}) = y^{\beta} = \dot{x}^{\beta}$. Logo, todas as componente são nulas, i.e., $\sum_{\tau=1}^2 \dot{x}^{\tau} \partial_{\tau} w^{\beta} + \sum_{\tau, \gamma=1}^2 \Gamma_{\gamma\tau}^{\beta} w^{\gamma} w^{\tau} = \dot{w}^{\beta} + \sum_{\tau, \gamma=1}^2 \Gamma_{\gamma\tau}^{\beta} w^{\tau} w^{\gamma} = 0$, reconhecidas como as equações (\star) que definem uma geodésica.

QED. ■

Derivação covariante e transporte paralelo -7-

Teorema. Invariança sob transporte paralelo

Dois campos vetoriais w_1 e w_2 paralelos ao longo de uma curva $t \in I \mapsto \gamma(t)$ verificam a invariança das normas de w_1 e w_2 e dos ângulos entre w_1 e w_2 ao longo de γ . Para além $\dot{w}_1 = \frac{dw_1}{dt}$ e $\dot{w}_2 = \frac{dw_2}{dt}$ são vetores normais à S .

DEM. A última afirmação segue logo da definição de ser paralelos ao longo de γ . Portanto vale $w_1 \cdot \dot{w}_2 = 0 = \dot{w}_1 \cdot w_2, \forall t \in I$. Mas isto significa exatamente que $w_1 \cdot w_2$ é constante ao longo da curva ($\frac{d}{dt}(w_1 \cdot w_2) = 0$), logo a tese. QED. ■

Curvatura geodésica

Seja $s \mapsto \gamma(s)$ uma curva parametrizada pela abscissa curvilínea e $s \mapsto w(s) = \hat{w}(\gamma(s))$ um campo vetorial unitário. Logo $w'(s)$ é ortogonal à $w(s)$, i.e. $w' = \alpha\nu + \lambda\nu \times w$ para certos $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$.

Derivação covariante e transporte paralelo -8-

D'outro lado, a sua derivada covariante direcional $D_{\gamma'} w$ ao longo de γ é por definição a projeção de $w' = \alpha\nu + \lambda\nu \times w$ no plano ortogonal a ν , o vetor normal a S .

Portanto $D_{\gamma'} w = \lambda(\nu \times w(s))$ com o escalar λ chamado **valor algebrico da derivada covariante**.

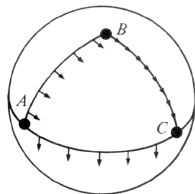
No caso de $w = \gamma'$ temos $D_{\gamma'} \gamma' = \kappa_g(\nu \times \gamma'(s))$, onde κ_g é chamado **curvatura geodésica**.

Logo, se γ é geodésica, vem $\kappa_g = 0$.

• **Aplicação:** recordemos que se γ é geodésica, logo em abcissa curvilínea, $\kappa_n := \|\gamma'' \cdot \nu\| = \kappa$ (uma vez que $\kappa_g = 0$). Mas, por Frenet, $\kappa n = \gamma''$, onde n é a normal a curva, logo deduzimos que $n = \nu$. Portanto, numa esfera os grande círculos são geodésicas pois que têm normal principal a apontar pela origem, uma vez que ν também aponta pela origem.

Derivação covariante e transporte paralelo -9-

♣ Transportar paralelamente um campo vetorial w ao longo de uma curva γ significa então que não há variação de w ao longo da curva nas direcções tangentes à S , logo o ângulo que w faz com $\dot{\gamma}$ é constante. Observemos na figura três curvas com intersecções A, B e C onde o ângulo é conservado. Mas, pelo facto de existirem ângulos $\angle A$ em A , $\angle B$ em B e $\angle C$ em C , o vetor w gira duas vezes e acabe sua volta ABC com uma rotação com respeito ao seu declive de partida.



Derivação covariante e transporte paralelo -10-

♣ Se quisermos comparar, em particular derivar um campo vetorial num espaço Euclidiano, a primeira coisa que se faz (mesmo sem dizê-lo) é transportar dois vetores próximos a uma origem comum. Neste caso, sabemos que é indiferente a escolha do caminho para efetuar esta deslocação, uma vez que os vetores têm sempre as mesmas coordenadas na base Cartesiana fixa escolhida. Já não será o caso em espaços curvos, pois transportar paralelamente depende do caminho. Além disto o vetor é cada vez definido no plano tangente em p , com p (logo T_pS) variável ao longo do caminho.

Fibrado tangente (tangent bundle)

O fibrado tangente é a união de todos os planos tangentes, i.e.

$$TS = \bigcup_{p \in S} \{p\} \times T_pS.$$

Uma seção do fibrado é um campo vetorial, e vice versa.

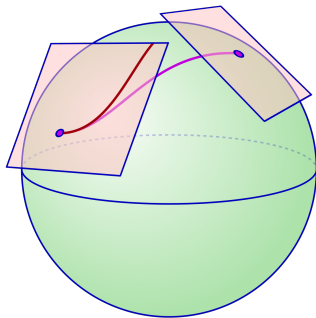
Derivação covariante e transporte paralelo -11-

Interpretação: conexão afim

Uma conexão afim é uma relação que ao par $\{w, y\}_p$, $p \in S$ faz corresponder um número, a derivada covariante $D_y w(p)$. A palavra *afim* significa que tivemos cada vez de transladar a origem do plano tangente quando o mesmo "se deslocou" ao longo do caminho, uma vez que o mesmo sofreu uma roto-translação para comparar, i.e., diferenciar ao longo do caminho, dois vetores pertencentes ao fibrado tangente. Mas, o facto de os planos tangentes se deslocarem ao longo de uma curva significa que podemos identifica-los um com o outro: logo "conectamos" os planos tangentes e portanto conectamos dois vetores tangentes pertencentes a dois planos em roto-translação ao longo do caminho, isso de maneira afim.

Por exemplo, uma conexão afim nula significa então que o campo é transportado paralelamente ao longo do caminho.

Derivação covariante e transporte paralelo -12-



A figura representa uma conexão afim.

PARTE B: Cálculo Diferencial em Variedades Diferenciáveis

Referência bibliográfica para a parte B

- ▶ **B. Dubrovin, A. Fomenko, S. Novikov**, *Modern Geometry - Methods and Applications Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields* (Springer)
- ▶ **Manfredo Do Carmo**, *Riemannian geometry* (Birkhäuser)
- ▶ **Philippe Ciarlet**, *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications* (SIAM)
- ▶ **William and Alexia Schulz**, *A practical introduction to differential forms* (unpublished)
- ▶ **Steven Kranz and Harold Parks**, *Geometric Integration Theory* (De Gruyter)

AULA 13 (4/4/2023)

Variedades topológicas e diferenciáveis.

Espaços topológicos

Espaço topológico

Um espaço topológico E é o par $\{E, \tau\}$ onde a "topologia" τ consiste nos sub-conjuntos abertos do conjunto E .

Espaço topológico de Hausdorff

Um espaço topológico é de Hausdorff se dois quaisquer pontos disjuntos são contidos em dois abertos disjuntos.

Conjunto conexo

Um espaço topológico é conexo se não é uma união de dois abertos (na topologia induzida) não vazios e disjuntos. Um sub-conjunto conexo é um espaço conexo para a topologia induzida.

Espaço topológico normal

Um espaço topológico é normal se dois quaisquer fechados disjuntos são contidos em dois abertos disjuntos.

Espaços topológicos - homeomorfismos

Aplicação contínua

Uma aplicação $F : D \rightarrow R$ é contínua entre os espaços topológicos D e R se $\forall A$ aberto de R , $F^{-1}(A) := \{x \in D : F(x) \in A\}$ é um aberto de D .

- Quando D é um espaço vetorial, é dito um "mapa".
- Quando R é o corpo associado ao espaço vetorial ($R = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), F é chamada uma "função". Neste caso escreve-se tradicionalmente f no lugar de F .

Homeomorfismo

Um mapa contínuo é um homeomorfismo se

- (i) é uma bijeção,
- (ii) o mapa inverso $F^{-1} : R \rightarrow D$ é contínuo.

Espaços topológicos - coberturas -1-

Teorema.

Seja E um espaço topológico de Hausdorff. Portanto

- ▶ (i) O limite de uma sucessão convergente é único
- ▶ (ii) Um singleton $\{x\}$, o gráfico de uma função contínua, um compacto, são sub-conjuntos fechados.

Cobertura aberta localmente finita

Seja (E, τ) um espaço topológico. O conjunto $\sigma \subset \tau$ é uma cobertura aberta de E se $E \subset \bigcup_{V \in \sigma} V$.

A mesma é localmente finita se $\forall x \in E$ existe um número finito de $V \in \sigma$ tal que $U_x \cap V \neq \emptyset$, com U_x uma vizinhança aberta de x .

Espaços topológicos - coberturas -2-

Refinamento de uma cobertura aberta

O conjunto $\tilde{\sigma}$ é um refinamento de σ se (i) $\tilde{\sigma}$ é uma cobertura aberta de E , (ii) $\forall \tilde{V} \in \tilde{\sigma}$ existe $V \in \sigma$ tal que $\tilde{V} \subset V$.

Espaço topológico paracompacto

Um espaço topológico E é paracompacto se uma qualquer cobertura aberta de E admite um refinamento localmente finito.

Partição da unidade

Uma partição da unidade subordinada a uma cobertura aberta σ é

- (i) um refinamento localmente finito $\tilde{\sigma} \subset \sigma$,
- (ii) uma família de funções contínuas $f_\alpha : \tilde{V}_\alpha \rightarrow [0, 1]$ tal que $\text{supp} f_\alpha \subset V_\alpha$ e $\forall x \in E, \sum_\alpha f_\alpha(x) = 1$.
($\text{supp} f_\alpha := \overline{\{x \in \tilde{V}_\alpha : f_\alpha(x) \neq 0\}}$).

Espaço topológico localmente Euclidiano

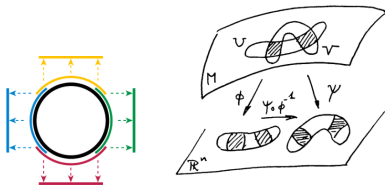
Teorema.

Um espaço de Hausdorff paracompacto E :

- ▶ (i) é um espaço topológico normal
- ▶ (ii) é um espaço que admite uma partição da unidade subordinada à um seu qualquer recobrimento aberto
- ▶ (iii) se admitir contáveis componentes conexas, é um espaço topológico completamente separável (i.e., para o qual existe uma base contável), portanto separável (i.e., a base é densa)
- ▶ (iv) os fechados de E são também Hausdorff e paracompactos.

Espaço topológico localmente Euclidiano

Um espaço topológico (E, τ) é localmente Euclidiano se $\forall x \in E$ existe $n \in \mathbb{N}$, uma vizinhança aberta U_x de x e um homeomorfismo $\phi : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$.



Mapa local

O par $(U, \phi)_x := (U_x, \phi)$ é chamado mapa local em $x \in E$.

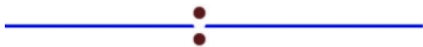
Atlas

Um atlas de E é a família de mapas $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ t.q. $E = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

Mapa de transição

Sejam (U, ϕ) e (V, ψ) duas mapas locais tais que $W := U \cap V \subset \mathbb{R}^n \neq \emptyset$. O mapa de transição é o homeomorfismo $\psi \circ \phi^{-1} : W \rightarrow W$.

♣ Exemplo de um e.t.l.e. mas não Hausdorff: a linha com duas origens (uma vez que as origens não têm vizinhanças abertas disjuntas).



Variedade topológica

Uma variedade topológica é um espaço topológico (i) localmente Euclidiano, (ii) Hausdorff, (iii) paracompacto

Dimensão e regularidade de uma variedade topológica

Uma variedade topológica \mathcal{M} tem dimensão m se $\forall x \in \mathcal{M}$, o homeomorfismo local tem valores no espaço euclidiano \mathbb{R}^m . Em particular, uma variedade topológica conexa tem dimensão m fixa. Neste caso é escrita como \mathcal{M}^m . A variedade tem regularidade \mathcal{C}^k se o mapa de transição tem regularidade \mathcal{C}^k .

Espaço topológico metrizável

Um espaço topológico (E, τ) é metrizável se existe uma métrica $d : E \times E \rightarrow [0, \infty)$ tal que a topologia induzida por d é τ .

Variedades diferenciais

- ♣ Gostaríamos de ter variedades topológicas metrizáveis.
 - Pela sua definição, são com efeito globalmente metrizáveis: por ser localmente Euclidiana, uma variedade topológica é necessariamente localmente metrizável e localmente compacta. Para ser globalmente metrizável, precisamos das seguintes propriedades: ou tem de ser completamente separável (teorema de Urysohn), ou paracompacto (teorema de Smirnov). Além disso, tem de ser normal (para aplicar o Lema de Urysohn: separação de dois fechados com uma função contínua). Enfim tem de ser Hausdorff (para que exista um aberto U tal que $x \in U$ e $y \notin U$ se $x \neq y$, e assim demonstrar que $x \neq y$ implica que $d(x, y) > 0$).

Variedade diferenciável

Uma variedade diferenciável é uma variedade topológica com mapas de transição diferenciáveis. Uma variedade suave tem mapas de transição $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Exemplos

- ▶ O espaço Euclidiano \mathbb{R}^n e todos os abertos U de \mathbb{R}^n são variedades diferenciáveis de dimensão n (toma a mapa (U, Id))
- ▶ A esfera unitária $S^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ é uma v.d. de dimensão n (para $n = 1$ é o círculo com 4 mapas, vê em cima)



- ▶ O bordo do semi-disco (2.^ª na figura) é uma variedade topológica por ser um homeomorfismo do círculo
- ▶ O "cusp" (3.^ª na figura, i.e. $\gamma(t) = (t^3, t^2)$) é uma v.t.: sendo um sub-espço de \mathbb{R}^2 (i) é Hausdorff, (ii) sendo fechado de \mathbb{R}^2 , é paracompacto, uma vez que \mathbb{R}^2 admite essas propriedades. Tem mapa $\phi(x, y) \mapsto x^{1/3}$. Não é diferenciável (na origem). É um exemplo de mapa injectivo não regular ($\dot{\gamma} = 0$ em 0). Portanto não é uma imersão.

Contra-exemplos

- ▶ A cruz \oplus é Hausdorff e paracompacto mas não é localmente Euclidiano, em nenhum espaço Euclidiano.

DEM. Suponhamos que exista um homeomorfismo de

$B(0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \oplus$ para um $n \in \mathbb{N}_*$ e um $\epsilon > 0$, onde a

origem de \mathbb{R}^n mapa no cruzamento m de \oplus . Portanto a

restrição do homeomorfismo: $B(0, \epsilon) \setminus \{0\} \rightarrow \oplus \setminus \{m\}$ é

também um homeomorfismo. Mas, $B(0, \epsilon) \setminus \{0\}$ tem no máximo 2 componentes conexas (conforme $n > 1$ ou $n = 1$),

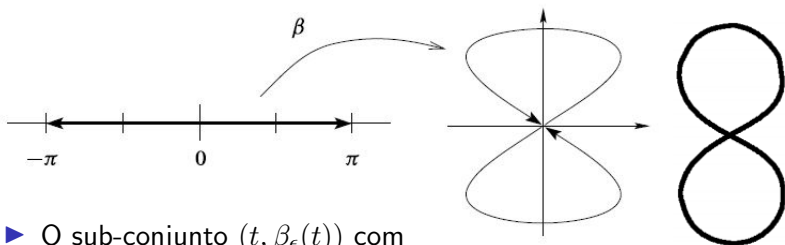
enquanto $\oplus \setminus \{m\}$ tem sempre 4, logo não pode ser um

homeomorfismo. QED. ■

- ▶ Alias, a cruz nem sequer é uma curva regular.

Contra-exemplos (continuação)

- Embora seja o gráfico de uma função suave (ao contrario da cruz), a figura do 8 (i.e., $\beta : (-\pi, +\pi) \rightarrow (\sin 2t, \sin t)$) também não é localmente Euclidiana, quer seja definida no aberto $(-\pi, +\pi)$ (logo sendo uma imersão injetiva), quer seja definida no intervalo fechado $[-\pi, \pi]$ (logo sendo uma imersão não injetiva). A demonstração é igual ao caso da cruz.



- O sub-conjunto $(t, \beta_\epsilon(t))$ com $\beta_\epsilon : (-\pi + \epsilon, +\pi - \epsilon) \rightarrow (\sin 2t, \sin t), \epsilon > 0$ é uma variedade diferenciável.

Função diferenciável

A função $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável se para qualquer mapa local (U, ϕ) a função $f \circ \phi^{-1} : A := \phi(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável.

Vetor tangente em p (definição intrínseca)

Tome $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável e uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathcal{M}$ t.q. $\gamma(0) = p$. Seja $X := \dot{\gamma}(0)$. Temos

$$Xf := \dot{\gamma}(0)f := \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0}.$$

O **operador diferencial linear** $\dot{\gamma}(0) : f \mapsto \dot{\gamma}(0)f$ é chamado **vetor tangente** à curva γ em p e pertence à um espaço vetorial $T_p\mathcal{S}$ (embora não Euclidiano como nas superfícies de \mathbb{R}^m).

- Notemos que um ponto da variedade \mathcal{M} já não pode ser escrito univocamente e globalmente como um elemento de um espaço Euclideano envolvente, como nas superfícies, mas tal caracterização existe em mapas locais.

Vetor tangente em p (definição em mapas locais)

Se escolher uma parametrização (i.e. o inverso de uma mapa local)

$\phi^{-1} : A := \phi(U) \rightarrow \mathcal{M}$ em $p \in \mathcal{M}$, vem $\phi \circ \gamma(t) =$

$(x_1(t), \dots, x_m(t))$, e então, uma vez que $\phi^{-1} \circ \phi = \text{Id}$, i.e., vem

$$\dot{\gamma}(0)f := \left. \frac{d(f \circ (\phi^{-1} \circ \phi) \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i} \dot{x}_i(0)$$

$= \left(\dot{x}_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f \circ \phi^{-1}$. Logo, a base de $T_p S$ subordinada a mapa

local é o conjunto $\Xi_p := \{g_i(p) := (\frac{\partial}{\partial x_i})_p\}$ de dimensão m , com

$\frac{\partial}{\partial x_i}$ o vetor tangente à linha de coordenada

$x_i \mapsto \Phi(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$, e com $\dot{x}_i(0)$ a componente i associada (na mapa local).

Portanto, um vetor tangente neste sistema de coordenadas local em p escreve-se como uma soma de componentes numa base, i.e.,

$$\dot{\gamma}(0) = \sum_i \dot{x}_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

- Então, apesar de o vetor tangente ser na sua definição uma noção intrínseca à variedade, i.e., é um operador diferencial com

Diferencial

uma estrutura linear associada aos operadores, o mesmo pode ser expressado localmente mediante uma parametrização escolhida (através do difeomorfismo mapa local $x_i = \phi_i(p)$).

- Mas, apesar desta representação Euclideana, o plano tangente neste mapa local não pode determinar um interior e um exterior a \mathcal{M} , porquê um ponto perto de p será associado à outro mapa.

Plano tangente em p

O plano tangente $T_p\mathcal{M}$ é o conjunto dos vetores tangentes em p . A dimensão do plano tangente é a dimensão n da base Ξ_p .

Plano & vetor tangente em p (definição extrínseca)

No caso de \mathcal{M} estar imerso em \mathbb{R}^N com $N \geq \dim\mathcal{M}$ (cf. teoremas de Whitney), o plano tangente tem o mesmo sentido de que nas superfícies: é uma aproximação linear local de S .

Diferencial de uma aplicação -1-

Diferencial de uma função

O diferencial $df_p : T_p\mathcal{M}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de uma função $f : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável é definido mediante a velocidade da curvas em p , i.e. é um vetor tangente à \mathcal{M} :

$$df_p[\dot{\gamma}(0)] := \dot{\gamma}(0)f = \left(\dot{x}(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f \circ \phi^{-1}.$$

Mapas entre variedades diferenciáveis

A aplicação $F : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ é diferenciável em $p \in \mathcal{M}^m$ se existirem $(U, \phi)_p$ de \mathcal{M}^m e $(V, \psi)_{F(p)}$ de \mathcal{N}^n tal que

- (i) $A := \phi(F^{-1}(V) \cap U)$ é aberto,
- (ii) as funções $\psi F := \psi \circ F : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e
- (iii) $\psi F_\phi := (\psi F) \circ \phi^{-1} : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $\phi(p)$.

Diferencial de uma aplicação -2-

O diferencial $dF_p : T_p\mathcal{M}^m \rightarrow T_{F(p)}\mathcal{N}^n$ é definido mediante as velocidades das curvas em p , i.e.,

$$dF_p[\dot{\gamma}(0)] := \dot{\gamma}(0)_\psi F.$$

Com efeito, verifica-se que $\dot{\gamma}(0)_\psi F \in T_{F(p)}\mathcal{N}$, sendo que

$\dot{\gamma}(0)_\psi F = \frac{d}{dt} (\psi \circ F \circ (\phi^{-1} \circ \phi) \circ \gamma)|_{t=0} = \left(\dot{x}(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \psi F \phi$, onde foi definido $(x_1, \dots, x_m) := \phi \circ \gamma$.

Logo, com a definição da imagem por F da curva γ , $\gamma_\# := F \circ \gamma$, por definição vale $dF_p[\dot{\gamma}(0)] = \frac{d}{dt} (\psi \circ F \circ \gamma)|_{t=0} = \dot{y}(0) = \dot{\gamma}_\#(0)_\psi \in T_{F(p)}\mathcal{N}$, onde foi definido $(y_1, \dots, y_n) := \psi \circ \gamma_\#$. Logo,

$$dF_p[\dot{\gamma}(0)] := \dot{\gamma}(0)_\psi F = \dot{\gamma}_\#(0)_\psi \in T_{F(p)}\mathcal{N}.$$

- Por definição do gradiente, $(DF)_p$, de F temos $dF_p[u] = (DF)_p \cdot u$, $\forall u \in \mathbb{R}^m$.

AULAS 14 (13/4/2023)

Imersões e mergulhos. Teorema do rank constante.

♣ Seja $F : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ é diferenciável, e $\psi F_\phi := \psi \circ F \circ \phi^{-1}$.

Rank (característica)

No caso Euclideiano, $\phi = \psi = \text{Id}$, logo $\text{Rk}_x F = \text{Rk} \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right)_{ij} (x)$.

No caso geral, o rank de F em p é definido como

$$\text{Rk}_p F = \text{Rk}_{\phi(p)\psi} F_\phi.$$

Imersão

Seja $F : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ ($m \leq n$) diferenciável. O mapa F é uma imersão de \mathcal{M} em \mathcal{N} se dF for injetiva,

i.e. $\forall p : dF(p)[u - v] = 0 \Rightarrow u = v$, i.e. $F'(p) \neq 0$ se $m = 1$ e $\text{Rk}_p DF = m$ se $m > 1$.

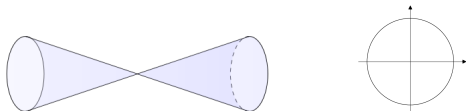
• **Nota:** Sendo dF um mapa linear entre espaços vetoriais de dimensão finita, é injetiva sse é bijetiva.

• **Exemplo 1:** O mapa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ não é injetiva ($f(x) = f(x + 1)$) mas é imersa ($Df(x_0)[u] = 0 \iff u = 0$).

Mergulho

A imersão $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é um mergulho se $F : \mathcal{M} \rightarrow F(\mathcal{M}) \subset \mathcal{N}$ é um homeomorfismo. Logo, $F(\mathcal{M})$ é uma sub-variedade de \mathcal{N} .

• **Nota:** $F : \mathcal{M} \rightarrow F(\mathcal{M})$ é evidentemente surjetiva. Logo será invertível se é também injetiva, e será um mergulho se o inverso é contínuo.



