Correction de l'exercice 3.4

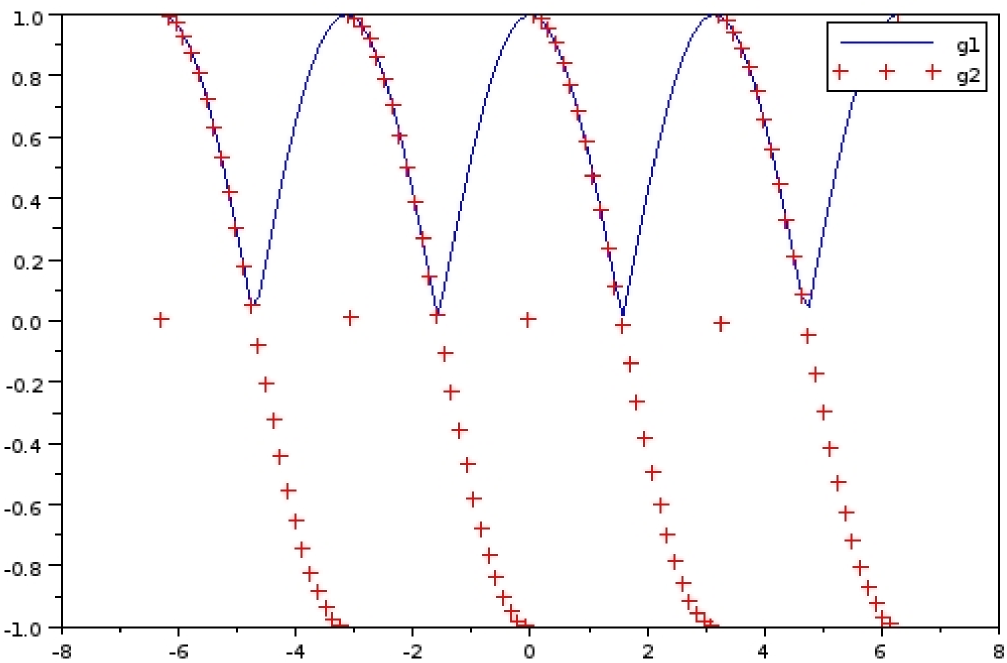
Énoncé :

On considère les fonctions g_1 et g_2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$g_1(x) = |\cos(x)|, \ \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}; \\ \cos x, & \text{si } x \in](2k\pi, (2k+1)\pi[; \\ -\cos x, & \text{si } x \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[. \end{cases}$$

1. Tracer les graphes de g_1 et g_2. Donner la période et l'éventuelle parité de ces fonctions.
2. Calculer leur série de Fourier complexe. En déduire leur série de Fourier réelle.
3. Que valent :
   (a)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1};$$
   (b)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1};$$
   (c)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)^2}.$$

Corrigé



1.

   Montrons que g_1 et g_2 sont de période π.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g_1(x+\pi) = |\cos(x+\pi)| = |\cos(x)\cos(\pi)-\sin(x)\sin(\pi)| = |\cos(x)\times(-1)-\sin(x)\times 0| = |-\cos x| = |\cos x| = g_1(x).$$

Donc g_1 est bien π-périodique.
De même, on a :

$$g_2(x+\pi) = \begin{cases} 0, \quad \text{si } (x+\pi) = k\pi; \\ \cos(x+\pi) = -\cos(x) \quad \text{si } (x+\pi) \in]2k\pi, (2k+1)\pi[; \\ -\cos(x+\pi) = \cos x, \quad \text{si } (x+\pi) \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[. \end{cases}$$

D'où :

$$g_2(x+\pi) = \begin{cases} 0, \quad \text{si } x = (k-1)\pi; \\ \cos(x+\pi) = -\cos(x) \quad \text{si } x \in](2k-1)\pi, 2k\pi[; \\ -\cos(x+\pi) = \cos x, \quad \text{si } x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[. \end{cases}$$

