Correction exercice 1.13

Énoncé

Déterminer la nature des séries numériques suivantes (préciser si la série est absolument convergente, semi-convergente, divergente, grossièrement divergente) :

1. $$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$$

2. $$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n}$$

3. $$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n-1}$$

4. $$\sum_{n\geq 0} \frac{2n+5}{(n^2+1)(\sqrt{n}+2)}$$

5. $$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

6. $$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

7. $$\sum_{n\geq 1} \sin\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

8. $$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2+n}$$

9. $$\sum_{n\geq 0} \frac{2n+3^n}{n!}$$

10. $$\sum_{n\geq 0} \frac{e^{in\pi/11}}{n+1}$$

11. $$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \sin\frac{1}{n}$$

12. $$\sum_{n\geq 2} \frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$$

Corrigé

1. Déterminons la nature de la série :
$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}.$$
   (a) Tout d'abord, on regarde si le terme général de la série tend vers 0 en $+\infty$.
   On a :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0.$$
   Donc la série ne diverge pas grossièrement.

   (b) Ensuite, on regarde si la série est à termes positifs.
   Pour tout $n \geq 1$, on a :
$$\ln(n) \geq \ln(1) = 0,$$
   et
$$\sqrt{n} \geq \sqrt{1} = 1 > 0$$
   Donc pour tout $n \geq 1$:
$$\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \geq 0.$$
   Donc la série est à termes positifs, on peut donc utiliser les théorèmes de comparaison.

   (c) Pour tout $n \geq 1$, on va comparer les suites :
$$u_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}.$$
   On a :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n}\frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)} = 0.$$
   Donc :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty.$$
   Or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (c'est la série harmonique), donc la série :
$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}},$$
   diverge par critère de comparaison des séries à termes positifs.

2. Déterminons la nature de la série :
$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n}$$
   (a) Tout d'abord, on regarde si le terme général de la série tend vers 0 en $+\infty$.
   On peut encadrer le terme général de cette série de la manière suivante pour tout $n \geq 1$:
$$(-1)\frac{-1}{n} \leq (-1)^n \frac{\sin(n)}{n} \leq 1\frac{1}{n}.$$
   Ainsi si on passe à la limite, d'après le théorème des Gendarmes, on a :
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$
   Donc la série ne diverge pas grossièrement.

(b) Ensuite, on regarde si la série est à termes positifs.
Ici on reconnaît une série alternée, par conséquent cette série n'est pas à termes positifs, on doit donc utiliser les résultats propres aux séries alternées.

(c) Lorsqu'on a une série alternée, la première chose à vérifier est sa convergence absolue.
On considère donc la valeur absolue du terme général (ce qui nous ramène à une série à termes positifs) :

$$\left|(-1)^n \frac{\sin(n)}{n}\right| = \left|\frac{\sin(n)}{n}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge d'après le critère de Riemann (car $\alpha = 2 > 1$), donc par comparaison la série de terme général $\left|(-1)^n \frac{\sin(n)}{n}\right|$ converge, ce qui signifie que la série :

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{\sin(n)}{n}$$

converge absolument (donc en particulier elle converge puisque la convergence absolue implique la convergence).

3. Déterminons la nature de la série :

$$\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n-1}$$

(a) Tout d'abord, on regarde si le terme général de la série tend vers 0 en $+\infty$.
On peut encadrer le terme général de cette série de la manière suivante pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{-1}{n-1} \leq \frac{(-1)^n}{n-1} \leq \frac{1}{n-1}.$$

Ainsi si on passe à la limite, d'après le théorème des Gendarmes, on a :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{(-1)^n}{n-1} = 0.$$

Donc la série ne diverge pas grossièrement.

(b) Ensuite, on regarde si la série est à termes positifs.
Ici on reconnaît une série alternée, par conséquent cette série n'est pas à termes positifs, on doit donc utiliser les résultats propres aux séries alternées.

(c) Lorsqu'on a une série alternée, la première chose à vérifier est sa convergence absolue.
On considère donc la valeur absolue du terme général (ce qui nous ramène à une série à termes positifs) :

$$\left|\frac{(-1)^n}{n-1}\right| = \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}.$$

Or la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge (c'est la série harmonique), donc par comparaison cela signifie que la série :

$$\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n-1}$$

ne converge pas absolument.

(d) Comme la série alternée ne converge pas absolument, on doit alors utiliser soit le critère spécial des séries alternées, soit la règle d'Abel.
Essayons d'appliquer le critère spécial des séries alternées.
On pose pour tout $n \geq 2$:

$$\alpha_n = \frac{1}{n-1}.$$

Pour que le critère spécial des séries alternées s'applique, il faut montrer que la suite $(\alpha_n)_n$ est une suite de réels positifs, décroissante et convergeant vers 0.

– Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$n - 1 \geq 2 - 1 = 1 \geq 0,$$

donc pour tout $n \geq 2$:

$$\alpha_n = \frac{1}{n-1} \geq 0.$$

Donc la suite $(\alpha_n)_n$ est bien à termes positifs.

– Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{n+1-1} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n-1} = \alpha_n,$$

donc la suite (α_n) est bien décroissante.

– Enfin :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n-1} = 0.$$

Donc la suite $(\alpha_n)_n$ converge bien vers 0.

On vient de vérifier toutes les hypothèses du critère spécial des séries alternées, donc d'après ce critère la série :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n-1}$$

converge.

4. Déterminons la nature de la série :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{2n+5}{(n^2+1)(\sqrt{n}+2)}$$

(a) Tout d'abord, on regarde si le terme général de la série tend vers 0 en $+\infty$.

On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2n+5}{(n^2+1)(\sqrt{n}+2)} &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2n+5}{n^2\sqrt{n} + 2n^2 + \sqrt{n} + 2}, \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n\left(2 + \frac{5}{n}\right)}{n^2\sqrt{n}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2\sqrt{n}}\right)}, \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \frac{2 + \frac{5}{n}}{1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2\sqrt{n}}}, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc la série ne diverge pas grossièrement.

(b) Ensuite, on regarde si la série est à termes positifs.

Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$2n + 5 \geq 5 \geq 0,$$

et :

$$n^2 + 1 \geq 1 > 0,$$

et :

$$\sqrt{n} + 2 \geq 2 > 0,$$

Donc :

$$(n^2+1)(\sqrt{n}+2) > 0.$$

Donc pour tout $n \geq 0$:

$$\frac{2n+5}{(n^2+1)(\sqrt{n}+2)} \geq 0.$$

Donc la série est à termes positifs, on peut donc utiliser les théorèmes de comparaison.

(c) Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\frac{2n+5}{(n^2+1)(\sqrt{n}+2)} \sim \frac{2n}{n^2\sqrt{n}} = \frac{2}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{nn^{1/2}} = \frac{2}{n^{3/2}}.$$

Or la série de terme général $\frac{2}{n^{3/2}}$ converge d'après le critère de Riemann (car $\alpha = \frac{3}{2} > 1$), donc par comparaison des séries à termes positifs, la série :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{2n+5}{(n^2+1)(\sqrt{n}+2)}$$

converge.
De plus, elle converge également absolument puisque la valeur absolue de son terme général est égale à son terme général (puisque la série est à termes positifs).

5. Déterminons la nature de la série :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

(a) Tout d'abord, on regarde si le terme général de la série tend vers 0 en $+\infty$.
A priori, la limite du terme général ne semble pas facile à calculer à cause de la puissance n^2, on va donc utiliser la règle de Cauchy pour déterminer la nature de cette série.
On a :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \right|^{1/n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2} e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Or :

$$e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \sim e^{n\frac{1}{n}} = e^1.$$

Donc la limite :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \right|^{1/n} = \frac{1}{2}e^1 > 1.$$

($\frac{e^1}{2} \simeq 1.36$).
Par conséquent d'après la règle de Cauchy, la série :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

diverge grossièrement.

6. Déterminons la nature de la série :

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

(a) Tout d'abord, on regarde si le terme général de la série tend vers 0 en $+\infty$.
On a :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0 + \ln(1) = 0.$$

Par conséquent la série ne diverge pas grossièrement.

(b) Ensuite, on regarde si la série est à termes positifs.
Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{n} \geq 0.$$

et :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq 0.$$

D'où :

$$-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq 0.$$

Pour déterminer le signe du terme général, on a donc besoin de comparer $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et $\frac{1}{n}$.
Or on sait que la fonction ln a la propriété suivante :

$$\ln(1+x) \leq x,$$

donc si on applique cette propriété en $x = \frac{1}{n}$, on trouve :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n},$$

D'où :

$$\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq 0.$$

Donc la série est à termes positifs, on peut donc utiliser les théorèmes de comparaison.

(c) Éffectuons le développement limité de la fonction $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + x^m \epsilon(x),$$

avec $\epsilon(x) \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow 0$.
Ici on souhaite appliquer ce développement limité en $x = \frac{1}{n}$, on peut le faire puisque $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$, donc :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k + \left(\frac{1}{n}\right)^m \epsilon\left(\frac{1}{n}\right).$$

Si on considère ce développement à l'ordre 1, on obtient :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi le terme général de la série s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge d'après le critère de Riemann, donc par comparaison la série :

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

converge.
De plus, elle converge également absolument puisque la valeur absolue de son terme général est égale à son terme général (puisque la série est à termes positifs).