• **Exemplo 2:** Tome o duplo cone $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, r)$. Não é um mergulho por falta de injectividade (precisamente nos pontos $(0, \theta), \forall \theta \in \mathbb{R}$); não é uma imersão pois

que $(DF) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tem $\text{rank}=1$ em $(0, 0)$.

• Nota que, necessariamente, a dimensão de $f(\mathcal{M})$ igual a de \mathcal{M} .

• **Exemplo 3:** A função

$f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 : x \in S^1 \mapsto \theta \in [0, 2\pi[\mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$ (vê figura a direita) é um mergulho (é uma imersão injetiva do compacto S^1).

Teorema. Caracterização de um mergulho

- ▶ (i) Um mergulho $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é um difeomorfismo (bijecção onde F e F^{-1} são diferenciáveis) de \mathcal{M} em $F(\mathcal{M})$.
- ▶ (ii) Uma imersão injetiva é um mergulho se \mathcal{M} é compacto.

DEM. de (i) segue das definições e do teorema da função implícita.

DEM. de (ii). Sabemos que $F : \mathcal{M} \rightarrow F(\mathcal{M})$ é surjetiva e injetiva, logo invertível. Demonstremos que F^{-1} é contínua. Seja A um fechado de \mathcal{M} compacto, logo A é compacto. Por continuidade, $F(A)$ é compacto, logo $(F^{-1})^{-1}(A) = F(A)$ é fechado (sendo \mathcal{N} Hausdorff), i.e. a definição da continuidade. QED. ■

- └ B.1. Variedades diferenciáveis
- └ B.1.2. Imersões e mergulhos

- Uma consequência de (i) é que dF é um isomorfismo entre $T_p\mathcal{M}$ e $T_pF(\mathcal{M})$. Logo \mathcal{M} e $F(\mathcal{M})$ têm a mesma dimensão m .
- **Exemplo 4:** a figura 8, $f(x) := (x, \beta(x))$ definida no fechado $[-\pi, \pi]$ é uma imersão não injetiva; no aberto $I := (-\pi, \pi)$ é injetiva sem ser um mergulho, sendo $f(I)$ compacto com I aberto.

Lema

Seja \mathcal{M} uma variedade sem bordo. Uma imersão $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ de classe \mathcal{C}^1 é localmente um mergulho.

- Logo, é localmente um difeomorfismo.

DEM. Sendo \mathcal{M} sem bordo, em cada ponto p existe, pelo teorema de Heine-Borel, uma vizinhança compacta. Sendo que $F : \mathcal{M} \rightarrow F(\mathcal{M})$ é uma imersão surjetiva, falta só demonstrar que é localmente injetiva em p .

DEM. (cont.) Seja uma mapa local $\{U, \phi\}$ em p , (V, ψ) em $F(p)$, e $f := \psi \circ F \circ \phi^{-1} : U \rightarrow V$. Seja $x_0 \in A := \phi^{-1}(U)$. Pela injetividade de Df , temos $c := \inf_{v \in S^1} |Df(x_0)[v]| > 0$. D'outro

lado, o diferencial é contínuo e portanto existe $A' \subset A$ aberto tal que $x_0 \in A'$ e $\forall z \in A' : \|Df(z) - Df(x_0)\| \leq \frac{c}{2}$. Tome $x, y \in A'$; logo pelo teorema da média $\exists z \in [x; y] :$

$$|f(x) - f(y) - Df(x_0)[x - y]| = |Df(z)[x - y] - Df(x_0)[x - y]| \leq |x - y| \sup_{z \in [x; y]} \|Df(z) - Df(x_0)\| \leq$$

$|x - y|c/2$. Pela desigualdade do triângulo inversa: i.e.

$$|u - v| \leq a \Rightarrow |u| \geq |v| - a \text{ temos } |f(x) - f(y)| \geq |Df(x_0)[x - y]| - |x - y|\frac{c}{2} = \left(|Df(x_0)\left[\frac{x-y}{|x-y|}\right]| - \frac{c}{2} \right) |x - y|$$

$$\geq \left(\inf_{v \in S^1} |Df(x_0)[v]| - \frac{c}{2} \right) |x - y| = \frac{c}{2} |x - y|. \text{ QED. } \blacksquare$$

O teorema do rank constante -1-

♣ **Definição:** uma variedade é fechada se é compacta e sem bordo.

Teorema do rank constante

Seja $F : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n (m \leq n)$ uma aplicação diferenciável e de rank constante k numa vizinhança de $p \in \mathcal{M}$. Portanto existem $(U, \phi)_{\mathcal{M}}$ e $(V, \psi)_{\mathcal{N}}$ tal que

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1}(x^1, \dots, x^m) = (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k, 0, \dots, 0).$$

• Neste caso, $S := F(\mathcal{M})$ é dita uma **sub-variedade** de dimensão k de \mathcal{N} pois que $S \cap V = \psi^{-1}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k, 0, \dots, 0)$. Em outras palavras, é localmente uma inclusão, com a inclusão $S \subset \mathcal{N}$ localmente isomorfa à inclusão dos espaços vetoriais $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$.

• **Observação:** ha várias formas de entender o teorema do rank constante. Uma desta é a seguinte. Seja o operador de projeção/inclusão $\pi_k : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n : (x^1, \dots, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$.

O teorema do rank constante -2-

Assim, o teorema diz que, modulo difeomorfismos, F é equivalente a π_k ou seja $F = \psi^{-1} \circ \pi_k \circ \phi$. De outro lado, uma vez que $(DF)_p$ tem rank igual a k sabemos que existem mapas lineares e invertíveis P e Q tal que $P(DF)_pQ = \pi_k$ (\star). Portanto vale $F(p) = (P^{-1}\psi)^{-1}(DF)_pQ\phi$: dizemos que F "é semelhante" a DF , a menos de difeomorfismos. Em particular, um mapa com rank constante é localmente em p um mapa linear de mesmo rank, a custa de difeomorfismos.

- Intuitivamente: uma vez que $(DF)_p[x]$, $x \in \mathbb{R}^m$ é localmente a equação de um hyper-plano de dimensão k passando pela origem, por isometrias é o hyper-plano $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$ (efetua-se k rotações).
- **Demonstremos** (\star): Seja V e W dois espaços vetoriais de dimensão $m \geq k$ e $n \geq k$. Seja $A : V \rightarrow W$ e $B : V \rightarrow W$ dois operadores lineares de rank k . Então existem mapas P e Q invertíveis tal que $A = P^{-1}BQ$. Com efeito seja $\{e_{k+1}, \dots, e_m\}$

O teorema do rank constante -3-

Completemos as mesmas para ter duas bases de V , i.e.

$\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_m\}$ e $\{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_m\}$. Definemos enfim o operador linear $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ de maneira que $Qe_i = f_i$ para $1 \leq i \leq m$. Reparemos que $Qu = 0$, onde $u := \alpha_i e_i$, sse $\alpha_i Qe_i = 0$ i.e. $\alpha_i f_i = 0$ sse $\alpha_i = 0$, logo $u = 0$. Portanto Q é invertível. Seja $z_i := Ae_i$ e $w_i := Bf_i$ para $1 \leq i \leq k$.

Completa-se as mesmas para ter duas bases de W , i.e.

$\{z_1, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_n\}$. Define-se enfim $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de maneira que $Pz_i = w_i$ para $1 \leq i \leq n$. P é também invertível. Ora,

$$PAe_i = Pz_i = w_i = Bf_i = BQe_i, \quad 1 \leq i \leq k,$$

QED.

- No nosso caso, $A = (DF)_p$ e $B = \pi_k$, e $V = \mathbb{R}^m$, $W = \mathbb{R}^n$, onde $n-k$ vezes

O teorema do rank constante -4-

DEM (do teorema). É equivalente provar a tese para $F \sim \psi_0 \circ F \circ \phi_0^{-1} : V \rightarrow W$, com $V \subset \mathbb{R}^m, W \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $p \in V$ (com ψ_0, ϕ_0^{-1} difeomorfismos qualqueis). Assim os espaços de partida e chegada são Euclidianos. Sem perda de generalidade, podemos supor $p = 0, F(p) = F(0) = 0$, e também que $(\frac{\partial F_i}{\partial x^j})_{1 \leq i, j \leq k}$ é a sub-matriz $k \times k$ de $DF(0)$ de rank k . Definimos então $x := (x_1, \dots, x_m)$, e $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^m: \tilde{x} := \phi(x_1, \dots, x_m) := (F^1(x), \dots, F^k(x), x^{k+1}, \dots, x^m)$.

Então $x = \phi^{-1}(\tilde{x})$, caso o inverso de ϕ existir. Verifiquemos esta afirmação. Temos que $D\phi(0) = \begin{pmatrix} (\frac{\partial F_i}{\partial x^j})_{1 \leq i, j \leq k} & \star \\ 0 & \text{diag}1 \end{pmatrix}$ é de rank

cheio, logo invertível, logo pelo teorema do mapa inverso, existe $\phi^{-1} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \tilde{V} \subset V$. Portanto, temos $F \circ \phi^{-1}(\tilde{x}) = (F^1(x), \dots, F^k(x), F^{k+1}(x), \dots, F^n(x)) = (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k, \tilde{F}^{k+1}(\tilde{x}), \dots, \tilde{F}^n(\tilde{x}))$ com $\tilde{F}^l := F^l \circ \phi^{-1}$. Logo

O teorema do rank constante -5-

$$D(F \circ \phi^{-1})(0) = DF(\phi^{-1}(0))D\phi^{-1}(0), \text{ com}$$

$$D(F \circ \phi^{-1})(0) = \begin{pmatrix} \text{diag}1 & 0 \\ \star & (\frac{\partial \tilde{F}^i}{\partial \tilde{x}^j})_{k+1 \leq i, j \leq m} \end{pmatrix}. \text{ Mas, } \phi \text{ é um}$$

difeomorfismo, logo $\text{rk}(F \circ \phi^{-1}) = \text{rk}F = \text{rk}D(F \circ \phi^{-1})(0) = k$, e daí $\text{rk}(\frac{\partial \tilde{F}^i}{\partial \tilde{x}^j}) = 0$, logo $(\frac{\partial \tilde{F}^i}{\partial \tilde{x}^j}) = 0$, onde $k + 1 \leq i, j \leq m$, logo \tilde{F} depende apenas de $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k)$. Definimos então o mapa

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n :$$

$$T(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n) := (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k, \tilde{x}^{k+1} + \tilde{F}^{k+1}(\tilde{x}), \dots, \tilde{x}^n + \tilde{F}^n(\tilde{x}))$$

que verifica $T(0) = 0$ e $DT(0) = \begin{pmatrix} \text{diag}1 & 0 \\ \star & \text{diag}1 \end{pmatrix}$. Logo T^{-1}

existe numa vizinhança de $p = 0$ e com valores num aberto $\tilde{W} \subset \mathbb{R}^n$ e verifica

$$T^{-1} \circ F \circ \phi^{-1}(\tilde{x}) = T^{-1}(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k, \tilde{F}^{k+1}(\tilde{x}), \dots, \tilde{F}^n(\tilde{x}))$$

A questão da existência de mergulhos Euclidianos

DEM (cont.) = $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k, \overbrace{0, \dots, 0}^{n-k \text{ vezes}})$, uma vez que
 $T(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k, 0, \dots, 0) = (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k, \tilde{F}^{k+1}(\tilde{x}), \dots, \tilde{F}^n(\tilde{x}))$.
 A tese segue com (ϕ, \tilde{V}) e (ψ, \tilde{W}) onde $\psi := T^{-1}$. QED. ■

♣ A questão principal é a averiguar se uma variedade de dimensão m (i) é homeomorfa **globalmente** à um conjunto m -dimensional de um espaço Euclidiano, e tal que (ii) em cada ponto deste conjunto existe um plano tangente (i.e., um "interior", e um "exterior").

• **Desta forma conseguimos passar de uma geometria intrínseca a uma geometria extrínseca.**

A 1.^a condição requer encontrar uma aplicação

$F : \mathcal{M} \rightarrow F(\mathcal{M}) \subset \mathbb{R}^N$ injetiva e continua tal que F^{-1} seja continua.

A 2.^a condição a sua vez requer que F seja uma imersão.

- Assim, as duas condições equivalem a procurar mergulhos $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^N$ com N mais próximo quanto possível de m .
- Quando tal F existir, pelo teorema do rank constante, obterá-se que $S := F(\mathcal{M})$ é uma sub-variedade de \mathbb{R}^N de dimensão m .

• **Exemplo 5:** A função $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} : \theta \mapsto f(\theta) = \theta^2$ é diferenciável, com $df = 2\theta$ injetivo. De certeza, não é um mergulho por falta de injetividade de f .

Ora, se for definida em $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, f se torna periódica.

• Mas, não podem existir mergulhos $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ uma vez que não pode existir uma imersão $f : S^1 \rightarrow f(S^1)$ injetiva (pois que S^1 é compacto) e periodica (sendo definida em S^1), logo uma contradição.

• **Dúvida:** não existem mergulhos, mas será que existe uma imersão $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$?

A resposta negativa no caso das variedades fechadas é objeto do seguinte lema.

Lema. (S^n não se imerge em \mathbb{R}^n)

Seja \mathcal{M} compacto sem bordo de dimensão n . Não existe uma imersão $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

DEM. Suponhamos que tal imersão existe. Seja $K \subset \mathcal{M}$ fechado, logo K é compacto, donde $f(K)$ é compacto por continuidade de f , logo é fechado (sendo \mathbb{R}^n Hausdorff). Portanto f é um mapa fechado. Seja $A \subset \mathcal{M}$ aberto. Seja $A = \cup_i B_i$ com B_i bolas abertas suficientemente pequenas, logo vem $f(A) = \cup_i f(B_i)$. Pelo teorema acima, f é localmente um difeomorfismo, isto é, $f(B_i) = (f^{-1})^{-1}(B_i)$ e então $f(A)$ são abertos. Pelo teorema do rank constante, $f(\mathcal{M})$ é uma sub-variedade de \mathbb{R}^n com f um mapa aberto e fechado em \mathbb{R}^n . Mas, a única sub-variedade não vazia, aberta e fechada de \mathbb{R}^n é \mathbb{R}^n na sua totalidade. Sendo $f(\mathcal{M})$ compacta, saí uma contradição. QED. ■

AULA 15 (20/4/2023)

Teoremas de Whitney: forma fraca, clássica, e forte.

Teorema de Whitney - forma super fraca

Seja \mathcal{M} uma variedade diferenciável suave, compacta, de dimensão $m \geq 2$. Existe $N \in \mathbb{N}_*$ e um mergulho $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^N$

DEM. Seja $\{U_i, \phi_i\}$ um atlas de \mathcal{M} . Por compacidade, existe um sub-atlas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}$ com cardinalidade finita k . Seja $\{f_\alpha, 1 \leq \alpha \leq k\}$ uma partição da unidade subordinada a $\{U_\alpha\}_{1 \leq \alpha \leq k}$.

Definimos o mapa contínuo $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{k(m+1)}$:

$$p \mapsto (f_1(p)\phi_1(p), \dots, f_k(p)\phi_k(p), f_1(p), \dots, f_k(p)).$$

- Step 1 (Injetividade de Φ). Suponhamos $\Phi(p_1) = \Phi(p_2)$, logo existe α_0 t.q. $f_{\alpha_0}(p_1) = f_{\alpha_0}(p_2) \neq 0$. Portanto $\phi_{\alpha_0}(p_1) = \phi_{\alpha_0}(p_2)$, de maneira que $p_1 = p_2$ pela injetividade de ϕ_{α_0} .

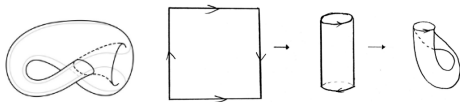
- Step 2 (Injetividade de $d\Phi_p$) Toma $X_p \in T_p\mathcal{M}$. Temos $d\Phi_p[X_p] = (df_{1p}[X_p]\phi_1(p) + f_1(p)d\phi_{1p}[X_p], \dots, df_{kp}[X_p]\phi_k(p) + f_k(p)d\phi_{kp}[X_p], df_{1p}, \dots, df_{kp})$. Logo $d\Phi_p[X_p] = 0$ implica $df_{\alpha p} = 0, \forall \alpha$, donde $f_\alpha(p)d\phi_{\alpha p}[X_p] = 0, \forall \alpha$. Porém, existe α_0 t.q. $f_{\alpha_0}(p) \neq 0$, logo $d\phi_{\alpha_0 p}[X_p] = 0$.

Sendo ϕ_{α_0} um difeomorfismo, vem $X_p = 0$. Concluimos com (ii) do teorema acima (p. 200) e $N = k(m+1)$. QED. ■

Teorema de Whitney - forma super forte

Seja \mathcal{M} uma variedade diferenciável de dimensão $m \geq 2$.

- ▶ Existe uma imersão $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{2m-1}$
- ▶ Existe um mergulho $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$
- ▶ Se \mathcal{M} é compacto e orientável, ou compacto com bordo não vazio, ou se $m \neq 2^k, k \in \mathbb{N}_*$, existe um mergulho $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{2m-1}$.

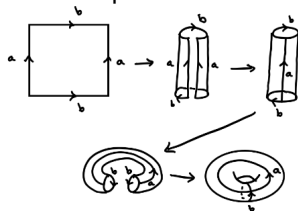


- A garrafa de Klein (vê figura) é um exemplo de 2-variedade que pode ser imersa em \mathbb{R}^3 mas não mergulhada em \mathbb{R}^3 (por falta de injetividade uma vez que tem auto-interseções).

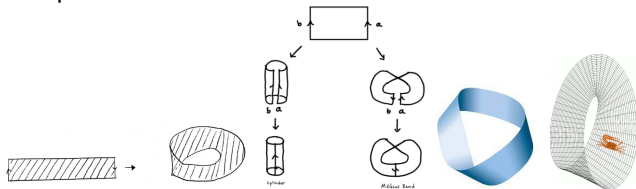
Outros exemplos

♣ Já falámos da construção do toro como exemplo de 2-variedade orientável.

É evidente que mergulha em \mathbb{R}^3 .



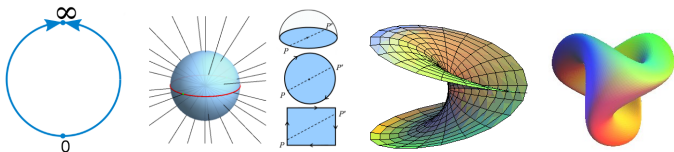
♣ Um exemplo de 2-variedade não orientável é a fita de Moebius:



• A fita de Möbius tem um bordo homeomorfo ao círculo, logo por Whitney é um compacto com bordo que mergulhe em \mathbb{R}^3 .

Plano real projetivo

O plano real projetivo $\mathbb{R}P^n$ é uma variedade suave e compacta de dimensão n definida como o conjunto de todas as retas que passam pela origem em \mathbb{R}^{n+1} .



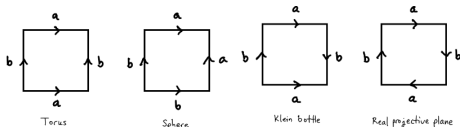
♣ $\mathbb{R}P^1$ (a esquerda na figura) consiste no semi-círculo com identificação das extremidades. $\mathbb{R}P^2$ (no meio na figura) é um hemisfêro de S^2 , a sua vez homeomorfo ao disco, e com identificação dos pontos antipodais no círculo unitário. Por homeomorfismo é o quadrado com apropriadas identificações e orientações. Por Whitney, existe uma imersão não injetiva em \mathbb{R}^3 dada pela superfície de Boy (duas últimas a direita na figura).

♣ Salientamos o facto de que quando se fala de mergulhar uma variedade \mathcal{M} em \mathbb{R}^N entendemos encontrar uma copia difeomorfa de \mathcal{M} que seja contida em \mathbb{R}^N (pelo teorema do rank constante), mas não se trata de uma parametrização de \mathcal{M} . Se for um mergulho somos homeomorfos a uma superfície injetiva (sem auto-interseções, como a esfera, o toro, a fita de Möbius), se for apenas uma imersão, logo N é inferior de uma unidade mas a superfície pode não ser injetiva (Ex. a garafa de Klein ou o plano projetivo). Notemos que $S = f(\mathcal{M})$ tem a mesma dimensão m que \mathcal{M} e admite como topolgia a topolgia induzida, i.e. seus abertos são os abertos de \mathbb{R}^N intersecatos com S . Para além, mediante tais imersões Euclidianas conseguimos identificar um vetor tangente enquanto operador diferencial em $T_p\mathcal{M}$ com um vetor tangente Euclidiano em $T_p\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N$; além de mais, pode-se falar de comprimento de um vetor tangente (a partida um operador diferencial) pois que " $X^p \in T_p\mathcal{M} \subset T_p\mathbb{R}^N$ ". Portanto a partir de agora, quando falamos de vetor tangente, intendemos um elemento

- └ B.1. Variedades diferenciáveis
- └ B.1.2. Imersões e mergulhos

do plano tangente que tem a sua estrutura linear própria (não Euclidiana), mas que é isomorfa a uma estrutura Euclidiana de dimensão superior que confere ao vetor uma interpretação clássica como uma velocidade num espaço Euclidiano.

- Recapitulemos alguns exemplos de variedades compactas orientáveis ou não:



- Um espaço vetorial $(K - 1)$ -dimensional de \mathbb{R}^K é determinado univocamente por uma reta em \mathbb{R}^K normal a este plano que passa pela origem de \mathbb{R}^K . Logo a família dos sub-espacos $(K - 1)$ -dimensionais de \mathbb{R}^K é caracterizada pelo plano projetivo $\mathbb{R}P^{K-1}$. Seja $[v]$ uma linha paralela ao vetor $v \in \mathbb{R}^K$ que passa pela origem. Definimos o complemento ortogonal de $[v] \in \mathbb{R}^K$ como:

$$\varpi_{[v]} := \{u \in \mathbb{R}^K : u \cdot v = 0\}.$$
 O mesmo é isomorfo a \mathbb{R}^{K-1} . Definimos então a projecção em $\Pi_{[v]} : \mathbb{R}^K \rightarrow \varpi_{[v]}$.

Teoremas de Sard

Lema 1

Seja $f : I = [0, 1]^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função \mathcal{C}^1 . Se $m < n$ então $f(I)$ tem medida (de Lebesgue em \mathbb{R}^n) zero. Se $m = n$ e $A \subset I$ tem medida zero, então $f(A)$ tem medida zero.

Lema 2: Sard fraco (baby Sard)

Seja $F : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ uma aplicação \mathcal{C}^1 . Se $m < n$ então $F(\mathcal{M})$ tem medida (induzida pela medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n) zero.

- Corolário: Uma curva "space-filling" não é \mathcal{C}^1 .

Lema 2: Sard forte

Seja $F : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ uma aplicação \mathcal{C}^k . Se $k > m/n - 1$ então $F(C)$ tem medida (induzida pela medida de Lebesgue em \mathbb{R}^n) zero, onde $C \subset \mathcal{M}$ é o conjunto dos pontos críticos de F .

- └ B.1. Variedades diferenciáveis
- └ B.1.2. Imersões e mergulhos

♣ Ao fim de demonstrar o teorema de Whitney na sua forma clássica (forma mediana), demonstraremos primeiro dois resultados.

Teorema. Imersão por projeção

Se uma variedade \mathcal{M} de dimensão m admitir uma imersão injetiva em \mathbb{R}^K com $K > 2m + 1$, então admite também uma imersão injetiva em \mathbb{R}^{K-1} .

DEM. Vamos projetar a imersão $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^K$ em \mathbb{R}^{K-1} e averiguar se a mesma é (i) injetiva, (ii) uma imersão. Seja $\phi_{[v]} = \Pi_{[v]} \circ \phi$ uma projeção ao longo de $[v] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^{K-1}$, i.e. num plano perpendicular ao vetor v .