D'où le fait que :

$$g_2(x+\pi) = g_2(x).$$

Ainsi g_2 est bien π-périodique.
Montrons que g_1 est paire et g_2 est impaire.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g_1(-x) = |\cos(-x)| = |\cos(x)| = g_1(x),$$

car la fonction cosinus est paire.
Donc g_1 est bien une fonction paire.
De même,

$$g_2(-x) = \begin{cases} 0, \quad \text{si } -x = k\pi; \\ \cos(-x) = \cos(x) \quad \text{si } -x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[; \\ -\cos(-x) = -\cos x, \quad \text{si } -x \in](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[. \end{cases}$$

D'où :

$$g_2(-x) = \begin{cases} 0, \quad \text{si } x = -k\pi; \\ \cos(-x) = \cos(x) \quad \text{si } x \in]-(2k+1)\pi, -2k\pi[; \\ -\cos(-x) = -\cos x, \quad \text{si } x \in]-(2k+2)\pi, -(2k+1)\pi[. \end{cases}$$

D'où :

$$g_2(-x) = -g_2(x).$$

Ainsi g_2 est bien une fonction impaire.

2. **Déterminons les coefficients de Fourier complexes de g_1.**
Soit $n \in \mathbb{Z}$, comme la fonction $g_1(t) = \cos(t)$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $g_1(t) = -\cos(t)$ pour $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, alors on a :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} g_1(t)e^{-2int}dt, \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g_1(t)e^{-2int}dt \quad \text{par } \pi\text{-périodicité de } g_1, \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} g_1(t)e^{-2int}dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{1} g_1(t)e^{-2int}dt. \end{aligned}$$

Déterminons séparément la valeur des intégrales.

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} g_1(t)e^{-2int}dt &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(t)e^{-2int}dt,\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}e^{-2int}dt,\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2}e^{it(1-2n)}dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2}e^{it(-1-2n)}dt,\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{it(1-2n)}}{i(1-2n)}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{it(-1-2n)}}{i(-1-2n)}\right]_0^{\pi/2},\\
&= \frac{e^{i(\pi/2)(1-2n)}-e^0}{2\pi i(1-2n)} + \frac{e^{i(\pi/2)(-1-2n)}-e^0}{2\pi i(-1-2n)},\\
&= \frac{i(-1)^n-1}{2\pi i(1-2n)} + \frac{-i(-1)^n-1}{2\pi i(-1-2n)} \quad \text{car } e^{i(\pi/2)(1-2n)} = e^{i(\pi/2)}e^{-ni\pi} = i(-1)^n,\\
&= \frac{(i(-1)^n-1)(-1-2n)+(-i(-1)^n-1)(1-2n)}{2\pi i(1-2n)(-1-2n)},\\
&= \frac{-i(-1)^n+1-2ni(-1)^n+2n-i(-1)^n-1+2ni(-1)^n+2n}{-2\pi i(1-2n)(1+2n)},\\
&= \frac{-2i(-1)^n+4n}{-2\pi i(1-4n^2)},\\
&= \frac{2i(-1)^n-4n}{2\pi i(1-4n^2)}
\end{aligned}$$