7. Déterminons la nature de la série :

$$\sum_{n\geq 1} \sin\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

(a) Tout d'abord, on regarde si le terme général de la série tend vers 0 en $+\infty$.

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sin\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sin(1) \neq 0.$$

Donc la série :

$$\sum_{n \geq 1} \sin\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

diverge grossièrement.

8. Déterminons la nature de la série :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2 + n}$$

(a) Tout d'abord, on regarde si le terme général de la série tend vers 0 en $+\infty$.
On peut encadrer le terme général de cette série de la manière suivante pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{\ln(n)}{n^2 + n} \leq \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2 + n} \leq \frac{\ln(n)}{n^2 + n}.$$

Ainsi si on passe à la limite, d'après le théorème des Gendarmes, on a :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2 + n} = 0.$$

Donc la série ne diverge pas grossièrement.

(b) Ensuite, on regarde si la série est à termes positifs.
Ici on reconnaît une série alternée, par conséquent cette série n'est pas à termes positifs, on doit donc utiliser les résultats propres aux séries alternées.

(c) Lorsqu'on a une série alternée, la première chose à vérifier est sa convergence absolue.
On considère donc la valeur absolue du terme général (ce qui nous ramène à une série à termes positifs) :

$$\left| \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2 + n} \right| = \frac{\ln(n)}{n^2 + n}.$$

On va comparer les suites :

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n^2 + n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

On a :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\dfrac{\ln(n)}{n^2 + n}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^{3/2} \ln(n)}{n^2 + n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^{3/2} \ln(n)}{n^2 \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n^{1/2} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} = 0.$$

Or la série de terme général $\dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge d'après le critère de Riemann (car $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$), donc par comparaison la série de terme général $\left| \dfrac{(-1)^n \ln(n)}{n^2 + n} \right|$ converge.
Ce qui signifie que la série :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2 + n}$$

converge absolument (donc en particulier elle converge, puisque la convergence absolue implique la convergence).

9. Déterminons la nature de la série :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{2n + 3^n}{n!}$$

(a) Tout d'abord, on regarde si le terme général de la série tend vers 0 en $+\infty$.
Pour cela, on va tout d'abord déterminer un équivalent du terme général afin que la limite soit plus simple à calculer.

$$\frac{2n+3^n}{n!} \sim \frac{3^n}{n!}.$$

Donc :

$$\lim_{n \longleftarrow +\infty} \frac{2n+3^n}{n!} = 0.$$

Donc la série ne diverge pas grossièrement.

(b) Ensuite, on regarde si la série est à termes positifs.
Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$n! \geq 0! = 1 > 0,$$

et

$$2n + 3^n \geq 1 \geq 0.$$

Donc :

$$\frac{2n+3^n}{n!} \geq 0.$$

Donc la série est à termes positifs, on peut donc utiliser les théorèmes de comparaison.

(c) À l'étape (a), on a déterminé un équivalent du terme général :

$$\frac{2n+3^n}{n!} \sim \frac{3^n}{n!}.$$

Or la série de terme général $\dfrac{3^n}{n!}$ est convergente (on reconnaît le terme général de la série exponentielle), donc par comparaison la série :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{2n+3^n}{n!}$$

converge.
De plus, elle converge également absolument puisque la valeur absolue de son terme général est égale à son terme général (puisque la série est à termes positifs).

10. Déterminons la nature de la série :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{e^{in\pi/11}}{n+1}$$

(a) On reconnaît une série trigonométrique, on souhaite donc appliquer le résultat du cours sur ce type de série.
On pose alors :

$$\alpha_n = \frac{1}{n+1}.$$

On souhaite montrer que la suite $(\alpha)_n$ est à termes positifs, décroissante et convergeant vers 0.

- Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\alpha_n = \frac{1}{n+1} \geq 0,$$

donc la suite $(\alpha_n)_n$ est bien à termes positifs.

- Pour tout $n \geq 0$:

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{n+1} = \alpha_n,$$

donc la suite $(\alpha_n)_n$ est bien décroissante.

- On a :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Donc la suite $(\alpha_n)_n$ est bien décroissante.

Par conséquent, nous sommes en mesure d'appliquer le résultat sur les séries trigonométriques, qui nous dit que la série de terme général $\alpha_n e^{int}$ converge pour $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
Ici $t = \dfrac{\pi}{11} \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, donc la série :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{e^{in\pi/11}}{n+1}$$

converge.
On peut remarquer qu'elle ne converge pas absolument puisque la valeur absolue de son terme général vaut $\dfrac{1}{n+1}$ qui est équivalent à $\dfrac{1}{n}$ (le terme général de la série harmonique qui diverge).