• **Step 1.** Suponhamos que $\forall [v] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^{K-1}$, $\phi_{[v]}$ não é injetiva. Logo existem $p \neq q \in \mathcal{M}$, t.q. $\phi_{[v]}(p) = \phi_{[v]}(q)$. Mas, $\phi(p) \neq \phi(q)$ (pela injetividade de ϕ) e $\Pi_{[v]}[\phi(p) - \phi(q)] = 0$, logo $[\phi(p) - \phi(q)] = [v]$. Seja a variedade $\mathcal{N} := \mathcal{M} \times \mathcal{M} \setminus \{(p, p), p \in \mathcal{M}\}$ de dimensão $2m$. O mapa $\alpha : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{K-1}$:

$(p, q) \mapsto [\phi(p) - \phi(q)] = [v]$ é suave (i.e., depende de forma suave de $\phi(p) - \phi(q)$ que a sua vez depende de forma suave de p e q).

Mas, sendo que por hipótese a dimensão de \mathcal{N} ($2m$) é estritamente inferior a dimensão de $\mathbb{R}\mathbb{P}^{K-1}$ ($K - 1$), o teorema de Sard fraco (não demonstrado) implica que a imagem de α é desprezável em $\mathbb{R}\mathbb{P}^{K-1}$. Portanto, os $[v] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^{K-1}$ t.q. $\phi_{[v]}$ é injetiva são todos exceto um conjunto desprezável.

• **Step 2.** Suponhamos que $\forall [v] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^{K-1}$, $\phi_{[v]}$ não é uma imersão. Logo existem $p \in \mathcal{M}$ e $X_p \neq 0 \in T_p\mathcal{M}$, t.q. $d\phi_{[v]}(p)[X_p] = 0 = d\Pi_{[v]}(\phi_p)[d\phi_p[X_p]] = \Pi_{[v]}[d\phi_p[X_p]]$. Logo $[v] = [d\phi_p[X_p]]$. O mapa $\beta : \mathcal{M} \times T\mathcal{M} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{K-1}$:

$\{(p, X_p) : X_p \neq 0\} \mapsto [d\phi_p[X_p]]$ é suave de uma variedade de dimensão $2m$ a uma variedade de dimensão $K - 1$, logo tem imagem desprezável. Portanto, os $[v] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^{K-1}$ tal que $D\phi_{[v]}$ é injetiva são todos exceto um conjunto desprezável.

• **Step 3.** Podemos concluir que existe pelo menos um v tal que $\phi_{[v]}$ é uma imersão injetiva. QED. ■

Corolário

Se uma variedade \mathcal{M} de dimensão m admitir uma imersão em \mathbb{R}^{2m+1} , logo admite uma imersão em \mathbb{R}^{2m} .

DEM. Seja $\phi : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ uma imersão e $\phi_{[v]} = \Pi_{[v]} \circ \phi$ uma projeção ao longo de $[v] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^{2m}$. Suponhamos que $\forall [v] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^{K-1}$, $\phi_{[v]}$ não é uma imersão. Então existem $p \in \mathcal{M}$ e $X_p \neq 0 \in T_p\mathcal{M}$, t.q. $d\phi_{[v]}(p)\left[\frac{X_p}{\|X_p\|}\right] = 0 = \Pi_{[v]}(\phi_p)d\phi_p\left[\frac{X_p}{\|X_p\|}\right]$, logo $[v] = \left[d\phi_p\left[\frac{X_p}{\|X_p\|}\right]\right]$. Seja o mapa $\bar{\beta} : \mathcal{U} := \{(p, X_p) : \|X_p\| = 1\} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{2m} : (p, X_p) \mapsto [d\phi_p[X_p]]$ é suave de uma variedade de dimensão $2m - 1$ a uma de dimensão $2m$, logo a tese. QED. ■

♣ Juntando tudo, acabamos de demonstrar o resultado seguinte:

Teorema de Whitney - forma clássica

Seja uma variedade compacta \mathcal{M} de dimensão m . Então existe um mergulho em \mathbb{R}^{2m+1} e uma imersão em \mathbb{R}^{2m} .

AULA 16 (27/4/2023)

Métrica e variedade Riemanniana. Isometrias e teorema de Nash-Kuiper. Conexão. Vetores e covetores, tensores.

Métrica e variedades Riemannianas

♣ Tendo as nossas imersões Euclidianas, falta agora introduzir um modo de calcular o comprimento de vetores. Será dado pelo conceito de métrica Riemanniana.

- Num espaço Euclidiano com coordenadas Cartesianas $\{x^i\}$ o comprimento do vetor $u = \sum_i u^i e_i$ é dado pela forma quadrática $ds^2(u, v) = dx[u] \cdot dx[v] = \sum_i dx^i[u] dx^i[v] = \sum_i u^i v^i$, i.e., $ds = \sqrt{ds^2(u, u)} = \sqrt{(u^i)^2}$. A forma quadrática $ds^2(u, v) := \sum_i dp[u] \cdot dp[v]$ onde p é o mapa posição, é chamada métrica (pois permite fazer medições de comprimentos e ângulos entre vetores).

- Numa variedade diferenciável \mathcal{M} , acontece que a métrica Riemanniana de \mathcal{M} pode (mas não deve) ser definida localmente mediante a "parametrização" $\Phi := \phi^{-1} : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset S$, logo é uma métrica induzida (pelo mapa Φ e pelo produto interno de \mathbb{R}^m) definida localmente como $g_{ij}(p) := \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(\phi(p)) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(\phi(p))$

(com \cdot o produto interno de \mathbb{R}^m). Define uma forma quadrática no plano tangente: $\forall u, v \in T_p\mathcal{M}, g_{\mathcal{M}}(u, v) := g_{ij}u^i v^j$, logo deve ser definida positiva, portanto supomos que $\Phi = \phi^{-1}$ e $\Psi = \psi^{-1}$ são imersões (i.e., $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ é linearmente independente de $\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}$ se $i \neq j$). Seja \mathcal{M} uma variedade diferenciável de dimensão m .

Métrica e variedade Riemannianas - definição

Uma métrica Riemanniana é uma família de operadores bilineares $g_{ij} : \mathcal{M} \rightarrow \text{Bilinear}(T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M}) : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ simétricos, definidos positivos e suaves (pelo teorema de Riesz, pode ser representado por uma matriz $g_{ij}(p) \in \mathbb{R}_{\text{sym},+}^{m \times m}$).

O produto interno associado à métrica é definido como a forma bilinear $g_{\mathcal{M}}(u, v)_p = \langle u|v \rangle_g(p) := \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(p)u^i(p)v^j(p)$, onde $u = \sum_i u^i g_i$ e $v = \sum_j v^j g_j$ (sendo o vetor de base $g_k(p)$ de $T_p\mathcal{M}$ definido classicamente como $g_k(p) := \partial_k \Phi(\phi(p))$).

• **Nota:** ser suaves significa que a função $p \in U \mapsto g_{\mathcal{M}}(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})_p$ é suave em U , com $\frac{\partial}{\partial x_i} := g^i$ as linhas de coordenadas.

Variedade Riemanniana - definição

Uma variedade diferenciável dotada de uma métrica Riemanniana é uma variedade Riemanniana.

- A métrica induzida é um exemplo de métrica, definida localmente ou globalmente quando \mathcal{M} é imerso em \mathbb{R}^m (como as superfícies regulares de \mathbb{R}^3), da maneira seguinte:

$$g_{\mathcal{M}ij} := g_i(p) \cdot g_j(p) = \partial_i \Phi(\phi(p)) \cdot \partial_j \Phi(\phi(p)).$$

Isometria entre variedades mediante a métrica induzida

Seja $F : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathcal{N}^n$ uma aplicação diferenciável. A posição de $p \in \mathcal{M}$ é o mapa local $p : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M} : x \in A \mapsto p = \Phi(x)$.

Sejam $u := \dot{\gamma}(0), v := \dot{\alpha}(0) \in T_p \mathcal{M}$ duas velocidades de curvas de \mathcal{M} , i.e., dois elementos do plano tangente em $p = \gamma(0) = \alpha(0)$.

Temos $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Seja $a := u^i e_i \in A$ e $b = v^i e_i \in A$ onde $\{e_i\}$ é a base de \mathbb{R}^m (foi suposto que $\phi(p) = 0 \in A$).

Existência de mergulhos isométricos.

- Seja a métrica induzida de \mathcal{M} , i.e. $\mathbb{I}_{1\mathcal{M}}(u, v) = dp[a] \cdot dp[b] = \sum_{i,j} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} dx^i[a] \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} dx^j[b] = \sum_{i,j} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} u^i \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} v^j =: g_{\mathcal{M}}(u, v)_p$.
- Seja $q := F(p)$ e os mapas $F \circ \Phi : A \rightarrow \mathcal{N}$, $\psi : \mathcal{N} \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$, e $\Psi := \psi^{-1}$. Temos $dq : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{F(p)}\mathcal{N}$. D'outro lado, temos que a métrica induzida em \mathcal{N} é $\mathbb{I}_{1\mathcal{N}}(dq[u], dq[v]) = dq[u] \cdot dq[v]$

$$= \sum_{i,j} \frac{\partial(\Psi \circ \psi) \circ F \circ \Phi}{\partial x^i} dx^i[u] \cdot \frac{\partial(\Psi \circ \psi) \circ F \circ \Phi}{\partial x^j} dx^j[v]$$

$$= \sum_{i,j,m,l} \frac{\partial \Psi}{\partial y^l} \frac{\partial(\psi \circ F \circ \Phi)^l}{\partial x^i} u^i \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y^m} \frac{\partial(\psi \circ F \circ \Phi)^m}{\partial x^j} v^j$$

$$= \sum_{i,j,m,l} \frac{\partial \Psi}{\partial y^l} dF^l(p)[u] \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y^m} dF^m(p)[v]$$

$$=: g_{\mathcal{N}}(dF(p)[u], dF(p)[v])_{F(p)},$$

onde por definição,

$$dF(p)[u] = \frac{d}{dt} (\psi \circ \gamma_{\sharp}) (0), dF(p)[v] = \frac{d}{dt} (\psi \circ \alpha_{\sharp}) (0) \in T_{F(p)}\mathcal{N}.$$

Isometria Riemanniana - definição

Uma aplicação $F : (\mathcal{M}^m, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}^n, g_{\mathcal{N}})$ é uma isometria Riemanniana se é diferenciável e se $dp \cdot dp = dq \cdot dq$, i.e., se $\mathbb{I}_{1\mathcal{M}}(u, v) = \mathbb{I}_{1\mathcal{N}}(u, v)$, i.e., se

$$g_{\mathcal{M}}(u, v)_p = g_{\mathcal{N}}(dF(p)[u], dF(p)[v])_{F(p)}.$$

Distância Riemanniana

Se \mathcal{M} for uma variedade Riemanniana conexa conseguimos definir uma métrica global em \mathcal{M} , $d_g(x, y) = \inf_{\gamma} \int_a^b g_{\mathcal{M}}(\gamma', \gamma') dt$ com γ uma curva suave com extremidades x e y definida no intervalo $[a, b]$. Assim, (\mathcal{M}, d_g) torna-se um espaço métrico.

Teoremas de Nash-Kuiper -1-

Aplicação métrica (mapa métrico)

A aplicação $F : X \rightarrow Y$ entre espaços métricos é dita uma aplicação métrica se

$$d_Y(F(a), F(b)) \leq d_X(a, b),$$

onde d_X e d_Y são as funções métricas de X e Y , respetivamente.

Teorema de Nash-Kuiper (1954/56) (forma original)

Seja uma variedade diferenciável \mathcal{C}^k , $k \geq 3$ de dimensão m e uma métrica $g_{\mathcal{M}} : p \in \mathcal{M} \rightarrow \text{Bilinear}(T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M}; \mathbb{R}_{\text{sym},+}^{m \times m})$ suave em \mathcal{M} . Seja $f : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão, onde $n \geq m + 1$. Se f for um mapa métrico então $\forall \epsilon > 0$ existem imersões $f_\epsilon : \mathcal{M}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 tal que

- ▶ f_ϵ seja uma isometria Riemanniana
- ▶ f_ϵ seja ϵ -perto de f , i.e. $\|f_\epsilon - f\| < \epsilon, \forall x \in \mathcal{M}$.

- └ B.1. Variedades diferenciáveis
- └ B.1.2. Imersões e mergulhos

Teoremas de Nash-Kuiper -2-

Start with a piece of paper and turn it into a cylinder: this is easy. The next step is the hard part. To turn the cylinder into a donut without stretching or tearing the paper. Intuitively this seems to be impossible. The outer circumference of the donut is much longer than the inner, but in the original cylinder they are of the same length. By Nash's theorem this is never the less possible, at least theoretically. Nash proved the theorem in 1954, but it was only in 2012 a multidisciplinary team in France, the HEVEA project, was able to image the process where the cylinder is bent into a donut, in an isometric way. The images illustrate the process; the paper is warped by an infinite sequence of waves, piling up to a donut surface so that the originally piece of paper is kept intact.



Teoremas de Nash-Kuiper -3-

Teorema de Nash-Kuiper (1954/56)

Seja uma variedade diferenciável \mathcal{C}^k , $k \geq 3$ de dimensão m e uma métrica $g_{\mathcal{M}} : p \in \mathcal{M} \rightarrow \text{Bilinear}(T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M}; \mathbb{R}_{\text{sym},+}^{m \times m})$ suave em \mathcal{M} . Existe um mergulho $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$, \mathcal{C}^k , $k \geq 3$ isométrico, i.e.: $g_{\mathcal{M}}(u, v)_p = g_{\mathbb{R}^n}(df_p[u], df_p[v]) = df_p[u] \cdot df_p[v]$, com $n = (m + 1) m(3m + 11)/2$ (se \mathcal{M} for compacta, $n = m(3m + 11)/2$).

- Observemos que o teorema diz que o comprimento e os ângulos dos vetores tangentes são conservados. Salientamos também que se trata de mergulhos em superfícies Riemannianas, logo a isometria é sempre local (no sentido dos planos tangentes). Em particular não é um resultado de isometria global entre espaços métricos. Uma consequência do teorema é que a imagem de uma curva em \mathcal{M} pelo mergulho terá o mesmo comprimento que a

(pois que integramos a velocidade/vetor tangente cujo modulo é constante)

- Seja \mathcal{M} uma variedade de dimensão m . Sabemos que existe um mergulho (isométrico ou não) ξ tal que $\xi(\mathcal{M}) \subset \mathbb{R}^n$ para n bastante grande e tal que $\xi(\mathcal{M})$ tem dimensão m . Chamemos $\bar{x}^k = \xi^k(p)$, $\forall p \in \mathcal{M}$ a coordenada Cartesiana associada a $p \in \mathcal{M}$. Neste sentido, o vetor tangente em p é (isomorfo a) $g_i := \frac{\partial \bar{x}}{\partial s^i}$ onde $s^i = \phi^i(p)$, com $1 \leq i \leq m$ e $\phi(p) \in A \subset \mathbb{R}^m$. D'outro lado, pelo teorema do rank constante, $s^i = \phi^i(\xi^{-1}(\bar{x})) = \chi^i(x)$ onde $x = (x^1, \dots, x^m)$ e $\bar{x} = (x, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-m \text{ vezes}})$.

Mudança de variável

Consideremos um difeomorfismo de mudança de coordenadas $\{x^k\}_k \rightarrow \{s^i\}_i$, i.e., com $s^i = \chi^i(x^k)$, $1 \leq i, k \leq m$ (onde χ é um difeomorfismo entre os abertos $B \subset \xi(\mathcal{M})$ e $A \subset \mathbb{R}^m$). Lembra-se que $\xi(\mathcal{M})$ é uma sub-variedade de dimensão m de \mathbb{R}^n .

Conexão

-1-

• Recordemos a definição do diferencial em Cartesiano: seja $w = \sum_l w_{\text{Cart.}}^l e_l$, logo $dx^l[w] = w_{\text{Cart.}}^l$. Em coordenadas curvilíneas (isto inclui Cartesianas), temos $w = \sum_l w^l g_l$ com o elemento da base movél $g_l = \frac{\partial x}{\partial s^l}$ ($x = \xi(p)$), logo $ds^i[w] = w^i$. Em particular, $ds^i[g_j] = \delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $= 0$ senão. Pelo teorema de Riesz existe um vetor "dual" g^i tal que $ds^i[g_j] = g^i \cdot g_j = \delta_{ij}$ e por linearidade,

$$ds^i[w] = g^i \cdot w = w^i.$$

• Observemos então que por definição dos símbolos de Christoffel,

$$\begin{aligned} \Gamma_{lk}^i &= g^i \cdot \partial_l g_k = ds^i[\partial_l g_k] = \sum_l \frac{\partial s^i}{\partial x^p} dx^p[\partial_l g_k] = \sum_p \frac{\partial s^i}{\partial x^p} dx^p \left[\frac{\partial}{\partial s^l} \frac{\partial x}{\partial s^k} \right] \\ &= \sum_p \frac{\partial^2 x^p}{\partial s^l \partial s^k} \frac{\partial s^i}{\partial x^p} \quad (\bullet), \end{aligned}$$

onde $1 \leq i, l, k \leq m$.

Conexão

-2-

Lema.

Sejam $\{x^i\}_i$ um sistema de coordenadas Cartesianas, e $\{s^j\}_j$ um outro sistema de coordenadas (por exemplo, curvilíneas). Então os símbolos de Christoffel verificam

$$\Gamma_{nk}^i = - \sum_{m,l} \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial x^l}{\partial s^n} \frac{\partial x^m}{\partial s^k} \quad (\text{CHRIS}).$$

DEM. Sendo que $0 = \frac{\partial}{\partial s^n} \delta_{ij} = \frac{\partial}{\partial s^n} \left(\frac{\partial s^i}{\partial s^k} \right) = \frac{\partial}{\partial s^n} \left(\sum_l \frac{\partial s^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial s^k} \right) = \sum_l \frac{\partial^2 x^l}{\partial s^n \partial s^k} \frac{\partial s^i}{\partial x^l} + \sum_{m,l} \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial s^n} \frac{\partial x^l}{\partial s^k}$, temos (permutando os índices m e l) $\sum_l \frac{\partial^2 x^l}{\partial s^n \partial s^k} \frac{\partial s^i}{\partial x^l} = - \sum_{m,l} \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^m \partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial s^n} \frac{\partial x^m}{\partial s^k}$. A tese segue de (●). QED. ■

● Notemos que a definição (CHRIS) é mais geral de que (●) pois não necessita ser simétrica em n e k .

Conexão

-3-

- Seja $\{(s')^p\}_p = \{s^{p'}\}_{p'}$ um outro sistema de coordenadas locais curvilíneas, e notemos $s^{p'} = (s')^p$. Queremos é averiguar como se transformem os símbolos perante uma mudança de variável.

Lema. Lei de transformação (Classe de equivalência)

Os símbolos Γ_{pq}^k se transformam após mudança de base $\{s^p\}_k \rightarrow \{s^{p'}\}_{p'}$ como

$$\Gamma_{n'k'}^{i'} = \sum_i \frac{\partial s^{i'}}{\partial s^i} \left(\sum_{k,n} \Gamma_{nk}^i \frac{\partial s^n}{\partial s^{n'}} \frac{\partial s^k}{\partial s^{k'}} + \frac{\partial^2 s^i}{\partial s^{n'} \partial s^{k'}} \right). \quad (**)$$

Conexão

-4-

DEM. Pelo lema, $\sum_{k,n} \Gamma_{nk}^i \frac{\partial s^n}{\partial s^{n'}} \frac{\partial s^k}{\partial s^{k'}} =$
 $-\sum_{k,l,m,n} \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial x^l}{\partial s^n} \frac{\partial s^n}{\partial s^{n'}} \frac{\partial x^m}{\partial s^k} \frac{\partial s^k}{\partial s^{k'}} = -\sum_{l,m} \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial x^l}{\partial s^{n'}} \frac{\partial x^m}{\partial s^{k'}}.$

Pela identidade $\frac{\partial^2 s^i}{\partial s^{n'} \partial s^{k'}} = \frac{\partial}{\partial s^{n'}} \left(\sum_m \frac{\partial s^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial s^{k'}} \right) =$
 $\sum_m \frac{\partial s^i}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial s^{n'} \partial s^{k'}} + \sum_{l,m} \frac{\partial x^l}{\partial s^{n'}} \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial s^{k'}}.$ vem $\sum_{k,n} \Gamma_{nk}^i \frac{\partial s^n}{\partial s^{n'}} \frac{\partial s^k}{\partial s^{k'}} =$
 $\sum_{l,m} \frac{\partial s^i}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial s^{n'} \partial s^{k'}} - \frac{\partial^2 s^i}{\partial s^{n'} \partial s^{k'}}.$ Logo, multiplicando por $\frac{\partial s^{i'}}{\partial s^i}$

obtemos por (•) $\Gamma_{n'k'}^{i'} = \sum_{l,m} \frac{\partial s^{i'}}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial s^{n'} \partial s^{k'}} =$

$\sum_i \frac{\partial s^{i'}}{\partial s^i} \left(\sum_{k,n} \Gamma_{nk}^i \frac{\partial s^n}{\partial s^{n'}} \frac{\partial s^k}{\partial s^{k'}} + \frac{\partial^2 s^i}{\partial s^{n'} \partial s^{k'}} \right).$ QED. ■

Conexão

Uma conexão geométrica é uma família de funções Γ_{pq}^k que se transformam conforme a lei (**) sob qualquer mudança de base local por difeomorfismos. A mesma é independente da métrica escolhida, logo é um conceito distinto da métrica.

Tensores (introdução "in a nutshell")

-1-

Vetor, co-vetor e tensor

Seja $\{g_i\}_i$ uma base local da variedade Riemanniana \mathcal{M} . Já vimos que um vetor (i.e., com componentes contravariantes) w é um elemento do plano tangente que se escreve em componentes $w = \sum_i w^i g_i$. Ora, um co-vetor (i.e., com componentes covariantes) é um elemento do dual do plano tangente, i.e., escreve-se em componentes como $\omega = \sum_i \omega_i g^i$ com $\{g^i\}_i$ a base dual local (t.q. $g^i \cdot g_j = \delta_{ij}$). Um co-vetor corresponde a um diferencial pois que $g^i(p)[w] = g^i(p)[\sum_j w^j g_j] = w^i = dx^i[w]$.

Tensor

Enfim um tensor de ordem $(m; n)$ em um ponto p representa um mapa N -multilinear (onde $N = m + n$) do espaço vetorial gerado por n vezes o plano tangente e m vezes o seu dual:

Tensores (introdução "in a nutshell")

-2-

numa base escolhida, é dado por uma família de componentes $U^{i\dots}$ com N índices junto com uma base tensorial com N vetores de base contra- ou covariantes, g_i, \dots, g^p , tal que esse mesmo tensor se expressa como

$$U = \sum_{i, \dots, p} U^{i\dots} g_i \otimes \dots \otimes g^p.$$

Um tensor $U(m; n)$ é de ordem $(m; n)$ e de rank $N = m + n$ se tiver m índices contravariantes (logo essa parte "come" m covetores) e n índices covariantes (logo essa parte "come" n vetores). Notemos suas componentes como $U_{(\alpha)}^{(i)}$.

AULA 17 & 18 (2 & 4/5/2023)

Conexão compatível com a métrica; símbolos de Christoffel; derivação covariante de tensores; transporte paralelo e geodésicas; torção da conexão. Curvatura de Riemann; identidades de Bianchi.