De la même façon, on détermine la seconde intégrale, ie :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} g_1(t)e^{-2int}dt &= \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(-\cos(t))e^{-2int}dt,\\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(t)e^{-2int}dt,\\
&= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{it(1-2n)}}{i(1-2n)}\right]_{\pi/2}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{it(-1-2n)}}{i(-1-2n)}\right]_{\pi/2}^{\pi},\\
&= \frac{e^{i\pi(1-2n)}-e^{i(\pi/2)(1-2n)}}{-2\pi i(1-2n)} + \frac{e^{i\pi(-1-2n)}-e^{i(\pi/2)(-1-2n)}}{-2\pi i(-1-2n)},\\
&= \frac{-1-i(-1)^n}{-2\pi i(1-2n)} + \frac{-1+i(-1)^n}{-2\pi i(-1-2n)},\\
&= \frac{1+i(-1)^n}{2\pi i(1-2n)} + \frac{-1+i(-1)^n}{2\pi i(1+2n)},\\
&= \frac{(1+i(-1)^n)(1+2n)+(-1+i(-1)^n)(1-2n)}{2\pi i(1-2n)(1+2n)},\\
&= \frac{1+i(-1)^n+2n+2in(-1)^n-1+i(-1)^n+2n-2in(-1]^n}{2\pi i(1-4n^2)},\\
&= \frac{2i(-1)^n+4n}{2\pi i(1-4n^2)}.
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} g_1(t)e^{-2int}dt, \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} g_1(t)e^{-2int}dt + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{1} g_1(t)e^{-2int}dt, \\
&= \frac{2i(-1)^n - 4n}{2\pi i(1-4n^2)} + \frac{2i(-1)^n + 4n}{2\pi i(1-4n^2)}, \\
&= \frac{4i(-1)^n}{2i\pi(1-4n^2)}, \\
&= \frac{2(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}.
\end{aligned}$$

Déterminons la série de Fourier complexe de g_1.
On en déduit que la série de Fourier complexe de g_1 est :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} e^{2inx}.$$

Déterminons les coefficients de Fourier réels de g_1.
Comme la fonction g_1 est paire, alors pour tout $n > 0$:

$$b_n = 0.$$

On peut le vérifier avec la relation liant b_n et c_n. En effet, pour tout $n > 0$, on sait que :

$$\begin{aligned}
b_n &= i(c_n - c_{-n}), \\
&= i\left(\frac{2(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} - \frac{2(-1)^{-n}}{\pi(1-4(-n)^2)}\right), \\
&= i\left(\frac{2(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} - \frac{2(-1)^{-n}(-1)^n}{\pi(1-4n^2)(-1)^n}\right), \\
&= i\left(\frac{2(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} - \frac{2(-1)^{-n+n}}{\pi(1-4n^2)(-1)^n}\right), \\
&= i\left(\frac{2(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} - \frac{2}{\pi(1-4n^2)(-1)^n}\right), \\
&= i\left(\frac{2(-1)^n(-1)^n - 2}{\pi(1-4n^2)(-1)^n}\right), \\
&= i\frac{2-2}{\pi(1-4n^2)(-1)^n}, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Maintenant déterminons le coefficient a_0, on sait que :

$$a_0 = 2c_0 = 2\frac{2(-1)^0}{\pi(1-4\times 0^2)} = \frac{4}{\pi}.$$

Déterminons pour finir a_n (en procédant de la même façon que pour b_n), on sait que pour tout $n > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
a_n &= c_n + c_{-n}, \\
&= \frac{2(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} + \frac{2(-1)^{-n}}{\pi(1-4(-n)^2)}, \\
&= \frac{2}{\pi(1-4n^2)} + \frac{2}{\pi(1-4n^2)(-1)^n}, \\
&= \frac{2(-1)^n(-1)^n + 2}{\pi(1-4n^2)(-1)^n}, \\
&= \frac{4}{\pi(1-4n^2)(-1)^n}, \\
&= \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)(-1)^n(-1)^n}, \\
&= \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)(-1)^{2n}}, \\
&= \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}.
\end{aligned}$$

Déterminons la série de Fourier réelle de g_1.
Maintenant qu'on a calculé les coefficients de Fourier réels de g_1, on peut en déduire sa série de Fourier réelle :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos(2nx) + b_n \sin(2nx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} \cos(2nx).$$

Il faut maintenant refaire cette démarche mais avec la fonction g_2.
Déterminons les coefficients de Fourier complexes de g_2.

