Correction de l'exercice 2.7

Énoncé :

1. Trouver le développement en série entière en 0 de $f(x) = (1+x)^{-2}$:
   (a) en dérivant le développement en série entière de $(1+x)^{-1}$;
   (b) en multipliant le développement en série entière de $(1+x)^{-1}$ par lui-même ;
   (c) en utilisant le développement en série entière de $(1+x)^{\alpha}$ pour $\alpha = -2$.
2. Déterminer l'intervalle sur lequel ce développement est valable.
3. En déduire les valeurs des dérivées successives de f en 0. Le vérifier par le calcul.

Corrigé

1. (a) Le développement en série entière de la série géométrique de raison x est :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Par conséquent, le développement en série entière de $(1+x)^{-1}$ est donné par :

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n.$$

(il suffit de faire remplacer x par $-x$ dans le développement en série entière de la série géométrique).
Dérivons maintenant ce développement en série entière :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)(-x)^{n-1}.$$

Dérivons maintenant $(1+x)^{-1}$:

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)' = \frac{-1}{(1+x)^2}.$$

Par conséquent, comme :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n.$$

Alors leurs dérivées sont égales, ce qui signifie :

$$\frac{-1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)(-x)^{n-1},$$
$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^{n-1}.$$

On a donc obtenu le développement en série entière de $(1+x)^{-2}$.

(b) Multiplions le développement en série entière de $(1+x)^{-1}$ par lui-même.
On sait que :

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n.$$

Effectuons le produit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} \times \frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n \times \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \times \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{n}(-1)^p(-1)^{n-p}\right)x^n \quad \text{en utilisant la formule du produit de Cauchy de deux séries,} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p=0}^{n}(-1)^n\right)x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sum_{p=0}^{n}1\right)x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-x)^n.
\end{aligned}$$

On effectue maintenant un changement d'indice, on pose :

$$j = n+1, \quad \text{donc} \quad n = j-1,$$

Comme $0 \leq n \leq +\infty$, alors $0 \leq j-1 \leq +\infty$, donc $1 \leq j \leq +\infty$ donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-x)^n = \sum_{j=1}^{\infty} j(-x)^{j-1}.$$

Ainsi, on retrouve bien que :

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^{n-1}.$$

(c) Le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ est :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha - j)\right)x^n.$$

Ainsi, en prenant $\alpha = -2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
(1+x)^{-2} &= \frac{1}{(1+x)^2}, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\prod_{j=0}^{n-1} (-2-j) \right) x^n, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\prod_{j=0}^{n-1} (-1)(2+j) \right) x^n, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n \left(\prod_{j=0}^{n-1} (2+j) \right) x^n, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n (2+n-1)! x^n, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^n (n+1)! x^n, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(-1)^n x^n \quad \text{car } (n+1)! = (n+1) \times n!.
\end{aligned}$$

On effectue un changement d'indice, on pose :

$$j = n+1, \quad \text{donc} \quad n = j-1.$$

Comme $1 \leq n \leq \infty$, alors $1 \leq j-1 \leq \infty$ et donc $2 \leq j \leq \infty$ donc :

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 + \sum_{j=2}^{\infty} j(-x)^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} j(-x)^{j-1}.$$

(car $1 \times (-x)^0 = 1$).

2. Déterminons l'intervalle sur lequel ce développement est valable.
Comme le développement en série entière de $(1+x)^{-1}$ est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$ et comme on a obtenu le développement en série entière de la fonction f à partir de la dérivée du développement en série entière de $(1+x)^{-1}$, alors le développement en série entière de f est valable pour x tel que $|x| < 1$ donc l'intervalle de convergence est :

$$I =]-1, 1[.$$

3. D'après la formule de Taylor appliquée à la fonction f en 0, on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Or d'après la question précédente, on sait que la série entière en 0 de f vaut :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(-x)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n x^n.$$

Par conséquent, on peut identifier les deux développements et on obtient ainsi que pour tout $n \geq 0$:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (n+1)(-1)^n.$$

Donc pour tout $n \geq 0$, on a :

$$f^{(n)}(0) = (n+1)!(-1)^n.$$

Effectuons maintenant la vérification par le calcul.
On a :

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2},$$

donc :

$$f(0) = 1 = (0+1)!(-1)^0 = f^{(0)}(0).$$

Donc la formule est vraie à l'ordre 0.
On a :

$$f'(x) = \frac{-2}{(1+x)^3},$$

donc :

$$f'(0) = -2 = 2!(-1)^1 = f^{(1)}(0).$$

Donc la formule est vraie au premier ordre.
Ensuite :

$$f''(x) = (-2)(-3)\frac{1}{(1+x)^4},$$

donc :

$$f''(0) = (-2)(-3) = (-1)^2 3! = f^{(2)}(0).$$

Donc la formule est vraie à l'ordre 2.
Par récurrence, on peut montrer que pour tout $k \geq 1$:

$$f^{(k)}(x) = (-2)(-3)\dots(-(k+1))\frac{1}{(1+x)^{k+2}},$$

donc :

$$f^{(k)}(0) = (-2)\dots(-(k+1)) = (-1)^k (k+1)!$$

Ainsi, on obtient bien le résultat voulu.