Conexão

-6-

Derivação covariante de tensores

Uma operação de derivação covariante (= conexão diferencial) significa a escolha de uma conexão Γ_{pq}^k e de um operador diferencial linear \mathcal{L}_k sob tensores de ordem qualquer que satisfaça:

- (i) Se f é um campo escalar diferenciável: $\mathcal{L}_k f = \frac{\partial f}{\partial s^k}$,
- (ii) • Se w é um vetor: $\mathcal{L}_k w := (\mathcal{L}_k w^i)g_i$, onde
 $\mathcal{L}_k w^i = \nabla_k^\Gamma w^i = (\nabla_k^\Gamma w)^i = \frac{\partial w^i}{\partial s^k} + \sum_{l=1}^m w^l \Gamma_{lk}^i$, (DER-VET)
 • Se ω é um co-vetor: $\mathcal{L}_k \omega := (\mathcal{L}_k \omega_i)g^i$, onde
 $\mathcal{L}_k \omega_i = \nabla_k^\Gamma \omega_i = (\nabla_k^\Gamma \omega)_i = \frac{\partial \omega_i}{\partial s^k} - \sum_{l=1}^m \omega_l \Gamma_{ik}^l$, (DER-COVET)
- (iii) Se U e V são tensores de ordem quaisquer então
 $\mathcal{L}_k(U \otimes V) = \mathcal{L}_k U \otimes V + U \otimes \mathcal{L}_k V$ (Regra de Leibniz).
- A conexão diferencial permite comparar (infinitesimalmente via a derivação) vetores que não pertencem ao mesmo plano tangente, pois o mesmo muda em cada p . Podemos escrever $\mathcal{L}_k = \nabla_k^\Gamma$.

Conexão

-7-

- Nos cálculos a seguir, por concisão, consideremos a convenção seguinte: quando dois índices são repetidos, significa que existe uma soma neste índice. Assim, $A_{ijk}b_j = \sum_j A_{ijk}b_j$, etc.

Símbolos de Christoffel: definições alternativas (caso simétrico)

- Tome $w = g_i = (g_i)^j g_j = \delta_i^j g_j$ com $\delta_i^j = \delta_{ij}$ (componente por componente). Pelo Lema p. 170, vem $\partial_k w \cdot g^j := \nabla_k^\Gamma w^j$, logo, por (DER-VET), $\partial_k g_i \cdot g^j := \nabla_k^\Gamma (g_i)^j = \nabla_k^\Gamma (\delta_i^j) = \delta_i^n \Gamma_{nk}^j = \Gamma_{ik}^j$ (o índice j é **contravariante**). Portanto

$$\Gamma_{ik}^j = (:=) (\partial_k g_i) \cdot g^j.$$

- Temos $\partial_k (g_i \cdot g^j) = 0$, logo $\partial_k g_i \cdot g^j = -g_i \cdot \partial_k g^j$. Portanto

$$\Gamma_{ik}^j = (:=) -\partial_k g^j \cdot g_i.$$

- Por (DER-VET) and (DER-COVET) temos $\mathcal{L}^k g_i = \nabla_k^\Gamma g_i = \Gamma_{ik}^j g_j$ (■) e $\nabla_k^\Gamma g^i = -\Gamma_{jk}^i g^j$.

Conexão

-8-

Derivada covariante: definições sem coordenadas

Uma operação de derivação covariante é um mapa linear que a cada par $\{v, w\}$ de vetores de $T_p S$ associe o vetor $D_v w$ tal que

- (i)' $D_v f = v \cdot \nabla f$, onde f é uma função real diferenciável
 - (ii)' $D_{fv+gu} w = f D_v w + g D_u w$, onde f, g são funções reais diferenciáveis e u, v, w vetores do plano tangente,
 - (iii)' $D_v(\alpha u + \beta w) = \alpha D_v u + \beta D_v w$, onde α, β são reais,
 - (iv)' $D_v(fw) = D_v f w + f D_v w$
- Notemos que tomando $g = \beta = 0$ isto é a definição de uma conexão afim, mais geral do que a derivada covariante que se torna um caso particular de conexão afim.
 - Ora, queremos mostrar que a condição (ii).1 da definição anterior pode ser obtida como consequência da definição acima, mais um presuposto.

Conexão

-9-

Derivada covariante de um vetor: definição alternativa

Suponhamos que quiséssemos partir da relação $\partial_j g_i = \Gamma_{ij}^k g_k$ válida em qualquer mapa local (uma vez que conseguimos definir vetores tangentes clássicos, i.e. Cartesianos, pelo teorema do rank constante).

Neste caso definimos a derivada covariante dos vetores de base assim: $D_{g_j} g_i := \Gamma_{ij}^k g_k$. Ora, seja $v = v^j g_j$ e $w = w^i g_i$, logo vem pelas propriedades acima:

$$D_v w = D_{v^j g_j} (w^i g_i) = v^j D_{g_j} (w^i g_i) = v^j g_j D_{g_j} w^i + v^j w^i D_{g_j} g_i,$$

ou seja, pela condição $(i)'$,

$$D_v w = \left(v \cdot \nabla w^k + \Gamma_{ij}^k v^j w^i \right) g_k = v^j \left(\nabla_j^\Gamma w^k \right) g_k.$$

Conexão

-10-

- Outra abordagem é a seguinte: a palavra "covariante" significa que $D_v w$ é um vetor se w é um vetor, i.e., que suas componentes se transformam após mudança de base como um tensor 1-contravariante, i.e. se $\{s^{i'}\}$ for o novo sistema de coordenadas

$$D_v w^{k'} = \frac{\partial s^{k'}}{\partial s^k} D_v w^k.$$

Sendo que, também, $v^{l'} = \frac{\partial s^{l'}}{\partial s^l} v^l$, temos

$$D_v w^{k'} = \frac{\partial s^{k'}}{\partial s^k} v^l D_{g_l} w^k = \frac{\partial s^{k'}}{\partial s^k} \frac{\partial s^l}{\partial s^{l'}} v^{l'} D_{g_l} w^k = v^{l'} D_{g_{l'}} w^{k'}.$$

Logo, a propriedade de que "a derivada covariante é um tensor":

$$\frac{\partial s^{k'}}{\partial s^k} \frac{\partial s^l}{\partial s^{l'}} D_{g_l} w^k = D_{g_{l'}} w^{k'}.$$

Veremos em MMF que esta propriedade é que permite definir os símbolos de Christoffel e obter rigorosamente a expressão (ii).1.

Conexão

-11-

- Introduzimos o tensor gradiente covariante $(\nabla^\Gamma w^k) g_k$ assim:
 $D_v w = v \cdot (\nabla^\Gamma w^k) g_k = v_m \nabla_m^\Gamma w^k g_k$ para enfatizar que a derivada covariante é calculada na prática mediante os símbolos de Christoffel.
- Em particular tomando $v = g_l$ vem $(ii).1$, i.e.,

$$\nabla_l^\Gamma w := D_{g_l} w = \left(\partial_l w^k + \Gamma_{jl}^k w^j \right) g_k, \quad (\star)$$

onde a componente tensorial lk do gradiente de w ,

$$\nabla^\Gamma w := \nabla_l^\Gamma w^k g^l \otimes g_k$$

é $\nabla_l^\Gamma w^k := \partial_l w^k + \Gamma_{lj}^k w^j$.

- Na verdade, sempre que temos uma conexão cuja accção nos vetores de base é conhecida, i.e., $D_{g_j} g_i := \Gamma_{ij}^k g_k$, obteremos (\star) .

Conexão

-12-

- Reciprocamente, temos: seja $w = g_m$ então por (\star) vem

$$\nabla_l^\Gamma g_m = D_{g_l} g_m = \Gamma_{ml}^k g_k, \quad (\blacksquare)$$

logo $D_{g_l} g_m - D_{g_m} g_l = (\Gamma_{ml}^k - \Gamma_{lm}^k) g_k$.

- Seja $U = \sum_{i, \dots, p}^N U^{i \dots p} g_i \otimes \dots \otimes g^p$ um tensor de ordem $(m; n)$.

Pela definição de conexão diferencial temos

$$\mathcal{L}_k U = \sum_{i, \dots, p}^N (\partial_k U^{i \dots p}) g_i \otimes \dots \otimes g^p + \sum_{i, \dots, p}^N U^{i \dots p} \mathcal{L}_k (g_i \otimes \dots \otimes g^p).$$

- O gradiente do vetor $w = w^j g_j$ é $\nabla^\Gamma w = \sum_{j,k} (\nabla_k^\Gamma w^j) g_j \otimes g^k$, onde a componente k do gradiente, $\nabla_k^\Gamma w$, é definida como

$$\nabla_k^\Gamma w = \mathcal{L}_k w = \sum_j \mathcal{L}_k w^j g_j \quad (\triangle).$$

Conexão: obtenção direta da expressão da derivada covariante de um vetor -13-

- As componentes do gradiente de um vetor em Cartesiano são $\frac{\partial u^l}{\partial x^j}$ (aqui, com x^j as coordenadas Cartesianas).
- A condição de ser um tensor $(1, 1)$ (essa noção não foi vista nesta disciplina, será vista em MMF, disciplina de mestrado) é que irá determinar a expressão do mesmo na base curvilínea, i.e., temos de ter, no novo sistema base/coordenadas curvilínea $\{s^i, \frac{\partial}{\partial s^i}\}$, as componentes desse mesmo gradiente dadas por

$$\hat{u}^i_{;k} = \frac{\partial s^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^j}{\partial s^k} \frac{\partial u^l}{\partial x^j} = \frac{\partial s^i}{\partial x^l} \frac{\partial u^l}{\partial s^k} \text{ (TENS) .}$$

- Pela natureza tensorial $(1 - 0)$ de u^i temos $\hat{u}^i = u^l \frac{\partial s^i}{\partial x^l}$ (aqui, \hat{u}^i representa as componentes do vetor u na nova base)
- Pela natureza tensorial (TENS) $(1 - 1)$ de $\hat{u}^i_{;k} := (\nabla u)_k^i$ temos

Conexão: obtenção direta da expressão da derivada covariante de um vetor

-14-

$$\hat{u}^i_{;k} = \frac{\partial s^i}{\partial x^l} \frac{\partial u^l}{\partial s^k} = \frac{\partial(u^l \frac{\partial s^i}{\partial x^l})}{\partial s^k} - u^l \frac{\partial}{\partial s^k} \left(\frac{\partial s^i}{\partial x^l} \right) = \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial s^k} - u^l \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial s^k},$$

logo, uma vez que $u^l = \hat{u}^n \frac{\partial x^l}{\partial s^n}$,

$$\hat{u}^i_{;k} = \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial s^k} - \hat{u}^n \frac{\partial x^l}{\partial s^n} \frac{\partial^2 s^i}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial x^m}{\partial s^k} = \frac{\partial \hat{u}^i}{\partial s^k} + \hat{u}^n \Gamma^i_{nk},$$

i.e., obtemos a formula (★).

Gradiente covariante de um tensor

Lembramos que o gradiente do tensor U de rank N e ordem $(m; n)$ é definido como o tensor de rank $N + 1$ e ordem $(m; n + 1)$,

Conexão

-13-

$$\nabla U := \sum_{i, \dots, p}^N (\nabla_k^\Gamma U^{i \dots p}) g_i \otimes \dots \otimes g^p \otimes g^k = \mathcal{L}_k U g^k.$$

As componentes de ∇U são portanto os $\nabla_k^\Gamma U^{i \dots p}$, na base associada escolhida.

Derivada covariante direcional

Seja $\mathcal{L}_k = \nabla_k^\Gamma$ uma conexão diferencial e seja ξ um campo vetorial. A derivada covariante na direção $\xi = \xi^k g_k$, D_ξ , é definida como $\nabla_\xi^\Gamma w := D_\xi w = (\xi^k \nabla_k^\Gamma w^i) g_i$, onde $w = w^i g_i$ e $\nabla_\xi^\Gamma := \xi^k \nabla_k^\Gamma$.

Transporto paralelo (ou translação paralela)

Dada uma conexão, i.e., $(\star\star)$, um tensor U é covariantemente constante ou paralelo longo uma curva γ , se

$$\nabla_{\dot{\gamma}}^\Gamma U = \dot{\gamma}^k \nabla_k^\Gamma U = \dot{\gamma}^k \left(\frac{\partial}{\partial s^k} U_{(\alpha)}^{(i)} + U_{(\alpha)}^{(i)} \nabla_k^\Gamma (g_{(i)} \otimes ds^{(\alpha)}) \right) = 0.$$

Conexão

-14-

Logo, sempre que a geometria for não-Euclidiana, paralelo não significa ter as componente constantes (i.e., $\frac{\partial}{\partial s^k} U_{(\alpha)}^{(i)} = 0$).

Geodésica (com respeito a uma conexão)

Dada uma conexão, uma curva diferenciável γ numa variedade é uma geodésica se $D_t \dot{\gamma} = D_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$.

- Salientamos o facto de que o transporte paralelo e a noção de geodésica são conceitos meramente ligados à conexão e não a métrica, exceto se a métrica for compatível com a conexão.

Torção da conexão

A torsão da conexão Γ é definida como $T_{kj}^i := \Gamma_{kj}^i - \Gamma_{jk}^i$.

- Acabamos de ver que

$$\nabla_l^\Gamma g_m - \nabla_m^\Gamma g_l = D_{g_l} g_m - D_{g_m} g_l = T_{ml}^k g_k \quad (\circ).$$

Conexão

-15-

Derivada covariante ao longo de uma curva

Seja $t \in I \mapsto \gamma(t) \subset \mathcal{M}$. Seja $I \mapsto V(t)$ um campo ao longo de $\gamma[I]$ e que verifica a propriedade de ser extensível, i.e., existe um campo \tilde{V} definido numa vizinhança de $\gamma[I]$ em \mathcal{M} tal que $V(t) = \tilde{V}_{\gamma(t)}$. Neste caso a derivada covariante ao longo de γ é definida como

$$D_t V := D_{\dot{\gamma}} \tilde{V} = \left(\frac{dV^k}{dt} + \dot{\gamma}_j V^i \Gamma_{ij}^k \right) g_k = \partial_t V^k g_k + V^k D_t g_k. \quad (\blacktriangle)$$

- Seja uma família de curvas suaves $\gamma(t, s)$ onde $\gamma(t) = \gamma(t, 0)$. Definimos $T := \partial_t \gamma(t, s)$ com s fixado e $S := \partial_s \gamma(t, s)$ com t fixado. Localmente, podemos escrever em coordenadas $\gamma(t, s) = (x^1(t, s), \dots, x^n(t, s))$ e $T = \frac{dx^k}{dt} \frac{\partial}{\partial x^k}$ e $S = \frac{dx^k}{ds} \frac{\partial}{\partial x^k}$. Segue imediatamente que

$$D_t S - D_s T = \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{ds} T_{ij}^k g_k. \quad (\blacktriangle\blacktriangle)$$

Conexão de Levi-Civita

-1-

Conexão compatível com a métrica

Uma conexão Γ é compatível com a métrica se $\nabla^\Gamma g = 0$, i.e. $\nabla_k^\Gamma g_{ij} = 0$. Neste caso vale a propriedade de derivação de um produto,

$$D_w(u, v)_g = (D_w u, v)_g + (u, D_w v)_g.$$

Em particular se U, V são campo vetoriais ao longo de um curva $t \mapsto \gamma(t)$ vale

$$\frac{d}{dt}(U, V)_g = (D_t U, V)_g + (D_t V, U)_g$$

Teorema: derivada covariante de um tensor de ordem 2 – 0

Seja $U = U^{ij} g_i \otimes g_j$. Então $\nabla U = \mathcal{L}_k U \otimes g^k$, com $\mathcal{L}_k U = \nabla_k^\Gamma U = \left(\frac{\partial U^{ij}}{\partial s^k} + \Gamma_{lk}^i U^{lj} + \Gamma_{lk}^j U^{il} \right) g_i \otimes g_j$ (\diamond).

Conexão de Levi-Civita

-2-

DEM. Pela (iii) $\mathcal{L}_k U = \mathcal{L}_k(U^{ij} g_i) \otimes g_j + U^{ij} g_i \otimes \mathcal{L}_k g_j$. Pelas (i), (iii) e a linearidade, $\mathcal{L}_k U = \frac{\partial U_{ij}}{\partial s^k} g_i \otimes g_j + U^{ij} \mathcal{L}_k g_i \otimes g_j + U^{ij} g_i \otimes \mathcal{L}_k g_j$. Pela (ii) e (■) p. 240, e após mudança de nome dos índices, vem $\mathcal{L}_k U = \left(\frac{\partial U^{ij}}{\partial s^k} + U^{lj} \Gamma_{lk}^i + U^{il} \Gamma_{lk}^j \right) g_i \otimes g_j$. QED. ■

- Analogamente, a derivada covariante do tensor (0; 2),

$$U = \sum_{i,j} U_{ij} g^i \otimes g^j \text{ é}$$

$$\nabla_k^\Gamma U_{ij} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial s^k} - \Gamma_{ik}^l U_{lj} - \Gamma_{jk}^l U_{il} \quad (\diamond).$$

- Além de mais, a derivada covariante do tensor (1; 1),

$$U = \sum_{i,k} U_k^i g_i \otimes g^k \text{ é}$$

$$\nabla_l^\Gamma U_k^i = \frac{\partial U_k^i}{\partial s^l} + \Gamma_{pl}^i U_k^p - \Gamma_{kl}^p U_p^i \quad (\diamond \diamond \diamond).$$

Conexão de Levi-Civita

-3-

Teorema: Conexão de Levi-Civita (ou conexão Riemanniana)

Seja uma métrica g_{ij} não singular. Então existe uma única conexão simétrica compatível com a métrica g_{ij} . A mesma é dada por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$

DEM. Seja $\Gamma_{k;ij} := g_{kl} \Gamma_{ij}^l$. Pela compatibilidade da conexão (cf. (\diamond)), $0 = \nabla_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial s^k} - \Gamma_{ik}^l g_{lj} - \Gamma_{jk}^l g_{il}$, logo $\frac{\partial g_{ij}}{\partial s^k} = \Gamma_{j;ik} + \Gamma_{i;jk}(A)$. Permutando os índices, $\frac{\partial g_{jk}}{\partial s^i} = \Gamma_{k;ji} + \Gamma_{j;ki}(B)$ e $\frac{\partial g_{ik}}{\partial s^j} = \Gamma_{i;kj} + \Gamma_{k;ij}(C)$. Efetuando $(B) + (C) - (A)$ e sendo a conexão simétrica, i.e., $\Gamma_{k;ij} = \Gamma_{k;ji}$, obtemos $2\Gamma_{l;ij} = \partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}$. Multiplicando por $\frac{1}{2} g^{kl}$, segue o resultado. QED. ■

Conexão de Levi-Civita

-4-

- Continua a valer a propriedade vista na parte A que uma conexão compatível com a métrica preserva o produto interno entre dois vetores transportados paralelamente.

Lema. Conservação do produto interno

Seja uma conexão compatível com a g (pode não ser simétrica).
Sejam ξ, η dois campos vetoriais transportados paralelamente ao longo da curva γ . Então $\frac{d}{dt}(\xi, \eta)_g = 0$.

DEM. Temos $\frac{d}{dt}(\xi, \eta)_g = \dot{\gamma}_k \partial_k (g_{ij} \xi^i \eta^j) = \dot{\gamma}_k \nabla_k^\Gamma (g_{ij} \xi^i \eta^j) = g_{ij} \dot{\gamma}_k \nabla_k^\Gamma (\xi^i \eta^j) = g_{ij} (\eta^j \dot{\gamma}_k \nabla_k^\Gamma \xi^i + \xi^j \dot{\gamma}_k \nabla_k^\Gamma \eta^i) = 0 + 0 = 0$. QED. ■

Levantar e baixar os índices

Levantar ou baixar os índices

Seja as componentes de um tensor $(m; n)$, $U^{i\dots p}$. Levantamos um índice covariante, dizemos p , se multiplicarmos por $g^{pq} = (g_{pq})^{-1}$, i.e. $g^{qp}U^{i\dots p} = U^{i\dots q}$. Baixamos um índice, digamos, i , se multiplicarmos por g_{ij} , i.e. $g_{ij}U^{i\dots p} = U_{j\dots p}$

- Por convenção, quando houver 2 índices repetidos, tem que haver sempre um em baixo e outro em cima.

Curvatura de Riemann

-1-

Conexão Euclidiana (ou afim)

Uma conexão Γ é afim em p se existe um sistema de coordenadas $\{x_k\}$ no qual $\Gamma = 0$ numa vizinhança de p . Neste caso $\nabla_k^\Gamma = \frac{\partial}{\partial x^k}$. Neste caso, pelo Lema de Schwarz, temos comutação das derivadas covariantes, i.e., $\nabla_k^\Gamma \nabla_l^\Gamma - \nabla_l^\Gamma \nabla_k^\Gamma = \partial_k \partial_l - \partial_k \partial_l = 0$.

♣ A questão que levantamos agora é de quantificar a falta de comutação das mesmas no caso de uma conexão geral (i.e., não Euclidiana). Seja o vetor $w = w^i g_i (= \sum_i w^i g_i)$. Pela condição (ii) da definição de derivação covariante, temos

$$U_k^i := \nabla_k^\Gamma w^i = \partial_k w^i + \Gamma_{lk}^i w^l. \text{ Pela fórmula } (\diamond \diamond \diamond) \text{ p. 253 vem}$$

$$\nabla_l^\Gamma U_k^i = \nabla_l^\Gamma \nabla_k^\Gamma w^i = \nabla_l^\Gamma \left(\partial_k w^i + \Gamma_{qk}^i w^q \right) = \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\partial_k w^i + \Gamma_{qk}^i w^q \right)$$

$$+ \Gamma_{pl}^i \left(\partial_k w^p + \Gamma_{qk}^p w^q \right) - \Gamma_{kl}^p \left(\partial_p w^i + \Gamma_{qp}^i w^q \right).$$

Curvatura de Riemann

-2-

$$\begin{aligned} \text{Expandendo vem } \nabla_l^\Gamma \nabla_k^\Gamma w^i &= \frac{\partial^2 w^i}{\partial s^l \partial s^k} + \Gamma_{qk}^i \partial_l w^q + \Gamma_{pl}^i \partial_k w^p + \\ &\frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial s^l} w^q - \Gamma_{kl}^p \partial_p w^i + \\ \Gamma_{pl}^i \Gamma_{qk}^p w^q - \Gamma_{kl}^p \Gamma_{qp}^i w^q &= \left(\frac{\partial^2 w^i}{\partial s^l \partial s^k} + \Gamma_{qk}^i \partial_l w^q + \Gamma_{pl}^i \partial_k w^p \right) + \\ \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial s^l} w^q + \Gamma_{pl}^i \Gamma_{qk}^p w^q - \Gamma_{kl}^p &(\partial_p w^i + \Gamma_{qp}^i w^q). \end{aligned}$$

Logo, invertindo os índices k e l e substraíndo, os 3 primeiros termos cancelam-se por serem simétricos, e saí

$$\begin{aligned} \nabla_l^\Gamma \nabla_k^\Gamma w^i - \nabla_k^\Gamma \nabla_l^\Gamma w^i &= \left(\frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial s^l} - \frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial s^k} + \Gamma_{pl}^i \Gamma_{qk}^p - \Gamma_{pk}^i \Gamma_{ql}^p \right) w^q - \\ &(\Gamma_{kl}^p - \Gamma_{lk}^p) (\partial_p w^i + \Gamma_{qp}^i w^q). \end{aligned}$$

Obtê-se $\nabla_l^\Gamma \nabla_k^\Gamma w^i - \nabla_k^\Gamma \nabla_l^\Gamma w^i = T_{lk}^p \nabla_p^\Gamma w^i + R_{qllk}^i w^q$: vê-se que a falta de comutação das derivadas covariantes é devida (i) a torção da conexão T_{lk}^p , e (ii) a curvatura de Riemann.

