Correction de l'exercice 2.9

Énoncé :

1. Trouver, sous forme de séries entières, des solutions de l'équation différentielle :
$$(1-x^2)y' - xy = 0.$$
Donner le rayon de convergence de ces solutions. A-t-on obtenu toutes les solutions ?
2. Résoudre l'équation différentielle de manière classique et vérifier le calcul fait dans la première question en développant en série entière en 0 les solutions obtenues.

Corrigé

1. On pose :
$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$
Si on dérive cette série entière, on obtient :
$$y' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$
Par conséquent, si on considère l'équation différentielle et qu'on remplace y et y' par leurs développements en séries entières, on a :
$$\begin{aligned}(1-x^2)y' - xy &= (1-x^2)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}.\end{aligned}$$
On effectue trois changements d'indice (un sur chaque somme) afin de se ramener à une série en x^n.
Pour la première série, on pose $j = n-1$, ie $n = j+1$. Comme $1 \leq n \leq +\infty$, alors $1 \leq j+1 \leq +\infty$, donc $0 \leq j \leq +\infty$.
Pour la deuxième somme, on pose $k = n+1$, ie $n = k-1$. Comme $1 \leq n \leq +\infty$, alors $1 \leq k-1 \leq +\infty$, donc $2 \leq k \leq +\infty$.
Pour la troisième série, on pose $l = n+1$, donc $n = l-1$. Comme $0 \leq n \leq +\infty$, alors $0 \leq l-1 \leq +\infty$, donc $1 \leq l \leq +\infty$.
Ainsi, on obtient :
$$\begin{aligned}(1-x^2)y' - xy &= \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)a_{j+1}x^j - \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)a_{k-1}x^k - \sum_{l=1}^{\infty} a_{l-1}x^l,\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n,\\ &= (0+1)a_{0+1}x^0 + (1+1)a_{1+1}x^1 + \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - a_{1-1}x^1 - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n,\\ &= a_1 + 2a_2x - a_0x + \sum_{n=2}^{\infty}\left((n+1)a_{n+1} - (n-1)a_{n-1} - a_{n-1}\right)x^n,\\ &= a_1 + (2a_2 - a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty}\left((n+1)a_{n+1} - na_{n-1}\right)x^n.\end{aligned}$$

Comme on sait que :
$$(1-x^2)y' - xy = 0,$$
alors on doit avoir :
$$a_1 + (2a_2 - a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} \left((n+1)a_{n+1} - na_{n-1}\right) x^n = 0.$$
Ainsi, si on considère le terme en x^0, on obtient comme condition :
$$a_1 = 0.$$
Si on considère le terme en x^1, on obtient :
$$2a_2 - a_0 = 0.$$
Et si on considère pour $n \geq 2$, le terme en x^n, on obtient :
$$(n+1)a_{n+1} - na_{n-1} = 0.$$
Ces conditions se réécrivent sous la forme :
$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ 2a_2 = a_0, \\ (n+1)a_{n+1} = na_{n-1} \quad \forall n \geq 2. \end{cases}$$
On remarque que comme $a_1 = 0$, si on regarde la condition quand $n = 2$, elle nous donne :
$$3a_3 = 2a_1 = 0.$$
Si on considère la condition quand $n = 4$, on trouve :
$$5a_5 = 4a_3 = 0.$$
On peut alors montrer que pour tout n impair, on a :
$$a_n = 0.$$
Ensuite, si on considère la condition pour $n = 3$, on trouve :
$$4a_4 = 3a_2 = \frac{3}{2}a_0.$$
Donc :
$$a_4 = \frac{3}{4 \times 2}a_0.$$
Pour $n = 5$, on trouve :
$$6a_6 = 5a_4 = \frac{5 \times 3}{4 \times 2}a_0.$$
Donc :
$$a_6 = \frac{5 \times 3}{6 \times 4 \times 2}a_0.$$
On peut montrer que pour tout $p \geq 1$, on a :
$$a_{2p+2} = \frac{(2p+1) \times (2p-1) \times (2p-3) \times \ldots \times 3}{(2p+2) \times 2p \times \ldots \times 2}a_0.$$

On souhaite maintenant simplifier cette fraction en faisant apparaître des factoriels. Si on la multiplie et on la divise par son dénominateur, on a :

$$
\begin{aligned}
a_{2p+2} &= \frac{(2p+1)\times(2p-1)\times(2p-3)\times\ldots\times 3}{(2p+2)\times 2p\times\ldots\times 2}a_0,\\
&= \frac{(2p+1)\times(2p-1)\times(2p-3)\times\ldots\times 3}{(2p+2)\times 2p\times\ldots\times 2}a_0\times\frac{(2p+2)\times 2p\times\ldots\times 2}{(2p+2)\times 2p\times\ldots\times 2},\\
&= \frac{(2p+2)(2p+1)(2p)(2p-1)\times\ldots 3\times 2}{((2p+2)\times 2p\times\ldots\times 2)^2}a_0,\\
&= \frac{(2p+2)!}{((2p+2)\times 2p\times\ldots\times 2)^2}a_0,\\
&= \frac{(2p+2)!}{(2(p+1)\times 2p\times 2(p-1)\times\ldots\times 2\times 1)^2}a_0,\\
&= \frac{(2p+2)!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2}a_0.
\end{aligned}
$$

