Correction de l'exercice 2.6, a)

Énoncé :

On considère la série entière réelle :

$$\sum_{n\geq 0}(n^2+n+1)x^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série.
2. Calculer la somme de cette série dans son intervalle de convergence.

Corrigé

1. On utilise le critère de d'Alembert, on calcule donc :

$$\begin{aligned}
\rho &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{n^2+n+1}\right|,\\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{n^2+2n+1+(n+1)+1}{n^2+n+1}\right|,\\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{n^2+3n+3}{n^2+n+1}\right|,\\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right|,\\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right|,\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Donc le rayon de convergence de la série vaut :

$$R=\frac{1}{\rho}=1.$$

2. Déterminons la somme de cette série entière pour tout $x\in I=]-1,1[$ l(intervalle de convergence.
Tout d'abord, on peut découper cette somme en trois :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n+\sum_{n=0}^{\infty}nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n.$$

Pour le dernier terme, on reconnaît une série géométrique de raison x donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.$$

Déterminons maintenant la somme du second terme. Ce second terme ressemble à une série géométrique, cependant on a en plus le terme n devant x^n.

Dérivons la série géométrique :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

De plus :

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = -\frac{-1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Et comme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

alors leurs dérivées sont égales, donc :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}.$$

Ainsi, si on considère le second terme de la somme recherchée, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} nx^n &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \frac{x}{x}, \\ &= x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \\ &= \frac{x}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

d'après l'égalité ci-dessus.
Déterminons maintenant la somme du premier terme, ie :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n.$$

Pour faire apparaître un n^2, on peut dériver la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n.$$

On obtient :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} nx^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1}.$$

Or d'après le calcul qu'on a effectué précédemment, on sait que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{1(1-x)^2 - x2(-1)(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{(1-x)+2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Par conséquent pour le premier terme, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n, \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n \frac{x}{x}, \\
&= x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}, \\
&= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.
\end{aligned}$$

Au final, si on ajoute tous les termes, on obtient pour $x \in I$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (n^2+n+1) x^n &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}, \\
&= \frac{x(1+x) + x(1-x) + (1-x)^2}{(1-x)^3}, \\
&= \frac{x + x^2 + x - x^2 + 1 + x^2 - 2x}{(1-x)^3}, \\
&= \frac{x^2+1}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in I$, la somme de la série entière vaut :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2+n+1) x^n = \frac{x^2+1}{(1-x)^3}.$$