Curvatura de Riemann

-3-

Curvatura de Riemann

$$R_{q lk}^i := \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial s^l} - \frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial s^k} + \Gamma_{pl}^i \Gamma_{qk}^p - \Gamma_{pk}^i \Gamma_{ql}^p. \quad (\text{RIEM})$$

- Se consideremos uma conexão simétrica, logo a torção é evanescente e obtê-se a fórmula clássica que define a curvatura de Riemann (com soma em q) como aplicação do plano tangente de \mathcal{M} em p , com \mathcal{M} de dimensão m :

$$\nabla_{[l}^{\Gamma} \nabla_{k]}^{\Gamma} w^i := \nabla_l^{\Gamma} \nabla_k^{\Gamma} w^i - \nabla_k^{\Gamma} \nabla_l^{\Gamma} w^i = R_{q lk}^i w^q, \forall w = w^i g_i \in T_p \mathcal{M}. (\spadesuit)$$

- A curvatura de Riemann é um tensor com m^4 componentes. Existem variantes do mesmo definidas como por exemplo a curvatura full-covariante $R_{iqkl} = g_{ij} R_{qkl}^j$ (com soma em j).
- A prova do resultado seguinte é evidente por contraposição e a definição (RIEM).

Curvatura de Riemann

-4-

Lema

Se $R_{qkl}^i \neq 0$ então

- ▶ a conexão não é Euclidiana;
- ▶ não ha comutação das derivadas segundas covariantes.

Teorema. Antisimetria e identidade de Bianchi

Temos sempre

- (i) $R_{qkl}^i = -R_{lqk}^i$
- (ii) Se a conexão for simetrica, então $R_{qkl}^i + R_{lqk}^i + R_{klq}^i = 0$

DEM. (i) é evidente; (ii) pela linearidade podemos tomar

$$w = g_p = (g_p)^i g_i = \sum_i (g_p)^i g_i. \text{ Por } (\spadesuit) \text{ temos } (\nabla_l^\Gamma \nabla_k^\Gamma - \nabla_k^\Gamma \nabla_l^\Gamma)(g_p)^i = R_{qlk}^i (g_p)^q = R_{qlk}^i \delta_{pq} = -R_{pkl}^i, \text{ logo } (\nabla_l^\Gamma \nabla_k^\Gamma - \nabla_k^\Gamma \nabla_l^\Gamma)g_p = (\nabla_l^\Gamma \nabla_k^\Gamma - \nabla_k^\Gamma \nabla_l^\Gamma)(g_p)^i g_i = -R_{pkl}^i g_i. \text{ É suficiente}$$

Curvatura de Riemann

-5-

mostrar que $-R_{plk}^i g_i - R_{kpl}^i g_i - R_{lkp}^i g_i = 0, \forall g_i$ na base movél.

Mas, $-R_{plk}^i g_i - R_{kpl}^i g_i - R_{lkp}^i g_i = \nabla_l^\Gamma (\nabla_k^\Gamma g_p - \nabla_p^\Gamma g_k) + \nabla_k^\Gamma (\nabla_p^\Gamma g_l - \nabla_l^\Gamma g_p) + \nabla_p^\Gamma (\nabla_l^\Gamma g_k - \nabla_k^\Gamma g_l)$. Por (■) p.240, a tese segue uma vez que a torção é nula:

$\nabla_k^\Gamma g_p - \nabla_p^\Gamma g_k = \Gamma_{pk}^j g_j - \Gamma_{kp}^j g_j = 0$ (igual para os dois outros termos). QED. ■

- Este identidade é conhecida pelo nome de identidade de Bianchi.
- O resultado seguinte são identidades importantes nas aplicações. Apenas demonstraremos a primeira.

Lema (Simetrias do tensor de Riemann).

Para conexões de Levi-Civita temos

$$(iii) \quad R_{jqkl} = -R_{qjkl}$$

$$(iv) \quad R_{iqkl} = R_{kliq}$$

Curvatura de Riemann

-6-

DEM. (de (iii)) Seja um vetor w . Calculemos o seguinte produto interno, por (\spadesuit) e com l e k fixados, $(\nabla_{[l}^{\Gamma} \nabla_{k]}^{\Gamma} w, w)_g = (\nabla_l^{\Gamma} \nabla_k^{\Gamma} w^i - \nabla_k^{\Gamma} \nabla_l^{\Gamma} w^i) g_{ij} w^j = g_{ij} R_{qlk}^i w^q w^j = R_{jqlk} w^q w^j$. A tese segue se mostrarmos que $\nabla_{[l}^{\Gamma} \nabla_{k]}^{\Gamma} w = 0, \forall w$, pois que invertindo os índices j e q , vem $R_{jqlk} w^q w^j = R_{qjlk} w^j w^q = R_{qjlk} w^q w^j$, logo $0 = (\nabla_{[l}^{\Gamma} \nabla_{k]}^{\Gamma} w, w)_g = \frac{1}{2} (R_{jqlk} + R_{qjlk}) w^q w^j = 0, \forall w \Rightarrow (R_{jqlk} + R_{qjlk}) = 0$. Com efeito, pela propriedade (i) da definição de conexão diferencial e a conexão ser compatível com a métrica, vem $\partial_k \partial_l (w, w)_g = \nabla_k^{\Gamma} \nabla_l^{\Gamma} g_{ij} w^i w^j = g_{ij} \nabla_k^{\Gamma} \nabla_l^{\Gamma} (w^i w^j) = 2 ((\nabla_k^{\Gamma} \nabla_l^{\Gamma} w, w)_g + (\nabla_k^{\Gamma} w, \nabla_l^{\Gamma} w)_g)$. Similarmente, invertendo o papel de k e l , obtemos $\partial_l \partial_k (w, w)_g = 2 ((\nabla_l^{\Gamma} \nabla_k^{\Gamma} w, w)_g + (\nabla_l^{\Gamma} w, \nabla_k^{\Gamma} w)_g)$. Logo substraindo as duas identidades, pelo Lema de Schwarz, vem $(\nabla_{[l}^{\Gamma} \nabla_{k]}^{\Gamma} w, w)_g = 0$ para todos os campos vetoriais $w \in \mathcal{C}^2(T_p S; \mathbb{R}^m)$. QED. ■

AULA 20 (9/5/2023)

Comutador; definição de torção e curvatura sem coordenadas. Teorema egregium. Curvatura de Ricci e curvatura escalar.

Curvatura de Riemann

-7-

Comutador

Seja uma base $g_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$ e sejam dois campos vetoriais $\xi = \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, $\eta = \eta^l \frac{\partial}{\partial x^l}$. Então constroi-se um terceiro campo $\sigma = [\xi, \eta]$ como

$$[\xi, \eta] := (\xi \cdot \nabla \eta^i - \eta \cdot \nabla \xi^i) g_i.$$

Este campo é chamado o **comutador** de ξ e η .

- Portanto $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$ (é simplesmente o Lema de Schwarz: $\partial_{ij} = \partial_{ji}$).

Para além, o **operador diferencial de comutação** é definido como

$$\nabla_{[\xi}^{\Gamma} \nabla_{\eta]}^{\Gamma} = \nabla_{\xi}^{\Gamma} \nabla_{\eta}^{\Gamma} - \nabla_{\eta}^{\Gamma} \nabla_{\xi}^{\Gamma}.$$

Curvatura de Riemann

-8-

Lema. Outra definição da torção e da curvatura

Sejam três campos vetoriais ξ, η, ζ . Então

(i) a curvatura de Riemann é o operador trilinear

$$R[\xi, \eta]\zeta := R^i_{jkl}\xi^k\eta^l\zeta^j g_i = \nabla_{[\xi}\nabla_{\eta]}\zeta + \nabla_{[\xi, \eta]}\zeta;$$

(ii) a torção é o operador bilinear

$$T[\xi, \eta] := T^i_{jk}\xi^j\eta^k g_i = (\nabla_{\eta}^{\Gamma}\xi - \nabla_{\xi}^{\Gamma}\eta) + [\xi, \eta].$$

DEM (de (ii)). Multiplicamos (\circ) p. 250 por $\xi^j\eta^k$ e integramos por partes, utilizando as definições. Vem:

$$g_m T^m_{jk}\xi^j\eta^k = \xi^j\eta^k \nabla_k^{\Gamma} g_j - \xi^j\eta^k \nabla_j^{\Gamma} g_k = \nabla_{\eta}^{\Gamma}\xi - \nabla_{\xi}^{\Gamma}\eta + [\xi, \eta].$$

Curvatura de Riemann

-9-

DEM (de (i)) • **step 1:** tomemos $\xi = g_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$, $\eta = g_l = \frac{\partial}{\partial x^l}$ e $\zeta = g_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$. Sendo que $[g_k, g_l] = 0$, logo vem

$$\begin{aligned} (\nabla_{\xi}^{\Gamma} \nabla_{\eta}^{\Gamma} - \nabla_{\eta}^{\Gamma} \nabla_{\xi}^{\Gamma})\zeta + \nabla_{[\xi, \eta]}^{\Gamma} \zeta &= (\nabla_{g_k}^{\Gamma} \nabla_{g_l}^{\Gamma} - \nabla_{g_l}^{\Gamma} \nabla_{g_k}^{\Gamma})g_j \\ &= \nabla_k^{\Gamma} (\nabla_l^{\Gamma} g_j) - \nabla_l^{\Gamma} (\nabla_k^{\Gamma} g_j) = \nabla_k^{\Gamma} (\Gamma_{jl}^m g_m) - \nabla_l^{\Gamma} (\Gamma_{jk}^m g_m) \\ &= \partial_k \Gamma_{jl}^m g_m + \Gamma_{jl}^m \Gamma_{mk}^n g_n - \partial_l \Gamma_{jk}^m g_m - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{ml}^n g_n \\ &= (\partial_k \Gamma_{jl}^n + \Gamma_{jl}^m \Gamma_{mk}^n - \partial_l \Gamma_{jk}^n - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{ml}^n) g_n = R_{jkl}^n g_n = R[g_k, g_l]g_j. \end{aligned}$$

• **step 2:** verifiquemos que o membro a direita, $\nabla_{[\xi, \eta]}^{\Gamma} \zeta + \nabla_{[\xi, \eta]}^{\Gamma} \zeta$ é homogéneo em ξ, η e ζ , i.e. seja f um campo suave, logo

$$\begin{aligned} \nabla_{[f\xi, \nabla_{\eta}^{\Gamma} \zeta]}^{\Gamma} + \nabla_{[f\xi, \eta]}^{\Gamma} \zeta &= f \left(\nabla_{[\xi, \nabla_{\eta}^{\Gamma} \zeta]}^{\Gamma} + \nabla_{[\xi, \eta]}^{\Gamma} \zeta \right) = \\ \nabla_{[\xi, \nabla_{f\eta}^{\Gamma} \zeta]}^{\Gamma} + \nabla_{[\xi, \eta]}^{\Gamma} \zeta &= \nabla_{[\xi, \nabla_{\eta}^{\Gamma} f\zeta]}^{\Gamma} + \nabla_{[\xi, \eta]}^{\Gamma} f\zeta. \end{aligned}$$

• **step 3:** portanto teremos pela linearidade,

$$R[\xi^k g_k, \eta^l g_l] \zeta^j g_j = \xi^k \eta^l \zeta^j R[g_k, g_l] g_j = \nabla_{[\xi, \nabla_{\eta}^{\Gamma} \zeta]}^{\Gamma} + \nabla_{[\xi, \eta]}^{\Gamma} \zeta. \text{ QED. } \blacksquare$$

Curvatura de Riemann

-10-

Caso compatível

- Portanto, uma vez que $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$, logo

$$R[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}]\frac{\partial}{\partial x^k} = \nabla_{[\frac{\partial}{\partial x^i}}^{\Gamma} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}^{\Gamma}]\frac{\partial}{\partial x^k} \quad (\circ\circ).$$

- Ademais, se a conexão for simétrica, vem $\nabla_{\xi}^{\Gamma}\eta - \nabla_{\eta}^{\Gamma}\xi = [\xi, \eta]$.
- Em regra geral se ξ e η forem compatíveis, i.e. $[\xi, \eta] = 0$, então vale

$$R[\xi, \eta]\zeta = \nabla_{[\xi}^{\Gamma} \nabla_{\eta}^{\Gamma}]\zeta,$$

$$T[\xi, \eta] = \nabla_{\eta}^{\Gamma}\xi - \nabla_{\xi}^{\Gamma}\eta.$$

Curvatura de Riemann

-10-

• **Nota:** Uma base do tipo $\{g_k = \frac{\partial}{\partial x^k}\}_k$ é dita **holonómica** ou "dependente das coordenadas". Acontece que dada uma métrica, é difícil encontrar uma base que seja ortonormal em todas as vizinhanças de \mathcal{M} . Mas, em geral, uma base $\{g_i\}$ não deve derivar de um sistema de coordenadas. Nesse caso é dita **anholonómica** e portanto $T_{ij}^k = \Gamma_{[ij]}^k + [g_i, g_j]$, em que $[g_i, g_j] \neq 0$. Os dois termos são a torção da conexão e da holonomia.

♣ Seja uma curva $t \mapsto \gamma(t)$. Definimos

$$\mathcal{R}X := R[\dot{\gamma}, X]\dot{\gamma}.$$

A partir do Lema das simetrias da curvatura, é fácil verificar que o operador \mathcal{R} é auto-adjunto, i.e.

$$(\mathcal{R}X, Y)_g = (\mathcal{R}Y, X)_g. \quad (\star)$$

Aplicação a $m = 2$ e às superfícies de \mathbb{R}^3

♣ No caso $m = 2$ o tensor de curvatura de Riemann é R_{ijkl} com $i, j, k, l \in \{1, 2\}$. Pelas condições (iii) e (iv) temos $R_{11kl} = R_{22kl} = R_{kl11} = R_{kl22} = 0, \forall k, l$, sendo que a única componente não evanescente é $R_{1212} = R_{2121}$.

• Consideremos uma superfície regular S de \mathbb{R}^3 . Sabemos que, localmente em $p \in S$, pode ser representada pelo gráfico de uma função $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$, sendo que o eixo dos $z = x_3$ é perpendicular ao plano tangente em p ; por convenção pomos p como origem do plano tangente, logo vem $f(0) = \partial_i f(0) = 0$. Além de mais, a métrica induzida em p escreve-se como $g_{ij} = \partial_i p \cdot \partial_j p = (e_i + \partial_i f e_3) \cdot (e_j + \partial_j f e_3) = \delta_{ij} + \partial_i f \partial_j f$. Então vem $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ e $\partial_k g_{ij}(0) = 0$. Por consequência, pelo teorema de Levi-Civita a única conexão compatível com a métrica e simétrica satisfaz $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$.

Logo, $R_{qlk}^i(0) = \frac{\partial \Gamma_{qk}^i}{\partial x^l}(0) - \frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k}(0)$, e

$$R_{iqlk}(0) = g_{ij}R_{qkl}^j(0) = \frac{\partial(g_{ij}\Gamma_{qk}^j)}{\partial x^l}(0) - \frac{\partial(g_{ij}\Gamma_{ql}^j)}{\partial x^k}(0) - \partial_l g_{ij}(0)$$

$\Gamma_{qk}^j(0) + \partial_k g_{ij}(0)\Gamma_{ql}^j(0) = \frac{\partial \Gamma_{iqk}}{\partial x^l}(0) - \frac{\partial \Gamma_{iql}}{\partial x^k}(0)$ (\diamond), onde, sendo que $g_{km}g^{ml} = \delta_{kl}$, vale

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}g_{km}g^{ml}(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) = \frac{1}{2}(\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) \quad (\diamond \diamond).$$

Teorema Egregium de Gauss

A curvatura de Gauss de uma superfície S escreve-se como $K = R_{1212} = R_{2121}$. Logo é uma grandeza intrínseca.

DEM. Sendo que $m = 2$ os índices i, j, k, l tem valores em $\{1, 2\}$ e a única entrada do tensor de curvatura é R_{1212} . Consideremos localmente a superfície como um gráfico, logo por (\diamond) e $(\diamond\diamond)$ vem $R_{ijkl}(0) = \frac{1}{2}(\partial_k(\partial_q g_{il} + \partial_l g_{qi} - \partial_i g_{ql}) - \partial_l(\partial_q g_{ik} + \partial_k g_{qi} - \partial_i g_{qk}))(0)$.

Particularizando, obtemos $R_{1212}(0) = \frac{1}{2}\partial_1(\partial_2 g_{12} + \partial_2 g_{21} - \partial_1 g_{22})(0) - \frac{1}{2}\partial_2(\partial_2 g_{11} + \partial_1 g_{21} - \partial_1 g_{21})(0) = \frac{1}{2}(-\partial_2^2 g_{11} - \partial_1^2 g_{22})(0) + \partial_{12}^2 g_{12}(0)$. Mas, sendo que $\nabla f(0) = 0$ vem $\partial_2^2 g_{11}(0) = \partial_2^2(\partial_1 f)^2(0) = 2\partial_2(\partial_1 f \partial_{21}^2 f)(0) = 2(\partial_{21}^2 f(0))^2$. Da mesma forma saí $\partial_1^2 g_{22}(0) = 2(\partial_{21}^2 f(0))^2$ e $\partial_{12}^2 g_{12}(0) = \partial_{11}^2 f(0)\partial_{22}^2 f(0) + (\partial_{21}^2 f(0))^2$. Então $R_{1212}(0) = \partial_{11}^2 f(0)\partial_{22}^2 f(0) - (\partial_{21}^2 f(0))^2 = \det \begin{pmatrix} \partial_{11}^2 f & \partial_{12}^2 f \\ \partial_{21}^2 f & \partial_{22}^2 f \end{pmatrix} (0) = \frac{\det \mathbb{I}_2(0)}{(\det \mathbb{I}_1(0))^2} = K(p)$, já que $\det g(p) = \det \mathbb{I}_1(0) = 1$ (cf. Exercício 10, série 4). É intrínseca pois que a curvatura simétrica e compatível só depende da métrica. QED. ■

Curvatura de Ricci e curvatura escalar

A curvatura de Ricci é o traço (ou "contração") da curvatura de Riemann, i.e., $R_{ij} := R_{ikj}^k$. A curvatura escalar é definida como o produto do tensor de Ricci com a métrica inversa, i.e., $R = R_{ij}g^{ij}$.

Lema. Curvaturas escalar e de Gauss

Seja \mathcal{M} de dimensão dois. Temos $R = 2K$ em cada ponto de \mathcal{M} .

DEM. Temos $R = g^{ij}R_{ikj}^k = g^{ij}g^{kl}R_{likj}$. As únicas entradas não nulas são $R_{1212} = K = R_{2121}$ e $R_{1221} = -K = R_{2112}$, donde $R = 2(g^{11}g^{22} - g^{12}g^{21})K = 2 \det(g^{-1})K$. Mas $\det g = 1$ em p , logo $R = 2K$ nesse sistema de coordenadas, então em todos.

QED. ■

AULA 21 (11/5/2023)

Campos de Jacobi e aproximação da métrica pela curvatura de Riemann.

Campos de Jacobi

-1-

♣ Definimos primeiro uma variação da curva suave $t \mapsto \gamma(t)$: seja uma família de curvas suaves $\gamma(t, s)$ onde $\gamma(t) = \gamma(t, 0)$.

Definimos $T := \partial_t \gamma(t, s)$ com s fixado e $S := \partial_s \gamma(t, s)$ com t fixado. Localmente, podemos escrever em coordenadas

$$\gamma(t, s) = (x^1(t, s), \dots, x^n(t, s)) \text{ e } T = \frac{\partial x^k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^k} \text{ e } S = \frac{\partial x^k}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Lema

Seja \mathcal{M} uma variedade Riemanniana sem torção. Seja V um campo vetorial em $\gamma(t, s) \subset \mathcal{M}$. Então

$$(D_s D_t - D_t D_s)V = R(S, T)V.$$

DEM. Por (▲) p. 250, temos

$$D_s D_t V = \partial_s \partial_t V^k g_k + \partial_t V^k D_s g_k + \partial_s V^k D_t g_k + V^k D_s D_t g_k,$$

logo

$$D_s D_t V - D_t D_s V = V^k (D_s D_t g_k - D_t D_s g_k)$$

Campos de Jacobi

-2-

Mas, uma vez que $D_s T^j = \partial_s(\partial_t x^j) = \partial_s \partial_t x^j$,

$$D_s D_t g_k = D_s (T^j \nabla_j^\Gamma g_k) = \partial_s \partial_t x^j \nabla_j^\Gamma g_k + T^j S^i \nabla_i^\Gamma \nabla_j^\Gamma g_k,$$

logo, por (◦◦) p. 264, vem

$$D_s D_t g_k - D_t D_s g_k = T^j S^i \nabla_{[i}^\Gamma \nabla_{j]}^\Gamma g_k = T^j S^i R(g_i, g_j) g_k.$$

Pela linearidade da curvatura segue a tese. QED. ■

Seja $t \mapsto \gamma(t)$ uma geodésica, logo $D_t T = 0$ e obtemos

$$0 = D_s D_t T = D_t D_s T + R(S, T)T$$

Mas, pela relação (▲▲) p. 250 com $T_{ij}^k = 0$ e as simetrias da curvatura vem

$$0 = D_s D_t T = D_t D_t S + R(S, T)T = D_t D_t S - R(T, S)T. (\bullet\bullet)$$

Campos de Jacobi

-3-

Acabamos de demonstrar o resultado seguinte:

Teorema (Equação de Jacobi).

Seja \mathcal{M} uma variedade Riemanniana sem torção. Seja $t \mapsto \gamma(t) \subset \mathcal{M}$ uma geodésica e J uma variação da geodésica, i.e., $J = \partial_s \gamma(t, s)|_{s=0}$. Então vale

$$D_t D_t J = \ddot{J} = R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma} = \mathcal{R}J.$$

♣ Seja uma geodésica $t \in I \mapsto \gamma(t)$ em $p \in \mathcal{M}$ com velocidade inicial $V \in T_p \mathcal{M}$. Num mapa local pode ser escrita no tempo inicial como $V = V^k g_k(p)$ onde $g_k := \frac{\partial}{\partial x^k}$. No mapa local e em coordenadas geodésicas γ é imagem do segmento (tV^1, \dots, tV^n) , com $t = r$ o raio geodésico. Seja $W = W^k g_k \in T_p \mathcal{M}$ e consideremos a variação pelas geodésicas

$\gamma(t, s) := t(V^k + sW^k)g_k$. Logo $J(t) := \partial_s \gamma(t, s)|_{s=0} = tW^k g_k$ é um campo de Jacobi tal que $J(0) = 0$ e $\dot{J}(0) = D_t J(0) = W$.

Campos de Jacobi

-4-

♣ Ao longo da geodésica, definimos $f(t) := (J(t), J(t))_g$. Derivando, considerando a propriedade do operador \mathcal{R} ser auto-adjunto, e a equação $\ddot{J} = \mathcal{R}J$, obtemos

$$f'(t) = 2(\dot{J}, J)_g$$

$$f''(t) = 2(\ddot{J}, J)_g + 2(\dot{J}, \dot{J}) = 2(\mathcal{R}J, J)_g + 2(\dot{J}, \dot{J})$$

$$f'''(t) = 2(\dot{\mathcal{R}}J, J)_g + 8(\mathcal{R}\dot{J}, J)_g$$

$$f^{(iv)}(t) = 2(\ddot{\mathcal{R}}J, J)_g + 12(\dot{\mathcal{R}}\dot{J}, J)_g + 8(\mathcal{R}J, \mathcal{R}J)_g + 8(\mathcal{R}\dot{J}, \dot{J})_g.$$

Ora, sendo que $J(0) = 0$ vem

$$f(0) = 0 = f'(0)$$

$$f''(0) = 2(\dot{J}(0), \dot{J}(0)) = 2(W, W)_g$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f^{(iv)}(0) = 8(\mathcal{R}W, W)_g = -8(R(W, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, W)_g.$$

Campos de Jacobi

-5-

Calculando analogamente vem $f^{(v)}(0) = -20(D_t R(\dot{\gamma}, W)W, \dot{\gamma})$.

Teorema (Aproximação da métrica pela curvatura).