Ainsi pour tout $j \geq 0$, on a (en effectuant le changement d'indice $2j = 2p+2$, ie $j = p+1$) :

$$
a_{2j} = \frac{(2j)!}{(2^j(j)!)^2}a_0.
$$

Par conséquent, les solutions sous forme de séries sont de la forme :

$$
y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p}x^{2p} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2p)!}{(2^p(p)!)^2}a_0 x^{2p} = a_0\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(2p)!}{(2^p(p)!)^2}x^{2p}.
$$

Déterminons le rayon de convergence de cette série entière. On utilise la règle de d'Alembert (comme on a une série lacunaire, on doit inclure dans la règle de d'Alembert les termes en puissances de x) :

$$
\begin{aligned}
\rho &= \lim_{p\longrightarrow+\infty}\left|\frac{x^{2p+2}(2p+2)!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2}\frac{(2^p(p)!)^2}{x^{2p}(2p)!}\right|,\\
&= \lim_{p\longrightarrow+\infty}\left|x^2(2p+2)(2p+1)\frac{2^{2p}(p!)^2}{2^{2p+2}((p+1)!)^2}\right|,\\
&= \lim_{p\longrightarrow+\infty}\left|x^2(2p+2)(2p+1)\frac{1}{2^2}\left(\frac{p!}{(p+1)!}\right)^2\right|,\\
&= \lim_{p\longrightarrow+\infty}\left|\frac{x^2(2p+2)(2p+1)}{4(p+1)^2}\right|,\\
&= \lim_{p\longrightarrow+\infty}\left|x^2\frac{4p^2+6p+2}{4p^2+8p+4}\right|,\\
&= \lim_{p\longrightarrow+\infty}|x^2|\left|\frac{p^2\left(4+\frac{4}{p}+\frac{2}{p^2}\right)}{p^2\left(4+\frac{8}{p}+\frac{4}{p^2}\right)}\right|,\\
&= |x^2|,\\
&= x^2
\end{aligned}
$$

Par ocnséquent, on sait que cette série converge lorsque :

$$
x^2 < 1 \quad \text{donc} \quad -1 < x < 1.
$$

Ainsi le rayon de convergence de cette série entière est :

$$
R = 1.
$$

On a donc obtenu les solutions de l'équation différentielle qui sont développables en séries entières. On n'a donc pas obtenu toutes les solutions a priori, puisqu'on pourrait avoir des solutions non développables en séries entières.

2. Résolvons l'équation différentielle de manière directe. L'équation différentielle se réécrit sous la forme :

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{1-x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Intégrons cette équation entre $[0, z]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^z \frac{y'(x)}{y(x)} dx &= \int_0^z \frac{x}{1-x^2} dx, \\
[\ln(y(x))]_0^z &= \left[\frac{\ln(1-x^2)}{-2}\right]_0^z, \\
\ln(y(z)) - \ln(y(0)) &= \frac{\ln(1-z^2)}{-2} - \frac{\ln(1-0^2)}{-2}, \\
\ln(y(z)) &= \frac{\ln(1-z^2)}{-2} + \ln(y(0)), \\
\ln(y(z)) &= \frac{-1}{2} \ln(1-z^2) + \ln(y(0)), \\
\ln(y(z)) &= \ln\left((1-z^2)^{-1/2}\right) + \ln(y(0)), \\
\ln(y(z)) &= \ln\left((1-z^2)^{-1/2} \times y(0)\right), \\
y(z) &= (1-z^2)^{-1/2} \times y(0), \\
y(z) &= \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}} y(0), \\
y(z) &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} y(0).
\end{aligned}$$

Par conséquent, en résolvant de manière directe l'équation différentielle, on trouve des solutions de la formes :

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} y(0).$$

Or le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ s'écrit sous la forme :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \times \ldots \times (\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-1/2}, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}-1\right) \times \ldots \times \left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\right)(-x^2)^n, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) \times \ldots \times \left(-\frac{2n-1}{2}\right)(-1)^n x^{2n}, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{(-1) \times (-3) \times \ldots \times (-(2n-1))}{2 \times 2 \times \ldots \times 2}(-1)^n x^{2n}, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(-1)^n\frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2^n}(-1)^n x^{2n}, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2^n} x^{2n}, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!2^n}\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times 2n}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times 2n} x^{2n}, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!2^n}\frac{(2n)!}{2 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 2 \times n} x^{2n}, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!2^n}\frac{(2n)!}{2^n n!} x^{2n}, \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}.
\end{aligned}
$$

Donc les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :

$$y(x) = y(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}.$$

Ce qui correspond bien à ce qu'on a trouvé à la première question (puisque $a_0 = y(0)$).