11. Déterminons la nature de la série :

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$$

(a) Tout d'abord, on regarde si le terme général de la série tend vers 0 en $+\infty$.
On peut encadrer le terme général de la série par :

$$-\sin \frac{1}{n} \leq (-1)^n \sin \frac{1}{n} \leq \sin \frac{1}{n}.$$

Donc d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n} = 0.$$

Donc la série ne diverge pas grossièrement.

(b) Ensuite, on regarde si la série est à termes positifs.
Ici on reconnaît une série alternée, par conséquent cette série n'est pas à termes positifs, on doit donc utiliser les résultats propres aux séries alternées.

(c) Lorsqu'on a une série alternée, la première chose à vérifier est sa convergence absolue.
On considère donc la valeur absolue du terme général (ce qui nous ramène à une série à termes positifs) :

$$\left|(-1)^n \sin \frac{1}{n}\right| = \left|\sin \frac{1}{n}\right|.$$

Utilisons le développement limité de sin au voisinage de 0 afin de déterminer un équivalent de $\sin \dfrac{1}{n}$.
On sait que :

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + x^{2k+3}\epsilon(x),$$

avec $\epsilon(x) \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow 0$.
On peut appliquer ce développement en $x = \dfrac{1}{n}$ car $\dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$, ainsi, on obtient l'équivalent suivant :

$$\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}.$$

Par conséquent, si on considère la valeur absolue du terme général de la série :

$$\left|(-1)^n \sin \frac{1}{n}\right| \sim \frac{1}{n},$$

Or la série de terme général $\dfrac{1}{n}$ diverge (c'est la série harmonique), donc la série :

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$$

ne converge pas absolument.

(d) Comme la série alternée ne converge pas absolument, on doit alors utiliser soit le critère spécial des séries alternées, soit la règle d'Abel.
Essayons d'appliquer le critère spécial des séries alternées.
On pose pour tout $n \geq 1$:
$$\alpha_n = \sin \frac{1}{n}.$$
Pour que le critère spécial des séries alternées s'applique, il faut montrer que la suite $(\alpha_n)_n$ est une suite de réels positifs, décroissante et convergeant vers 0.

- Pour tout $n \geq 1$, on a :
$$\alpha_n = \sin \frac{1}{n} \geq 0,$$
car la fonction sinus est positive sur $[0, 1]$.
Donc la suite $(\alpha_n)_n$ est bien à termes positifs.
- Pour déterminer la décroissance de la suite $(\alpha_n)_n$, étudions la fonction sin sur $[0, 1]$ (car $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$).
La fonction sin est dérivable sur $[0, 1]$ et de dérivée valant :
$$f'(x) = \cos x.$$
Or sur $[0, 1]$ la fonction cosinus est positive donc la fonction sin est croissante.
Le fait que cette fonction soit croissante signifie que pour $x \leq y$, on a :
$$f(x) \leq f(y).$$
Par conséquent, comme :
$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n},$$
alors :
$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \sin \frac{1}{n+1} \leq f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin \frac{1}{n}.$$
Donc :
$$\alpha_{n+1} = \sin \frac{1}{n+1} \leq \sin \frac{1}{n} = \alpha_n.$$
Donc la suite (α_n) est bien décroissante.
- Enfin :
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sin \frac{1}{n} = 0.$$
Donc la suite $(\alpha_n)_n$ converge bien vers 0.

On vient de vérifier toutes les hypothèses du critère spécial des séries alternées, donc d'après ce critère la série :
$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$$
converge.

12. Déterminons la nature de la série :
$$\sum_{n \geq 2} \frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$$
(a) Tout d'abord, on regarde si le terme général de la série tend vers 0 en $+\infty$.
A priori, la limite du terme général ne semble pas facile à calculer à cause des puissances $\ln(n)$ et n, on va donc utiliser la règle de Cauchy pour déterminer la nature de cette série.
On a :
$$\begin{aligned}
\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left| \frac{n^{\ln(n)}}{\ln(n)^n} \right|^{1/n} &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n)} n^{\ln(n)/n}, \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n)} \exp\left(\frac{\ln(n)}{n} \ln(n)\right), \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n)} \exp\left(\frac{(\ln(n))^2}{n}\right), \\
&= 0 < 1.
\end{aligned}$$

Par conséquent d'après la règle de Cauchy, la série :

$$\sum_{n\geq 2} \frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$$

converge.
De plus, elle converge également absolument puisque la valeur absolue de son terme général est égale à son terme général (puisque la série est à termes positifs).