Seja \mathcal{M} uma variedade Riemannianan sem torção. Numa vizinhança geodésica de $p \in \mathcal{M}$ e em coordenadas geodésicas temos

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{iklj}x^k x^l - \frac{1}{6}\nabla_m^\Gamma R_{iklj}x^k x^l x^m + \mathcal{O}(|x|^4)$$

DEM. Supomos que $\varphi(p) = 0$ e consideremos uma vizinhança geodésica em torno de p . Qualquer ponto dessa vizinhança é associado à um raio r e corresponde a um ponto x no mapa local. Consideremos o segmento geodésico $t(x - 0) = tx$, logo tx pertence ao mesmo mapa também para $t \in [0, 1]$. Temos também $\dot{\gamma}(0) = x$. Consideremos para $t \in [0, 1]$,

$$f(t) = (J(t), J(t))_g = g_{ij}(tx)J^i(t)J^j(t) = t^2 g_{ij}(tx)W^i W^j.$$

Campos de Jacobi

-6-

Por Taylor

$$f(t) = \sum_{\alpha=1}^5 \frac{1}{\alpha!} f^{(\alpha)}(0)t^\alpha + \mathcal{O}(t^6).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(t) = & g_{ij}(0)W^iW^jt^2 - \frac{8}{4!}R_{iklj}\dot{\gamma}^k(0)\dot{\gamma}^l(0)W^iW^jt^4 \\ & - \frac{20}{5!}D_tR_{iklj}\dot{\gamma}^k(0)\dot{\gamma}^l(0)W^iW^jt^5 + \mathcal{O}(t^6). \end{aligned}$$

Mas, $\dot{\gamma}(0) = x$, $D_tR_{iklj} = \nabla_m^\Gamma R_{iklj}\dot{\gamma}^m(0) = \nabla_m^\Gamma R_{iklj}x^m$, e, numa vizinhança geodésica $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$, logo

$$\begin{aligned} f(t) = & t^2g_{ij}(tx)W^iW^j = \delta_{ij}W^iW^jt^2 - \frac{8}{4!}R_{iklj}\dot{x}^kx^lW^iW^jt^4 \\ & - \frac{20}{5!}\nabla_m^\Gamma R_{iklj}x^kx^lx^mW^iW^jt^5 + \mathcal{O}(t^6|x|^4). \end{aligned}$$

O resultado segue tomando $t = 1$ e W canônico. QED. ■

♣ Definimos as variedades diferenciáveis e Riemannianas, como um ambiente de trabalho intrínseco munido de uma estrutura linear via os planos tangentes e difeomorfas ao espaço euclidiano (de dimensão superior) mediante os teoremas de Whitney-Nash. As mesmas podem ser mais ou menos regulares conforme a escolha de uma família de mapas de transição. Além do mais, existe uma noção de métrica, i.e., de medições de comprimentos e ângulos entre vetores tangentes. O ecossistema completo consiste nas variedades completadas com os seres que vivem nela, nomeadamente as **formas diferenciais**. A geometria diferencial consiste em resultados que associam formas diferenciais em variedade diferenciáveis com as operações de derivação (i.e., o cálculo exterior) e de integração (generalizando a integração no sentido de Lebesgue). O primeiro resultado importante que alia integração e diferenciação é o teorema de Stokes que veremos no final das aulas. O mesmo é provavelmente o resultado mais importante em Análise Matemática. Cf. a cadeira de MMF.

(Grassman) algebra dos m -vetores em \mathbb{R}^N

1. Definimos uma classe de equivalência \sim sobre $(\mathbb{R}^N)^m$ tal que

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, 1 \leq i, j \leq m$ temos

$$(a) \quad (u_1, \dots, \alpha u_i, \dots, u_j, \dots, u_m) \sim (u_1, \dots, u_i, \dots, \alpha u_j, \dots, u_m)$$

$$(b) \quad (u_1, \dots, u_i + \alpha u_j, \dots, u_j, \dots, u_m) \sim (u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_m)$$

$$(c) \quad (u_1, \dots, -u_j, \dots, u_i, \dots, u_m) \sim (u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_m)$$

Temos também $u \sim v \iff v \sim u$ e $u \sim v \wedge v \sim w \Rightarrow u \sim w$.

2. Um m -vetor simples é definido como

$$u_1 \wedge \dots \wedge u_m \in (\mathbb{R}^N)^m / \sim$$

3. Considere o espaço vetorial $\Lambda_m(\mathbb{R}^N)$ das combinações lineares de simples m -vetores munido da relação de equivalência

$$(A) \quad \alpha(u_1 \wedge \dots \wedge u_m) \equiv (\alpha u_1) \wedge \dots \wedge u_m$$

$$(B) \quad u_1 \wedge \dots \wedge u_m + \tilde{u}_1 \wedge \dots \wedge u_m \equiv (u_1 + \tilde{u}_1) \wedge \dots \wedge u_m$$

Este espaço é chamado espaço dos m -vetores em \mathbb{R}^N .

(Grassman) algebra dos m -vetores

- $u \wedge v$ é chamado " u (produto) wedge com v ".
- Seja u_1, \dots, u_m mutuamente dependentes. Logo $\forall i, \exists \alpha_j^{(i)} : 0 = u_i - \sum_{1=j \neq i}^m \alpha_j^{(i)} u_j$. Pelo (b) temos $u_1 \wedge \dots \wedge u_m \sim 0$. Em particular se $m > N$, $u_1 \wedge \dots \wedge u_m \sim 0$.
- Exemplo: o 2-vetor $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 \in \Lambda_2(\mathbb{R}^4)$ não é simples.

Algebra exterior dos vetores

Seja $\Lambda_m(\mathbb{R}^N)$ o espaço vetorial dos m -vetores em \mathbb{R}^N .

Definimos a **algebra exterior** de \mathbb{R}^N como a soma direta $\Lambda_*(\mathbb{R}^N) = \Lambda_1(\mathbb{R}^N) \oplus \dots \oplus \Lambda_N(\mathbb{R}^N)$ mediante a extensão linear da seguinte operação de base entre um m - e um l -vetor ("concatenação"):

$$(u_1 \wedge \dots \wedge u_m) \wedge (v_1 \wedge \dots \wedge v_l) = u_1 \wedge \dots \wedge u_m \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_l$$

($\in \Lambda_{m+l}(\mathbb{R}^N)$ se $m+l \leq N$, = 0 senão).

Funções m -multilineares e alternantes

Função m -multilinear e alternante

1. Uma função $\phi : (\mathbb{R}^N)^m \rightarrow \mathbb{R}$ é m -multilinear se, \forall (entrada) l ,

$$\phi(u_1, \dots, \alpha u + \beta v, \dots, u_m) =$$

$$\alpha \phi(u_1, \dots, u, \dots, u_m) + \beta \phi(u_1, \dots, v, \dots, u_m)$$
2. Uma função $\phi : (\mathbb{R}^N)^m \rightarrow \mathbb{R}$ é alternante se, $\forall i, l$,

$$\Phi(u_1, \dots, u_l, \dots, u_i, \dots, u_m) =$$

$$-\Phi(u_1, \dots, u_l, \dots, u_i, \dots, u_m)$$

Espaço vetorial das funções m -multilineares e alternantes

Definimos $\Lambda^m(\mathbb{R}^N)$ como o espaço das funções ϕ, ψ que verifiquem (1) e (2) e t.q.

$(\phi + \psi)(u) = \phi(u) + \psi(u)$ e $(\alpha\phi)(u) = \alpha\phi(u), \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

- Os elementos de $\Lambda^m(\mathbb{R}^N)$ são chamados **m -covetores**.

Dualidade m -vetor- m -co-vetor

- No caso $m = 0$, $\Lambda^0(\mathbb{R}^N)$ é o espaço das funções de \mathbb{R}^N com valores reais. No caso $m = 1$, $\Lambda^1(\mathbb{R}^N) = (\mathbb{R}^N)^*$, 1-linear = linear. $\Lambda^1(\mathbb{R}^N)$ é o espaço das formas diferenciais.
- **No caso** $m = N$, os elementos de $\Lambda^N(\mathbb{R}^N)$ são múltiplos reais do determinante da matrix $U = (u_1 \cdots u_N)$ ou U^T , sendo o determinante (definido como) a única forma N -multilinear alternada tal que $\det(e_1 | \cdots | e_n) = 1$.
- Seja $a_i \in \Lambda^1(\mathbb{R}^N)$, $i = 1, \dots, m$, i.e. $\exists a_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, N$ tal que $a_i = a_{i1}dx^1 + \cdots + a_{iN}dx^N, \forall 1 \leq i \leq m$.

m -Jacobiano

Seja um mapa $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^k$ suficientemente regular. O m -covetor **Jacobiano** é definido como $Ju := du^1 \wedge \cdots \wedge du^m$.

Dualidade m -vetor- m -co-vetor: produto exterior ("wedge")

N -Jacobiano = Determinante

No caso $N = m$ vem

$$Ju = \det(Du) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$$

Produto exterior (definição)

O **produto exterior** $a_1 \wedge \cdots \wedge a_m \in \Lambda^m(\mathbb{R}^N)$ é definido como:

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_m[u_1, \cdots, u_m] := \det(\langle a_i | u_j \rangle)_{ij}, \forall u_i = u_i^k e_k \in \mathbb{R}^N.$$

• Mediante a relação de equivalência \sim é evidente que $\Lambda^m(\mathbb{R}^N)$ é o espaço dual de $\Lambda_m(\mathbb{R}^N)$, onde

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_m[u_1 \wedge \cdots \wedge u_m] = a_1 \wedge \cdots \wedge a_m[u_1, \cdots, u_m].$$

• Sendo $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$ a base de $\Lambda_m(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq i_1, \cdots, i_m \leq N$,

Dualidade m -vetor- m -co-vetor: determinante

a base de $\Lambda^m(\mathbb{R}^N)$ é $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}$, $1 \leq i_1, \dots, i_m \leq N$, já que $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m} [e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_m}] = 1$ se $i_k = j_k$ e $= 0$ ou -1 senão.

Base dual de co-vetores

Sendo $\{e_i\}_i$ a base Cartesiana de \mathbb{R}^N , definimos a base dual $\{e_j^*\}_j$ tal que $\langle e_j^* | e_i \rangle = \delta_{ij}$. Notação: $e_i^* = dx^i =$ diferencial de x^i .

Base de $\Lambda^1(\mathbb{R}^N)$: $\{dx^{i_1}, \dots, dx^{i_N}\}$. A base de $\Lambda^m(\mathbb{R}^N)$ é:

$\Xi_m^N := \{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}, dx^{\sigma_1(i_1)} \wedge \dots \wedge dx^{\sigma_1(i_m)}, \dots, dx^{\sigma_d(i_1)} \wedge \dots \wedge dx^{\sigma_d(i_m)}\}$ com $\sigma_i(k)$ ($1 \leq i \leq d = \frac{N!}{m!(N-m)!}$) uma permutação par dos índices $1 \leq k \leq N$.

- Assim, a base de $\Lambda_2(\mathbb{R}^3)$ é $(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3)$ e a de $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ é $(dx^1 \wedge dx^2, dx^1 \wedge dx^3, dx^2 \wedge dx^3)$, sendo que $dx^1 \wedge dx^2(e_1 \wedge e_2) = \det(1 \ 0 | 0 \ 1) = 1$ enquanto $dx^1 \wedge dx^2(e_2 \wedge e_3) = \det(0 \ 0 | 1 \ 0) = 0$, etc.

(Grassmann) algebra dos covetores

- **EX 1:** a forma $dS = dx^1 \wedge dx^2$ em \mathbb{R}^3 é chamada elemento de superfície orientado, pois que $dx^1 \wedge dx^2 = -dx^2 \wedge dx^1$
- **EX 2:** a forma $dV = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ em \mathbb{R}^3 é o elemento de volume orientado: $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = -dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3$.

Algebra exterior dos covetores

Definimos também $\Lambda^*(\mathbb{R}^N) = \Lambda^1(\mathbb{R}^N) \oplus \dots \oplus \Lambda^N(\mathbb{R}^N)$ com a extensão linear da operação entre um m - e um l -co-vetor:

$$(a_1 \wedge \dots \wedge a_m) \wedge (b_1 \wedge \dots \wedge b_l) = a_1 \wedge \dots \wedge a_m \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_l$$

($\in \Lambda^{m+l}(\mathbb{R}^N)$ se $m+l \leq N$, = 0 senão).

Remark: caso de uma variedade

Se estivermos numa variedade \mathcal{M} em vez de \mathbb{R}^N então o espaço vetorial associado é o plano tangente em cada ponto $p \in \mathcal{M}$, $T_p\mathcal{M}$. As bases associadas ao mesmo são portanto $\{g_i\}_i$ e $\{g^j\}_j$.

Base de orientação direta

-1- caso $3d$

- **Regra 1:** partimos de um triedro de orientação direta em \mathbb{R}^3 , ou seja $\{e_1, e_2, e_3\}$.
- Construimos o 3-vetor simples orientado por convenção (dita da mão direita) $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = e_2 \wedge e_3 \wedge e_1 = e_3 \wedge e_1 \wedge e_2$, e os 2-vetores simples orientados $\{e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1\}$.
- **Regra 2:** A ordem dos elementos na base dual $\{dx^i, dx^j, dx^k\}$ é conforme ao sinal dos mapas de dualidade:
 - caso ser uma 3-forma, $dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k [e_m \wedge e_n \wedge e_p]$ só pode ser 0, -1 ou 1, sendo que $e_m \wedge e_n \wedge e_p$ tem orientação direta. Portanto a ordem certa (= direta) é $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ ou $dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1$ ou $dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2$, pois neste caso vale 1.
 - caso ser uma 2-forma, temos de ter $dx^i \wedge dx^j [e_m \wedge e_n]$ igual a 0, -1 ou 1, sendo que $e_m \wedge e_n$ tem orientação directa. Obtemos portanto a base $\{dx^1 \wedge dx^2, dx^2 \wedge dx^3, dx^3 \wedge dx^1\}$.
 - **Contra-exemplo:** a base $\{dx^1 \wedge dx^2, dx^1 \wedge dx^3, dx^2 \wedge dx^3\}$ não tem orientação direta pois que $dx^1 \wedge dx^3 [e_3 \wedge e_1] = -1$.

Base de orientação directa

-2- m -formas sob \mathbb{R}^N

• **Caso das N -formas:** a base é a única N -forma simples tal que $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_N} [e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_N}]$ seja igual a 1, sendo que $e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_N}$ tem orientação directa, ou seja $j_1 < \cdots < j_N$ é uma permutação par de $i_1 < \cdots < i_N$. Mas, outra base seria $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_N} = dx^{\sigma(i_1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\sigma(i_N)}$ para qualquer mapa de permutação σ que seja par.

• **Caso das m -formas:** constroi-se o símbolo

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & \cdots & m & m+1 & \cdots & N \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_m & j_1 & \cdots & j_{N-m} \end{array} \right)$$

com os índices i_k e j_l ordenados, ou seja $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq N$ e $1 \leq j_1 < \cdots < j_{N-m} \leq N$.

Depois determina-se o mapa de permutação σ tal que

$$\sigma(i_1, \cdots, i_m, j_1, \cdots, j_{N-m}) = (1, \cdots, m, m+1, \cdots, N).$$

•• Se o mapa for par, a ordem (i_1, \cdots, i_m) é directa, e a base directa constroi-se com esses índices na ordem certa.

Exemplos

- **2-formas em \mathbb{R}^4 :** temos 6 elementos que são dados após análise

$$\text{do símbolo } \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \sigma \text{ par} \\ \sigma \text{ impar} \\ \sigma \text{ par} \\ \sigma \text{ par} \\ \sigma \text{ impar} \\ \sigma \text{ par.} \end{array} \right)$$

Sendo assim os 6 elementos da base na ordem certa são

$$\{dx^1 \wedge dx^2, dx^1 \wedge dx^4, dx^2 \wedge dx^3, dx^3 \wedge dx^1, dx^3 \wedge dx^4, dx^4 \wedge dx^2\}$$

- **3-formas em \mathbb{R}^4 :** temos 4 elementos que são dados após análise

$$\text{do símbolo } \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \sigma \text{ par} \\ \sigma \text{ impar} \\ \sigma \text{ par} \\ \sigma \text{ impar.} \end{array} \right)$$

Sendo assim os 4 elementos da base na ordem certa são

$$\{dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4, dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^4, dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^4\}.$$

Exemplos de cálculo exterior com formas diferenciais com coeficientes constantes

• **EX1.** Seja $m = 2$ e $a_1, a_2, a_3 \in \Lambda^1(\mathbb{R}^N)$. Temos

$a_1 \wedge (a_2 + a_3) = a_1 \wedge a_2 + a_1 \wedge a_3$, pois que

$$a_1 \wedge (a_2 + a_3)[u_1, u_2] = \det \begin{pmatrix} a_1[u_1] & a_1[u_2] \\ (a_2 + a_3)[u_1] & (a_2 + a_3)[u_2] \end{pmatrix} = \\ \det \begin{pmatrix} a_1[u_1] & a_1[u_2] \\ a_2[u_1] & a_2[u_2] \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1[u_1] & a_1[u_2] \\ a_3[u_1] & a_3[u_2] \end{pmatrix}.$$

• **EX2.** Seja $N = 3$, $m = 2$, $a_1 = Adx$ e $a_2 = Bdy + Cdz$. Então

$a_1 \wedge a_2 = ABdx \wedge dy + ACdx \wedge dz$, ou seja

$$a_1 \wedge a_2[u, v] = ABdx \wedge dy[u, v] + ACdx \wedge dz[u, v] = \\ AB(u_1v_2 - u_2v_1) + AC(u_1v_3 - u_3v_1) = \\ = \det \begin{pmatrix} Au_1 & Av_1 \\ Bu_2 + Cu_3 & Bv_2 + Cv_3 \end{pmatrix} = Adx \wedge (Bdy \wedge Cdz)[u, v].$$

Sentido geométrico de uma 1-forma a $2d$

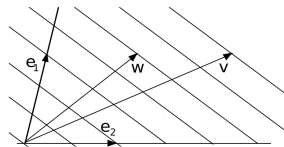
- EX3.** Seja $N = 3$, $m = 2$, $a_1 = A dx$ e $a_2 = B dy + C dz$. Temos $a_1 \wedge a_2 = -a_2 \wedge a_1$, pois que $AB dx \wedge dy + AC dx \wedge dz = -BA dy \wedge dx - CA dz \wedge dx = -(B dy + C dz) \wedge A dx$.

Generalização

Seja ω uma forma diferencial de ordem ímpar, logo

$$\omega \wedge \omega = -\omega \wedge \omega, \text{ i.e., } \omega^2 = 0.$$

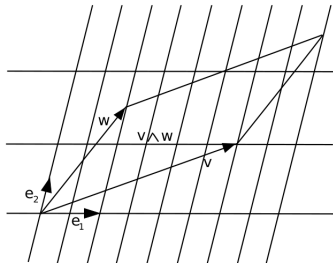
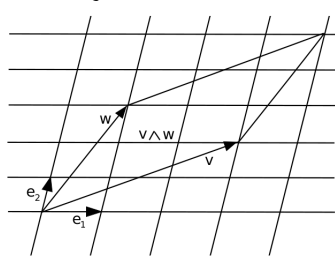
- EX4.** Seja um fluxo $\omega = 3dx + 2dy$ (i.e. com densidade 3 longo e_1 e 2 longo e_2), e sejam $v = e_1 + 2e_2$ e $w = e_1 + e_2$.



O fluxo ao longo de v , $\omega[v] = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7 =$ número de linhas cruzadas por v , e longo w : $\omega[w] = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5 =$ número de linhas cruzadas por w .

Sentido geométrico de uma 2-forma a $2d$

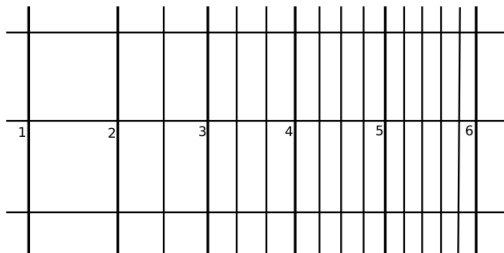
- EX5.** $dx \wedge dy[e_1 \wedge e_2] = \det(1 \ 0 | 0 \ 1) = 1$. Sendo que $\Lambda^2(\mathbb{R}^2)$ é unidimensional, tem $dx \wedge dy$ como único elemento da base, logo $\omega = k dx \wedge dy \in \mathbb{R}$. Em particular $dx \wedge dy[v \wedge w] = \det(v_1 \ w_1 | v_2 \ w_2) = \text{area (com sinal) do paralelograma (orientado) gerado por } u \text{ e } v$.
- EX6.** Seja $v = 3e_1 + 2e_2$ e $w = e_1 + 3e_2$.



Temos $dx \wedge dy[v \wedge w] = |3 \ 1 | 2 \ 3| = 7 = \# \text{ celas cobertas por } v \wedge w$.
 Seja $\omega = 2dx \wedge \frac{1}{2}dy = dx \wedge dy$. Temos $\omega[v \wedge w] = 7 = \omega[2v \wedge \frac{1}{2}w]$.

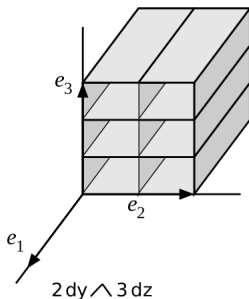
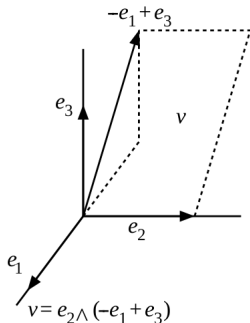
Sentido geométrico de uma 1-forma a $2d$ com coeficientes variáveis

- **EX7.** Seja $\omega = xdx$. A representação geométrica de $[x]dx$ com $[x]$ a aproximação inteira de x é dada pela figura:



Sentido geométrico de uma 2-forma a $3d$ com coeficientes constantes

♣ **EX8.** Seja $\omega = 2dy \wedge 3dz$ e seja o retângulo com normal $\nu = e_2 \wedge (-e_1 \wedge e_3)$ gerado por e_2 e $-e_1 + e_3$. Quantos tubos rectangulares na figura a direita são cortados por ν ? Resposta: temos que calcular $\omega[\nu] = |2 \ 0| |0 \ 0| + |2 \ 0| |0 \ 3| = 6$.



Elementos e integrandos de linha, superfície e volume

- Vimos que os elementos de linha, superfície e volume são

$$dL = dx, dy, dz, \quad dS = dx \wedge dy, dx \wedge dz, dy \wedge dz \quad e$$

$$dV = dx \wedge dy \wedge dz.$$

Portanto os integrandos de caminho, superfície e volume são então

$$\gamma|dL = a(x, y, z)dx + b(x, y, z)dy + c(x, y, z)dz,$$

$$\Gamma|dS = A(x, y, z)dx \wedge dy + B(x, y, z)dx \wedge dz + C(x, y, z)dy \wedge dz$$

$$e f(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz.$$

Serão integrados numa curva, superfície ou volume de \mathbb{R}^3 logo que teremos uma noção de integral.

Mudança de coordenadas

- Vimos que, dadas as coordenadas (x, y) , o integrando de área é $S = A(x, y)dx \wedge dy$, sendo $dx \wedge dy$ o elemento de área. O que é que acontece se mudamos as coordenadas, i.e., $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$?

Mudança de coordenadas no plano

$$\begin{aligned} \text{Calculemos: } dx \wedge dy &= (x_{,u}du + x_{,v}dv) \wedge (y_{,u}du + y_{,v}dv) = \\ &= x_{,u}y_{,v}du \wedge dv + x_{,v}y_{,u}dv \wedge du = (x_{,u}y_{,v} - x_{,v}y_{,u})du \wedge dv = \\ &= \det(x_{,u} \ x_{,v} | y_{,u} \ y_{,v}) du \wedge dv = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du \wedge dv \text{ com} \end{aligned}$$

$\mathcal{J}(xy|uv) := \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ o jacobiano (com sinal) da mudança de coordenadas.

• **Nota 1:** o produto \wedge dá automaticamente a transformação certa na mudança de coordenadas, bem como o sinal certo, sendo os elementos orientados.

• **Nota 2:** no caso de um volume, teremos $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ e $z = z(u, v, w)$ e

$$dx \wedge dy \wedge dz = \mathcal{J}(xyz|uvw) du \wedge dv \wedge dw.$$

Formas diferenciais

Definição

Uma m -forma diferencial sobre o aberto $W \subset \mathbb{R}^N$ é uma função: $\phi : W \rightarrow \Lambda^m(\mathbb{R}^N)$. Pode ser escrita na base de $\Lambda^m(\mathbb{R}^N)$ como $\phi = \phi_{i_1 \dots i_m} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}$, com a definição das componentes $\phi_{i_1 \dots i_m}(x) = \phi(x)[e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}]$. Temos $\forall v \in \Lambda_m(\mathbb{R}^N)$,

$$x \mapsto \phi(x)[v] := \phi_{i_1 \dots i_m}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_m} [v_1 \wedge \dots \wedge v_m].$$

- A forma ϕ é $C^k(W)$ se $\forall v \in \Lambda_m(\mathbb{R}^N)$, $x \mapsto \phi(x)[v]$ é $C^k(W)$.
- $\{x_i\}_i$ são as coordenadas (Cartesianas ou curvilíneas).
- m é chamado grau da forma ϕ .
- Uma forma diferencial ϕ vai naturalmente ser integrada sobre uma variedade m -dimensional: 1-forma L como integral de linha, 2-forma S como integral de superfície, 3-forma V como integral de volume. Para isso teremos de introduzir métrica e medida.

Diferencial exterior duma m -forma diferencial -1-

♣ Seja $f : W \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{C}^k(W)$, $k \geq 1$.

Definição

1. O diferencial exterior de f é $df := \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j$, $1 \leq j \leq N$, ou seja por Riesz, $df(x)[v] = \nabla f(x) \cdot v$ (em Cartesiano).
 2. O diferencial exterior da m -forma $\phi = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m}$ é a $m + 1$ -forma $d\phi := df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m}$.
 3. O diferencial de uma $\mathcal{C}^k(W)$ m -forma é definida por extensão linear da definição anterior.
- **Nota:** diferencial exterior ou diferencial de de Rham definida mediante o produto exterior \wedge .

Diferencial exterior duma m -forma diferencial -2-

- "d sobre $\Lambda^0 = \text{grad}$ ": seja $f \in \Lambda^0(\mathbb{R}^N)$; já vimos que $\text{grad } f = \Phi^{-1}(df)$.
- "d sobre $\Lambda^2 = \text{div}$ ": Seja $U = ue_1 + ve_2 + we_3$, logo $\text{div } U = u_{,1} + v_{,2} + w_{,3}$. Seja $\omega = udx^2 \wedge dx^3 + vdx^3 \wedge dx^1 + wdx^1 \wedge dx^2$. Logo $d\omega = u_{,1}dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + v_{,2}dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + w_{,3}dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 = \text{div } U dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$.
- "d sobre $\Lambda^1 = \text{curl}$ ": Seja $U = ue_1 + ve_2 + we_3$, logo $\text{curl } U = (w_{,2} - v_{,3})e_1 + (u_{,3} - w_{,1})e_2 + (v_{,1} - u_{,2})e_3$. Seja $\phi = udx^1 + vdx^2 + wdx^3$, logo $d\phi = u_{,2}dx^2 \wedge dx^1 + v_{,1}dx^1 \wedge dx^2 + u_{,3}dx^3 \wedge dx^1 + w_{,1}dx^1 \wedge dx^3 + v_{,3}dx^3 \wedge dx^2 + w_{,2}dx^2 \wedge dx^3 = (w_{,2} - v_{,3}) dx^2 \wedge dx^3 + (u_{,3} - w_{,1})dx^3 \wedge dx^1 + (v_{,1} - u_{,2})dx^1 \wedge dx^2 = \Phi(\text{curl } U)$.

Diferencial exterior duma m -forma diferencial -3-

- **EX 1:** $\phi = f_i(x)dx^i$; logo $d\phi = \partial_j f_i dx^j \wedge dx^i$. Há de ser re-escrito na bas Ξ_1^N .
- **EX 2:** $\omega = g_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j$; logo $d\omega = \partial_k g_{ij} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j$. Há de ser re-escrito na base Ξ_2^N .
- **EX 3:** Seja $A := a_i dx^i \in \Lambda^1(\mathbb{R}^N)$. Logo $B = dA = \partial_j a_i dx^j \wedge dx^i$ e $B = (\partial_{i_1} a_{i_2} - \partial_{i_2} a_{i_1}) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}$ com $dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \in \Xi_1^N$.

Lemma 1

Seja ϕ, ψ duas $C^1(W)$ - m -forma e θ uma $C^1(W)$ l -forma. Temos

1. $d(\phi + \psi) = d\phi + d\psi$
2. $d(\phi \wedge \theta) = d\phi \wedge \theta + (-1)^m \phi \wedge d\theta$.

O lema e a recíproca do lema de Poincaré

Teorema 1: Poincaré lemma

Seja ϕ uma $\mathcal{C}^2(W)$ m -forma diferencial. Logo $d\phi = 0$.

Formas fechadas e exactas

Seja $\phi \in \mathcal{C}^k(W, \Lambda^m(\mathbb{R}^N))$. A m -forma ϕ é dita

1. fechada se $d\phi = 0$.
2. exacta se $\exists \psi \in \mathcal{C}^{k+1}(W, \Lambda^{m-1}(\mathbb{R}^N))$: $\phi = d\psi$.

Teorema 2: Recíproca do lema de Poincaré

Seja W um aberto de \mathbb{R}^N simplesmente conexo e ϕ uma $\mathcal{C}^k(W)$ - m -forma diferencial tal que $d\phi = 0$. Então existe uma $\mathcal{C}^{k+1}(W)$ - $m - 1$ -forma diferencial α tal que $\phi = d\alpha$.

Espaço dual V^*

- Seja um espaço vetorial V e $v = \hat{v}^i \hat{g}_i$. O diferencial $ds^i : V \rightarrow \mathbb{R}$ é definido como a mapa linear: $ds^i[v] = \hat{v}^i$ (componente contravariante de v na base curvilínea)
- Seja V^* o espaço vetorial das mapas lineares em V . O mesmo tem base $\{ds^i\}$ (sendo o sistema de coordenadas escolhido $\{s^i\}_i$), isto é, um elemento ω de V^* escreve-se sempre como:

$$\omega = \omega_i ds^i, \omega_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n\}.$$

DEM.

$$\forall v \in V, \omega[v] = \hat{v}^i \omega[\hat{g}_i] = \hat{v}^j \omega[\hat{g}_i] \delta_{ij} = \hat{v}^j \omega[\hat{g}_i] ds^i[\hat{g}_j] = \omega[\hat{g}_i] ds^i[v].$$

QED. ■

Produto interno de V^*

Seja $\omega := \omega_i ds^i \in V^*$ e $\lambda := \lambda_i ds^i \in V^*$. Definimos

$$(\omega, \lambda)_* = g^{ij} \omega_i \lambda_j.$$

Operadores entre V e V^*

- Comparar com o p.i. de V : $u \cdot v = \hat{u}^i \hat{g}_i \cdot \hat{v}^j \hat{g}_j = g_{ij} \hat{u}^i \hat{v}^j$.

Operador "dual recíproco" Φ^{-1}

$$\Phi^{-1} : V^* \rightarrow V; \omega = \omega_i ds^i \mapsto \omega_i g^{ij} \hat{g}_j.$$

Portanto o operador Φ será definido de tal maneira que $\Phi(\Phi^{-1}) = \text{Id}$. Φ é o operador (um isomorfismo) que transforma um vetor numa forma diferencial.

Operador Φ

$$\Phi : V \rightarrow V^*; v = \hat{v}^j \hat{g}_j \mapsto \hat{v}^j g_{kj} ds^k.$$

- Verifica-se que $\Phi(\Phi^{-1}(\omega)) = \omega_i g^{ij} g_{kj} ds^k = \omega_i \delta_{ki} ds^k = \omega_i ds^i$.

Produto interno em $\Lambda^m(\mathcal{M})$

Produto interno em $\Lambda^1(\mathbb{R}^N)$ e $\Lambda^1(T\mathcal{M})$

Seja $\omega = \omega_i dx^i$, $\eta = \eta_j dx^j \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$. Definimos $(\omega, \eta) = \omega_i \eta_i$.
 Seja uma variedade diferenciável \mathcal{M} e $T\mathcal{M} = \bigcup_{p \in \mathcal{M}} \{p\} \times T_p\mathcal{M}$ o conjunto dos planos tangentes em $p \in \mathcal{M}$. Definimos

$$\omega \cdot \eta := (\omega, \eta)_x := \omega_i(x) \eta_j(x) g^{ij}(x)$$

em $T_p\mathcal{M}$, com $g_{ij}(p)$ a métrica de \mathcal{M} em $p \in \mathcal{M}$.

Produto interno local em $\Lambda^m(\mathbb{R}^N)$ e $\Lambda^m(T\mathcal{M})$

Definimos $(\omega, \eta)_x = \omega_{i_1 \dots i_m} \eta_{i_1 \dots i_m}(x)$ em \mathbb{R}^N e, caso de uma base orthogonal, $(\omega, \eta)_x = \omega_{j_1 \dots j_m}(x) \eta_{i_1 \dots i_m}(x) g^{i_1 j_1}(x) \dots g^{i_m j_m}(x)$ em $T_p\mathcal{M}$ para $p \in \mathcal{M}$. Caso de uma base geral, $(\omega, \eta)_p = \omega_{j_1 \dots j_m}(x) \eta_{i_1 \dots i_m}(p) \det(dx^{i_k} \cdot dx^{j_l})_{kl}(p)$. Definição alternativa:
 $(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_m, \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_m) = \det((\omega_l, \eta_l))_{1 \leq k, l \leq m}$.

Invariança do operador Φ

Lema: Representação de um funcional linear (Riesz)

Seja V um espaço vetorial com um produto interno

$\langle \cdot | \cdot \rangle = (\cdot, \cdot)_g$. Seja um mapa linear $\omega \in V^*$, $\omega : V \rightarrow \mathbb{R}$. Então existe um único vetor $u = u_\omega \in V$ tal que $\omega[v] = \langle u | v \rangle, \forall v \in V$.

DEM. $\forall v \in V, \omega[v] = \omega_k ds^k[v] = \omega_k \hat{v}^k = \delta_{kj} \omega_j \hat{v}^k = g_{ik} g^{ij} \omega_j \hat{v}^k = g_{ik} \hat{u}^i \hat{v}^k = \langle u | v \rangle$, com as definições $\hat{u}^i := g^{ij} \omega_j$ e $\omega_j := \omega(e_j)$.

QED ■

Bracket notation—notação de Dirac

Sendo que $\omega[v] = \langle u_\omega | v \rangle$ a notação de Dirac é a seguinte:

$\langle u_\omega | := \Phi(u_\omega)$ ("bra") representa a forma linear ω enquanto $|v \rangle$ ("ket") é o vetor v .

- Falta ainda demonstrar que Φ (como df) é "coordinate-free".

└ B.2. Formas diferenciais e cálculo diferencial em variedades diferenciáveis

└ A.5. Espaços vetoriais duais e o operador Φ

Definição invariante de Φ e de Φ^{-1}

Seja $l \in V^*$ e $u = u_1 \in V$ tal que, pelo teorema de Riesz,

$$l[v] = \langle u_1 | v \rangle.$$

O operador ϕ é definido como: $\phi : V^* \rightarrow V : l \mapsto \phi(l) = u_1$.

Logo $\Phi := \phi^{-1}$ e $\Phi^{-1} := \phi$ são independentes das coordenadas uma vez que $\Phi(u_1)[v] = l[v] = \langle u_1 | v \rangle$, sendo o produto interno independente das coordenadas.

Definição "coordinate-free" do gradiente

Seja uma função $f : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. O gradiente de f é definido como:

$$\nabla f = \text{grad} f := \Phi^{-1}(df).$$

Aplicação de "dd = 0" (num domínio simplesmente conexo)

Seja $U = ue_1 + ve_2 + we_3$ e $A = ae_1 + be_2 + ce_3$, com $u, v, w, a, b, c \in \mathcal{C}^1(W)$.

1. Seja $\phi = udx + vdy + wdz = \Phi(U)$. Se $d\phi = 0$ então existe uma função escalar f tal que $\phi = df$, i.e., $d\phi = 0$ significa

$$\Phi^{-1}(d\phi) = \text{curl } U = 0 \implies \Phi^{-1}(df) = \Phi^{-1}(\phi) = U = \text{grad } f.$$

2. Seja $\omega = udy \wedge dz + vdz \wedge dx + wdx \wedge dy$. Se $d\omega = 0$ então existe uma 1-forma $\alpha = adx + bdy + cdz$ t.q.

$$\Phi(U) = \omega = d\alpha = (c_{,y} - b_{,z})dy \wedge dz + (a_{,z} - c_{,x})dz \wedge dx + (b_{,x} - a_{,y})dx \wedge dy = \Phi(\text{curl } A), \text{ i.e.:$$

$$d\omega = 0 \iff (\text{div } U = 0 \implies U = \text{curl } A).$$

O operador dual de Hodge -1-

♣ Em $\Lambda^m(\mathbb{R}^3)$ temos duas famílias de co-vetores de base com o mesmo número de elementos, i.e., $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$ e $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ têm 3 (dx, dy, dz e $dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$) enquanto $\Lambda^0(\mathbb{R}^3)$ e $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)$ têm 1 (1 e $dx \wedge dy \wedge dz$). Gostaríamos então de ter uma bijeção entre $\Lambda^r(\mathbb{R}^3)$ e $\Lambda^{3-r}(\mathbb{R}^3)$, $0 \leq r \leq 3$: a mesma é dada pelo **operador dual de Hodge** \star ; por exemplo, em Cartesiano:

$$\star dx = dy \wedge dz, \star dy = dz \wedge dx, \star dz = dx \wedge dy;$$

$$\star dy \wedge dz = dx, \star dz \wedge dx = dy; \star dx \wedge dy = dz;$$

$$\star 1 = dx \wedge dy \wedge dz;$$

$$\star dx \wedge dy \wedge dz = 1.$$

♣ Introduzimos a forma de volume $\Omega_N := \sqrt{|g|} ds^1 \wedge \cdots \wedge ds^N$.

• Se $\omega \in \Lambda^m(TM)$ e $\eta \in \Lambda^{N-m}(TM)$ então $\omega \wedge \eta = k\Omega_N$, $k \in \mathbb{R}$.

O operador dual de Hodge -2-

Definição de $\star : \Lambda^m(TM) \rightarrow \Lambda^{N-m}(TM) :$

$$\eta \mapsto \star\eta : \forall \omega \in \Lambda^m(TM), \omega \wedge \star\eta = (\omega, \eta)\Omega_N.$$

- **Observação 1:** $\star\eta$ é único (se existir).

Há de demonstrar a existência do mesmo. Com efeito:

- Caso $m = 1$ temos

$$\star\eta = \frac{1}{(N-1)!} \eta_i g^{ij} \sqrt{|g|} \varepsilon_{j i_1 \dots i_{N-1}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{N-1}}.$$

- Caso $m \geq 1$ temos

$$\star\eta := \frac{1}{(N-m)!} \eta_{i_1 \dots i_m} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_m j_m} \sqrt{|g|}$$

$$\varepsilon_{j_1 \dots j_m l_1 \dots l_{N-m}} dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_{N-m}} =$$

$$\frac{1}{(N-m)!} \eta_{i_1 \dots i_m} e_{l_1 \dots l_{N-m}}^{i_1 \dots i_m} dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_{N-m}}.$$

(utilizando o tensor de Levi-Civita)

O operador dual de Hodge -3-

• **EX1.** $\star ds^i = \frac{1}{(N-1)!} g^{ki} \sqrt{|g|} \varepsilon_{ki_1 \dots i_{N-1}} ds^{i_1} \wedge \dots \wedge ds^{i_{N-1}} =$
 $(-1)^{k-1} g^{ki} \sqrt{|g|} \frac{1}{(N-1)!} \varepsilon_{i_1 \dots i_{k-1} k i_{k+1} \dots i_{N-1}} ds^{i_1} \wedge \dots \wedge ds^{i_{N-1}} =$
 $(-1)^{k-1} g^{ki} \sqrt{|g|} ds^1 \wedge \dots \wedge \widehat{ds^k} \wedge \dots \wedge ds^N$. Em Cartesiano, vale
 $g^{ik} = \delta^{ik}$, logo $\star dx^i = (-1)^{i+1} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^N$.

Numa base ortogonal temos $g^{ki} \sqrt{|g|} = \delta_k^i (h^i)^{-2} \frac{h_1 \dots \widehat{h_i} \dots h_N}{h_i}$ e
portanto $\star ds^i = (-1)^{i+1} \frac{h_1 \dots \widehat{h_i} \dots h_N}{h_i} ds^1 \wedge \dots \wedge \widehat{ds^i} \wedge \dots \wedge ds^N$,

onde h_i representam os fatores métricos, e \hat{a} significa "sem a ".

Produto interno L^2 em $\Lambda^m(TM)$

Seja $\omega, \eta \in \Lambda^m(TM)$. Então

$$(\omega, \eta)_2 := \int_{\mathcal{M}} \omega \wedge \star \eta,$$

O operador dual de Hodge -4-

♣ Consideremos uma variedade com métrica definida positiva.

Teorema: $\star \star \omega = (-1)^{m(N-m)} \omega$ com $\omega \in \Lambda^m(TM)$

• **EX2.** Calcular $\star dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^l} \wedge \cdots \wedge dx^{N-1}$. Vamos utilizar o teorema anterior.

•• Passo 1:

$$g_{li} \star dx^i = (-1)^{k+1} \delta_l^k \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \cdots \wedge dx^N =$$

$$(-1)^{l+1} \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^l} \wedge \cdots \wedge dx^N.$$

•• Passo 2: aplicar \star mais uma vez: $g_{li} \star \star dx^i = g_{li} (-1)^{N-1} dx^i$

$$= (-1)^{l-1} \sqrt{|g|} \star dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^l} \wedge \cdots \wedge dx^N.$$

•• Passo 3: $\star dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^l} \wedge \cdots \wedge dx^N = (-1)^{N-l} \frac{1}{\sqrt{|g|}} g_{li} dx^i$.

Co-diferencial e Laplaciano sob m -formas

- Numa base ortogonal temos então:

$$\star dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^l} \wedge \cdots \wedge dx^N = (-1)^{N-l} \frac{h_l^2}{h_1 \cdots h_N} dx^l =$$

$$(-1)^{N-l} \frac{h_l}{h_1 \cdots \widehat{h_l} \cdots h_N} dx^l.$$

Definição do co-diferencial

Seja $\omega \in \Lambda^m$. Então $\delta : \Lambda^m \rightarrow \Lambda^{m-1}$ tal que

$$\delta \omega := (-1)^{N(m-1)+1} \star d \star \omega.$$

Nota: caso N par: $\delta = - \star d \star$, caso N ímpar: $\delta = (-1)^m \star d \star$

Definição invariante do Laplaciano

Seja $\omega \in \Lambda^m$. Então $\Delta : \Lambda^m \rightarrow \Lambda^m$ tal que

$$\Delta \omega := -(d\delta + \delta d)\omega.$$

O operador "pull-back" de uma forma diferencial -1-

♣ Seja $\omega : \mathbb{R}^M \rightarrow \Lambda^m(\mathbb{R}^M)$ uma forma diferencial de grau m definida em \mathbb{R}^M .

Definição do operador "pull-back" de um m -covetor

Seja um operador linear $L : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$. O m -covetor $L^\# \omega(x)$ em \mathbb{R}^N (i.e., o pull back ("puxa atrás") de ω por L) é definido como

$$(L^\# \omega(x))[v_1 \wedge \cdots \wedge v_m] := \omega(x)[Lv_1 \wedge \cdots \wedge Lv_m], \quad \forall v_i \in \mathbb{R}^N.$$

O operador "pull-back" de uma forma diferencial -2-

♣ Seja $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^M$ uma função \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, e $1 \leq m \leq \min(M, N := \dim \mathcal{M})$.

Definição do operador "pull-back" por F de uma m -forma

O pull-back por F é definido como o mapa linear:

$$F^\# : \Lambda^m(\mathbb{R}^M) \rightarrow \Lambda^m(T\mathcal{M}) : \omega \mapsto F^\#\omega \text{ t.q. } \forall u_1, \dots, u_m \in T_p\mathcal{M},$$

$$F^\#\omega(p)[u_1 \wedge \dots \wedge u_m] = \omega(F(p))[D_{u_1}F \wedge \dots \wedge D_{u_m}F],$$

onde $D_vF = \nabla F \cdot v = dF[v]$, $p \in \mathcal{M}$. Nota que

$$(F^\#) \omega(p) := (DF(p))^\#\omega(F(p)).$$

- Se $m = 0$, vem $F^\#\omega = \omega_\#F := \omega \circ F$ (composição de ω com F).

- $y = F(x)$ é a coordenada de origem (associada a ω), x a coordenada de chegada (pelo mapa pull-back por F).

Pull-back de um covetor = transformação tensorial covariante

Com $m = 1$ temos $\forall V \in T_p\mathcal{M}$, $\langle F^\# \omega_p, V \rangle = \langle \omega_{\#} F(p), D_V F(p) \rangle$,
ou seja $\langle F^\# \omega_p, V \rangle = \omega_i(F(p)) V^j \frac{\partial F^i}{\partial x^j}$. Escrevemos portanto

$$\left(F^\# \omega_p \right)_j = \left(F^\# \omega \right)_i (p) = \omega_{F(p)i} \frac{\partial y^i}{\partial x^j},$$

onde $y^i = F^i(p)$. Logo, é uma transformação tensorial covariante.

Teorema: Comutação de $\#$ com d

Seja $k \geq 2$ e $\omega \in \Lambda^m(T\mathcal{M})$ uma C^k - m -forma diferencial definida em $T\mathcal{M}$. Então temos $dF^\# \omega = F^\# d\omega$. (\star)

DEM. • Passo 0 (preliminar): seja η uma l , e ω uma h -forma C^k .

Então,

$$F^\#(\eta \wedge d\omega)(x)[v] = \eta(F(x)) \wedge d\omega(F(x))[D_v F] = F^\# \eta \wedge F^\# d\omega(x)[v].$$

• Passo 1: suponhamos que ω, η verifiquem (\star) . Então

$$dF^\#(a\omega + b\eta) = F^\#(ad\omega + bd\eta) = F^\#(d(a\omega + b\eta)), \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

• Passo 2: caso $m = 0$. Temos $\forall v \in \mathbb{R}^N$, por definição de $F^\#$ e pela chain rule, $dF^\# \phi(x)[v] = d(\phi \circ F)(x)[v]$

$$= d\phi(F(x))[D_v F] = d\phi(F(x))[dF[V]] = F^\# d\phi(x)[v].$$

• Passo 3: suponhamos que ω verifica (\star) , i.e. $F^\# d\omega = dF^\# \omega$. Pelo passo 0 temos $dF^\#(\phi \wedge d\omega)(x)[v] = d(F^\# \phi(x) \wedge F^\# d\omega(x))[v]$.

Logo, pelo o Lemma 1 (.2) p. 301, o passo 2, (\star) , e o passo 0 outra vez, vem $= F^\# d\phi(x) \wedge F^\# d\omega(x)[v] = F^\# (d\phi \wedge d\omega)(x)[v]$.

• Passo 4: caso de uma 1-forma exata: $\omega = d\alpha$. Temos pelo 2, $dF^\# \alpha = dF^\# d\alpha = ddF^\# \alpha = 0 = F^\#(d\omega)$, sendo que $d\omega = 0$.

└ B.2. Formas diferenciais e cálculo diferencial em variedades diferenciáveis

└ C.4. Co-diferencial, Laplaciano e pullback

- Passo 5: caso de uma 1-forma $\omega = \psi_i d\alpha^i$: segue dos passos 0 – 4 com $\omega = \psi d\alpha^i = \psi \wedge d\alpha^i$, $\psi \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap \Lambda^0(\mathbb{R}^N)$, uma vez que $dF^\#(\psi_i \wedge d\alpha^i) = d(F^\#\psi_i \wedge F^\#d\alpha^i)$
 $= F^\#d\psi_i \wedge F^\#d\alpha^i = F^\#d(\psi_i \wedge d\alpha^i)$.
- Passo 6: caso de uma m -forma: segue, supondo a tese verdadeira para $m = 1$ (passo 5) e iterando, considerando os passos 0 – 5. QED ■

As 3 noções de integral

Em \mathbb{R} : Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua.

1. O integral indefinido, ou primitiva: $F(x) = \int^x f(\xi) d\xi$
2. O integral definido, sem sinal: $\int_{[a,b]} f(x) dx$: compatível com a noção de integral de Lebesgue. Tipicamente: área por baixo de uma curva, massa de um corpo com densidade variável, sendo que ambos tem sinal positivo
3. O integral definido, com sinal: $\int_a^b f(x) dx$: compatível com a noção de integral de Riemann. Tipicamente: trabalho efetuado pela força F ao longo do caminho de a a b , sendo que o trabalho tem sinal, e.g., será negativo se for de b a a

Relação entre as mesmas noções

1. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x) dx$
2. $\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) dx$ e $\int_b^a f(x) dx = -\int_{[a,b]} f(x) dx$

Integral unidimensional orientado

♣ $\int_b^a f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x_i$, com $x_0 = a, x_n = b$, sendo que $|\Delta x_i| \rightarrow 0$ e $\sum_{i=0}^n |\Delta x_i| \leq c < \infty$. Portanto $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ pode ser positivo (se $x_{i+1} > x_i$) ou negativo (se $x_{i+1} < x_i$). A quantidade $f(x_i) \Delta x_i$ é o trabalho em x_i : pode ser um incremento positivo ou negativo (é uma energia).

• Introduzimos o mapa linear que a cada incremento Δx faz corresponder o trabalho ao longo Δx :

$$\omega_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \Delta x \mapsto w_x(\Delta x) := f(x) \Delta x.$$

♣ Logo definimos o trabalho total como o integral da mesma:

$$\int_a^b \omega_x = \int_a^b f(x) dx.$$

♣ No caso de uma curva γ em \mathbb{R}^N com ponto inicial a e final b , temos um mapa do plano tangente em x em \mathbb{R} : $\omega_x : T_x \gamma \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} : \Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_N) \mapsto w_x(\Delta x) := f(x) \cdot \Delta x$.

• Logo definimos o trabalho de a a b ao longo de $\gamma \equiv \gamma([a, b])$ como o integral da forma: $\int_\gamma \omega_x = \int_a^b f(\gamma(x)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$.

Integração de uma m -forma

-1-

Dominio de integração

Seja uma n -variedade \mathcal{M} , e uma m -sub-variedade $S = F_{\#}U = F(U)$, com U aberto e $F : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{M}$, $m \leq n$, um mergulho. Caso $\mathcal{M} = W$ for um aberto de \mathbb{R}^n , S é uma hiper-superfície de dimensão m .

- Se S não for na sua totalidade o gráfico de F então será uma união de gráficos $\phi_{\alpha}^{-1}(U_{\alpha})$, e pode se proceder da mesma forma mediante uma clássica partição da unidade.

♣ **Regra geral:** uma m -forma vai ser integrada numa variedade de dimensão m .

Integração de uma m -forma

-2-

Definição do integral de uma m -forma numa m -variedade

Seja ω uma m -forma definida na n -variedade \mathcal{M} . Seja S uma m -subvariedade de \mathcal{M} . Seja $\{s^i\}_{1 \leq i \leq m}$ um sistema de coordenadas em $U \subset \mathbb{R}^m$, $\{\frac{\partial}{\partial s^i}\}_{1 \leq i \leq m}$ uma base local de S definida em U , e $\frac{\partial}{\partial s^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial s^m}$ o m -vetor "volume orientado" de U . O integral de ω em S é definido (quando o RHS estiver finito) como:

$$\begin{aligned} \int_S \omega &= \int_{F\sharp U} \omega := \int_U F\sharp \omega := \int_U F\sharp \omega(s) \left[\frac{\partial}{\partial s^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial s^m} \right] ds^1 \cdots ds^m \\ &= \int_U \omega(F(s)) \left[\frac{\partial F}{\partial s^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial F}{\partial s^m} \right] ds^1 \cdots ds^m \end{aligned}$$

(por definição de $F\sharp \omega$).

Aplicações - integral de volume -1-

- No caso de $U = \mathcal{R}$, o m -cubo com centro 0 temos:

$$\int_S \omega = \int_{F\sharp\mathcal{R}} \omega = \int_{\mathcal{R}} \omega(F(x))[\partial_1 F \wedge \cdots \wedge \partial_m F] dx^1 \cdots dx^m.$$

- ♣ **Exemplo elementar:** seja $m = n = N$, e seja

$\omega(x) = f(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^N$ definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^N$.

Consideremos primeiro o caso onde a variedade U é escrita como

$U \stackrel{(i)}{=} \text{Id}\sharp U$, logo $\partial_i \text{Id}(x) = \partial_i x = e_i$.

D'outro lado $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^N [e_1 \wedge \cdots \wedge e_N] = \det \mathbb{I} = 1$, logo

$$\int_U \omega \stackrel{(i)}{=} \int_{\text{Id}\sharp U} \omega = \int_U \text{Id}\sharp \omega = \int_U \omega(x) [e_1 \wedge \cdots \wedge e_N] dx = \int_U f(x) dx.$$

- **Nota** (abuso de notação): O U nos 3 primeiros integrais é uma superfície orientada, enquanto nos 2 últimos é um conjunto de pontos.

Aplicações - integral de volume -2-

♣ Seja ora a variedade $\mathcal{M} \stackrel{(ii)}{=} F(\mathcal{R})$. O integral da função f em \mathcal{M} é definido como (no caso $\mathcal{M} = U$ obtemos desta forma a **fórmula de mudança de variável**):

$$\int_{\mathcal{M}} \omega \stackrel{(ii)}{=} \int_{F_{\sharp} \mathcal{R}} \omega = \int_{\mathcal{R}} f(F(x)) \frac{\partial(F^1, \dots, F^N)}{\partial(x^1, \dots, x^N)} dx,$$

com o Jacobiano orientado:

$$\mathcal{J}(F(x)|x) := \frac{\partial(F^1, \dots, F^N)}{\partial(x^1, \dots, x^N)} = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^N [\partial_1 F \wedge \dots \wedge \partial_N F].$$

- Uma vez que o Jacobiano escreve se, num sistema de coordenadas qualquer, $\mathcal{J}(F(s)|s) = \sqrt{|g|}$ temos a definição/notação seguinte

Aplicações - integral de volume -3-

Integral de uma função

Seja f uma função suficientemente regular e \mathcal{M} uma variedade de dimensão m . O integral de f em \mathcal{M} é definido como

$$\int_{\mathcal{M}} f \equiv \int_{\mathcal{M}} f \Omega_m = \int_{\mathcal{M}} f \sqrt{|g|} d^m s.$$

• **Nota:** O último integral é um abuso de notação, pois o sistema de coordenadas $\{s^1, \dots, s^m\}$ pode não existir globalmente. Aqui $d^m s := ds^1 \dots ds^m$.

♣ **Outro exemplo: integração de um fluxo vetorial.** Seja $m = 2$ e $n = 3$, e $\phi = \phi^1 e_1 + \phi^2 e_2 + \phi^3 e_3 = \phi^i e_i$ um vetor por integrar na superfície $S = F(U) \subset \mathbb{R}^3$ com $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ as coordenadas. Escrevemos $F(u, v) = (x^1, x^2, x^3)(u, v)$, e observemos que

Aplicações - integral de superfície -1-

$$dx^i \wedge dx^j [\partial_u F \wedge \partial_v F] = \frac{\partial(x^i, x^j)}{\partial(u, v)} = (\partial_u F \times \partial_v F) \cdot (e_i \times e_j).$$

• EX: $dx^1 \wedge dx^2 [\partial_u F \wedge \partial_v F] = (\partial_u F \times \partial_v F) \cdot (e_1 \times e_2) = (\partial_u F \times \partial_v F) \cdot e_3 = (\partial_u F \times \partial_v F)_3.$

♣ Definimos o "elemento de área infinitesimal orientado"

$$\overrightarrow{dS} := \overrightarrow{\delta_u F} \times \overrightarrow{\delta_v F} = \partial_u F du \times \partial_v F dv = \partial_u F \times \partial_v F dudv.$$

A orientação da superfície é dada pela normal $\vec{\nu} = \frac{\partial_u F \times \partial_v F}{|\partial_u F \times \partial_v F|},$

pele que $\overrightarrow{dS} = \vec{\nu} dS$ com o "elemento de área"

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial(x^2, x^3)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x^3, x^1)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x^1, x^2)}{\partial(u, v)}\right)^2} dudv.$$

Aplicações - integral de superfície -2-

- ♣ Lembremos o símbolo $\epsilon_{ijk} = 1$ se ijk são uma permutação par de 123, $= -1$ se for ímpar, e $= 0$ se existem índices repetidos. Temos a identidade $\epsilon_{ijk}\epsilon_{jkl} = 2\delta_{il}$. Vale também $e_j \times e_k = \epsilon_{jkl}e_l$.

Integral de fluxo (integrando vetorial)

A partir do vetor $\phi = \phi^i e_i$ definimos a 2-forma $\omega = \phi^1 dx^2 \wedge dx^3 + \phi^2 dx^3 \wedge dx^1 + \phi^3 dx^1 \wedge dx^2 = 1/2 \epsilon_{ijk} \phi^i dx^j \wedge dx^k$ (com soma em i, j, k , verifica-se facilmente).

- Lembremos a fórmula $dx^j \wedge dx^k [a \wedge b] = (a \times b) \cdot (e_j \times e_k)$. Portanto temos o integral de superfície

$$\begin{aligned} \int_S \omega &= \int_{F\sharp U} \omega = \int_U F\sharp \omega = \int_U \omega(F(u, v)) [\partial_u F \wedge \partial_v F] dudv = \\ &= \int_U 1/2 \epsilon_{ijk} \phi^i dx^j \wedge dx^k [\partial_u F \times \partial_v F] dudv = \end{aligned}$$

$$= \int_U 1/2 \epsilon_{ijk} \phi^i (\partial_u F \times \partial_v F) \cdot (e_j \times e_k) dudv =$$

$$\int_U 1/2 \epsilon_{ijk} \phi^i (\partial_u F \times \partial_v F) \cdot \epsilon_{jkl} e_l dudv =$$

$$= \int_U 1/2 \phi^i (\partial_u F \times \partial_v F)_l 2 \delta_{il} dudv = \int_U \phi^i (\partial_u F \times \partial_v F)_i dudv$$

$\equiv \int_S \phi \cdot \vec{dS} \equiv$ fluxo de ϕ através S (este integral tem sinal!).

- **EX:** ϕ =força (vento, gravidade, electromagnética, etc.)

Integral de superfície de um escalar

Seja f uma função contínua e tome $\phi^i = f \nu^i$ no anterior. Logo o integral de f em S é: $\int_S \phi \cdot \vec{dS} = \int_S f dS$ com o dS anterior.

- **EX:** calcular o baricentro de uma concha esférica.

Teorema de Stokes: caso de um N -retângulo -1-

♣ Seja \mathcal{R} , o N -retângulo de \mathbb{R}^N e $\partial\mathcal{R}$ a fronteira orientada de \mathcal{R} .

Teorema de Stokes em \mathcal{R}

Seja ω uma \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, $N - 1$ -forma definida em $\overline{\mathcal{R}}$. Temos

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \omega = \int_{\mathcal{R}} d\omega.$$

DEM. A demonstração segue do teorema fundamental do cálculo:

considere $\omega = \sum_i \omega_i dx^1 \wedge \cdots \widehat{dx^i} \cdots \wedge dx^N$ e integre

$d\omega = \partial_i \omega_i (-1)^{i-1} dx^i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^N = \partial_i \omega_i \Omega_N$ em \mathcal{R} e ω em $\partial\mathcal{R}$, com $\Omega_N := dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^N$.

Uma vez que $\mathcal{R} = [a_1; b_1] \times \cdots \times [a_N; b_N]$, basta integrar num produto Cartesiano de segmentos $[a_i; b_i]$ e vem

$\int_{[a_i; b_i]} d\omega = \pm(\omega_i(\cdot, b_i, \cdot) - \omega_i(\cdot, a_i, \cdot)) =: \int_{\partial[a_i; b_i]} \omega$. A tese segue pelo teorema de Fubini. QED. ■

• **Lembrete:** teorema fundamental do cálculo:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Teorema de Stokes: caso geral

-2-

Teorema de Stokes em $\mathcal{M} = F_{\#}\mathcal{R} = F(\mathcal{R})$

Seja ω uma C^k , $k \geq 1$, $N - 1$ -forma definida em $\overline{\mathcal{R}}$ e $\mathcal{M} = F(\mathcal{R})$ com $F : \mathcal{R} \rightarrow W$, C^k e t.q. DF é de rank N . Temos

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \omega = \int_{\mathcal{M}} d\omega.$$

DEM. Pela comutação de d com $F^{\#}$ e pelo teorema anterior, vem $\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{F_{\#}\mathcal{R}} d\omega = \int_{\mathcal{R}} F^{\#}d\omega = \int_{\mathcal{R}} dF^{\#}\omega = \int_{\partial\mathcal{R}} F^{\#}\omega = \int_{F_{\#}\partial\mathcal{R}} \omega = \int_{\partial F_{\#}\mathcal{R}} \omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega$. QED. ■

• Utilizámos também a seguinte identidade/definição:

$\partial F_{\#}\mathcal{R} = F_{\#}\partial\mathcal{R}$ (válido pela regularidade de F : a imagem do bordo é o bordo da imagem), bem como o TFC: teorema fundamental do cálculo (mediante o teorema anterior).

Teorema de Stokes em \mathcal{R} : caso de uma sub-variedade

Definição

Sejam \mathcal{M} e \mathcal{N} variedades de dimensão m e n , com $m \leq n$. Seja $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ um mergulho, $F(\mathcal{M}) = F_{\#}\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ uma m -sub-variedade de \mathcal{N} (por exemplo, uma superfície de \mathbb{R}^n) e ω uma m -forma sobre \mathcal{N} . O integral de ω em $F(\mathcal{M})$ é definido como

$$\int_{F_{\#}\mathcal{M}} \omega = \int_{\mathcal{M}} F^{\sharp}\omega,$$

onde F^{\sharp} representa o operador pull-back por F . Em particular

$$\int_{F_{\#}\mathcal{M}} d\omega = \int_{\mathcal{M}} dF^{\sharp}\omega.$$

- Esta definição estende a da página 321 no sentido em que o difeomorfismo F é aqui um mapa entre duas variedades (enquanto F era apenas um mapa local).

Teorema de Stokes: caso geral

-1-

Stokes numa sub-variedade

Seja $\phi_{\sharp}S$ uma sub-variedade orientada de \mathbb{R}^n . Temos

$$\int_{F_{\sharp}\mathcal{M}} d\omega = \int_{\mathcal{M}} dF^{\sharp}\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} F^{\sharp}\omega = \int_{F_{\sharp}\partial\mathcal{M}} \omega = \int_{\partial F_{\sharp}\mathcal{M}} \omega$$

- Por extensão do caso anterior, obtemos sem dificuldade o resultado geral seguinte.

Stokes geral

Seja \mathcal{M} uma variedade orientada de dimensão m com bordo, e ω uma $m - 1$ -forma. Temos

$$\int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega \quad (\blacksquare)$$

Teorema de Stokes: caso geral

-2-

- **Nota 1:** Numa m -variedade com bordo existem mapas locais abertos de $\{x \in \mathbb{R}^m : x^1 \leq 0\}$ e tal que o bordo satisfaz $x^1 = 0$.
- Neste caso, no bordo, temos $dx^1(X) = 0, \forall X \in T_p \partial \mathcal{M}, p \in \partial \mathcal{M}$ (X é um vetor tangente ao bordo). Logo, dx^1 é normal à $\partial \mathcal{M}$. Definimos assim o vetor normal **unitário** à $\partial \mathcal{M}$ como $n_i = \frac{(dx^1)_i}{\sqrt{g^{kl}(dx^1)_k(dx^1)_l}}$, expressado em coordenadas $\{s^i\}_i$.

- **Nota 2:** na fórmula (■), o membro a direita significa

$$\int_{\partial \mathcal{M}} \omega = \int_{\iota_{\#} \partial \mathcal{M}} \omega = \int_{\partial \mathcal{M}} \iota^{\#} \omega,$$

onde $\iota : \partial \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ é o mapa inclusão.

- **Nota 3:**

Seja $B \subset A$. O mapa inclusão é a injeção $\iota : B \mapsto A$ definido como $\iota(b) = b, \forall b \in B$.

Mais explicitamente, seja a $m - 1$ -forma

$\omega = \omega^k (-1)^{k+1} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \cdots \wedge dx^m$, então

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \iota^{\sharp}\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega^k (-1)^{k+1} \sqrt{|h|} N_k dx^2 \cdots dx^m,$$

(vê definição p. 322) com a métrica em $\partial\mathcal{M}$ induzida pelo pull back por ι , $h := \iota^{\sharp}g$, e com o vetor normal unitário N^k tal que

$\sqrt{|h|} N_k := dx^1_{\alpha} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^k_{\alpha}} \cdots \wedge dx^m_{\alpha} \left[\frac{\partial\phi}{\partial x^1_{\alpha}} \wedge \cdots \wedge \widehat{\frac{\partial\phi}{\partial x^k_{\alpha}}} \cdots \wedge \frac{\partial\phi}{\partial x^m_{\alpha}} \right]$, e com $\phi \in \phi_{\alpha}$, onde ϕ_{α} tal que $\phi_{\alpha}(U_{\alpha}) \subset \partial\mathcal{M}$, é um atlas de $\partial\mathcal{M}$ (não necessariamente tal que $x^1_{\alpha} = 0$).

Teorema da divergência: caso geral numa variedade

♣ Tomemos $\omega = \star\Phi(u)$, com $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \hat{u}^k \frac{\partial}{\partial s^k}$, por Stokes vem, uma vez que $\Phi(u) = u_i dx^i = \hat{u}_k ds^k$ (vê p. 127 e 135),

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} d\star\Phi(u) &= \int_{\mathcal{M}} \frac{\partial}{\partial s^k} \left(\sqrt{|g|} \hat{u}^k \right) ds^1 \wedge \cdots \wedge ds^m = \int_{\mathcal{M}} \nabla_k^{\Gamma} \hat{u}^k \Omega_m \\ &= \int_{\partial\mathcal{M}} \iota^{\#} \star\Phi(u) = \int_{\partial\mathcal{M}} u_i (-1)^{k+1} (-1)^{k-1} \delta^{ki} \sqrt{|h|} N_k dx_{\alpha}^2 \cdots dx_{\alpha}^m, \end{aligned}$$

logo obtemos o teorema da divergência em forma mais geral,

$$\int_{\mathcal{M}} \operatorname{div} u \sqrt{|g|} = \int_{\partial\mathcal{M}} (u, N)_h \sqrt{|h|}.$$

Aplicações do Teorema de Stokes em \mathbb{R}^3

-1-

Teorema de Green

Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ e (x, y) as coordenadas Cartesianas do plano. Temos

$$\int_{\partial A} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_A (\partial_x Q - \partial_y P)dxdy.$$

DEM. Seja $\omega = Pdx + Qdy$. Por Stokes, $\int_{\partial A} \omega = \int_A d\omega = \int_A (\partial_y P dy \wedge dx + \partial_x Q dx \wedge dy) = \int_A (-\partial_y P + \partial_x Q)dx \wedge dy = \int_{\text{Id}_{\#} A} (-\partial_y P + \partial_x Q)dx \wedge dy = \int_A \text{Id}_{\#}(-\partial_y P + \partial_x Q)dx \wedge dy = \int_A (-\partial_y P + \partial_x Q)dx \wedge dy[e_1 \wedge e_2]dxdy = \int_A (\partial_x Q - \partial_y P)dxdy.$

QED. ■

- Em todo rigor o sentido de A nas linhas 1, 2 e 3 é diferente do sentido de A na linha 4, pois que no primeiro caso A é uma variedade orientada, enquanto no segundo A é um conjunto de pontos em \mathbb{R}^2 . Na linha 3 aplicamos a mera definição de integral de uma forma.

Aplicações do Teorema de Stokes em \mathbb{R}^3

-2-

Teorema de Stokes classico

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com fronteira $\partial S \neq \emptyset$ e (x, y, z) as coordenadas Cartesianas a $3d$.

Seja $v = P(x, y, z)e_1 + Q(x, y, z)e_2 + R(x, y, z)e_3$. Temos

$$\int_{\partial S} v \cdot d\vec{L} = \int_S \operatorname{curl} v \cdot d\vec{S}.$$

DEM. Seja $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$. Temos $S = F_{\#}U, U \subset \mathbb{R}^2$. Por Stokes, $\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega = \int_{F_{\#}U} (\partial_y R - \partial_z Q) dy \wedge dz + (\partial_z P - \partial_x R) dz \wedge dx + (\partial_x Q - \partial_y P) dx \wedge dy = \int_U (\operatorname{curl} v)_i (\partial_u F du \times \partial_v F dv)_i =: \int_S \operatorname{curl} v \cdot d\vec{S}$. QED.

• Lembrete: $\int_{F_{\#}U} (\partial_y R - \partial_z Q) dy \wedge dz := \int_U F_{\#}(\partial_y R - \partial_z Q) dy \wedge dz [\frac{\partial}{\partial u} \wedge \frac{\partial}{\partial v}] = \int_U (\partial_y R - \partial_z Q)(x, y, z) dy \wedge dz [\partial_u F \wedge \partial_v F] dudv = \int_U (\partial_y R - \partial_z Q)(x, y, z) \frac{\partial(F^2, F^3)}{\partial(u, v)} dudv$.

Aplicações do Teorema de Stokes em \mathbb{R}^3 -3-

$$= \int_U (\text{curl } v)_1 (\partial_u F \times \partial_v F)_1 du dv.$$

Teorema da divergência

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície fechada (i.e., $\partial S = \emptyset$), V o volume tal que $\partial V = S$, e (x, y, z) as coordenadas Cartesianas a 3d. Seja $v = P(x, y, z)e_1 + Q(x, y, z)e_2 + R(x, y, z)e_3$. Temos

$$\int_{\partial V} v \cdot \vec{dS} = \int_V \text{div } v \, dV.$$

DEM. Iremos demonstramos mais do que a tese, i.e., conseguimos provar a tese componente por componente. Seja $\omega_1 = Pdy \wedge dz$.

Por Stokes, $\int_{\partial V} \omega_1 = \int_V d\omega_1 = \int_V \partial_x P dx \wedge dy \wedge dz = \int_V \partial_x P dx \wedge dy \wedge dz [e_1 \wedge e_2 \wedge e_3] = \int_V \partial_x P dV$. QED. ■

• É evidente que a tese segue uma vez efetuado o cálculo das 3 componentes, i.e. $\omega_2 = Qdx^3 \wedge dx^1$ e $\omega_3 = Rdx^1 \wedge dx^2$.