Soit $n \in \mathbb{Z}$, comme la fonction $g_2(t) = \cos(t)$ pour $t \in]0, \pi[$, on a :

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi} g_2(t) e^{-2int} dt, \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g_2(t) e^{-2int} dt \quad \text{car } g_2 \text{ est } \pi\text{-périodique}, \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t) e^{-2int} dt, \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} e^{-2int} dt, \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{it(1-2n)} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{it(-1-2n)} dt, \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{it(1-2n)}}{i(1-2n)} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{it(-1-2n)}}{i(-1-2n)} \right]_0^{\pi}, \\
&= \frac{e^{i\pi(1-2n)} - 1}{2\pi i(1-2n)} + \frac{e^{i\pi(-1-2n)} - 1}{2\pi i(-1-2n)}, \\
&= \frac{-1-1}{2\pi i(1-2n)} + \frac{-1-1}{2\pi i(-1-2n)}, \\
&= \frac{-2}{2\pi i(1-2n)} + \frac{-2}{2\pi i(-1-2n)}, \\
&= \frac{-1}{\pi i(1-2n)} + \frac{1}{\pi i(1+2n)}, \\
&= \frac{-1(1+2n) + 1(1-2n)}{\pi i(1-2n)(1+2n)}, \\
&= \frac{-4n}{\pi i(1-4n^2)}, \\
&= \frac{-4ni}{\pi (i)^2 (1-4n^2)}, \\
&= \frac{4ni}{\pi(1-4n^2)}.
\end{aligned}$$

Déterminons la série de Fourier complexe de g_2.
On en déduit que la série de Fourier complexe de g_2 est :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{i4n}{\pi(1-4n^2)} e^{2inx}.$$

Déterminons les coefficients de Fourier réels de g_2. Comme la fonction g_2 est impaire, alors pour tout $n \geq 0$,

$$a_n = 0.$$

On peut le vérifier grâce à la relation reliant a_n et c_n. Tout d'abord pour a_0, on a :

$$a_0 = 2c_0 = 2\frac{i4 \times 0}{\pi(1 - 4 \times 0^2)} = 0.$$

Ensuite pour tout $n > 0$, on a :

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{4in}{\pi(1-4n^2)} + \frac{4i(-n)}{\pi(1-4(-n)^2)} = \frac{4in}{\pi(1-4n^2)} + \frac{-4in}{\pi(1-4n^2)} = 0.$$

Déterminons maintenant le coefficients b_n, pour $n > 0$, on a :

$$\begin{aligned} b_n &= i(c_n - c_{-n}), \\ &= i\left(\frac{4in}{\pi(1-4n^2)} - \frac{-4in}{\pi(1-4n^2)}\right), \\ &= i\left(\frac{8in}{\pi(1-4n^2)}\right), \\ &= \frac{-8n}{\pi(1-4n^2)}, \\ &= \frac{8n}{\pi(4n^2-1)}. \end{aligned}$$

Déterminons la série de Fourier réelle de g_2.
Maintenant qu'on a déterminé les coefficients de Fourier réels de g_2, on peut en déduire sa série de Fourier réelle :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2nx) + b_n \sin(2nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{\pi(4n^2-1)} \sin(2nx).$$

3. (a) On souhaite déterminer la somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}.$$

Cette somme fait intervenir le terme $\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$ qui ressemble au coefficient de Fourier réel obtenu pour g_1. Plus précisément, on a vu que la série de Fourier de g_1 s'écrit sous la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} \cos(2nx) = \frac{4(-1)^n}{\pi(1-0)} \cos(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} \cos(2nx) = \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-4n^2)} \cos(2nx).$$

On sépare ici le premier terme de la somme, car on remarque que la somme qu'on souhaite calculer commence au rang $n = 1$.
Maintenant afin de se ramener à la somme qu'on souhaite calculer, il suffit de choisir une valeur particulière de x et plus précisément, une valeur telle que $\cos(2nx)$ vaille 1.
On choisit $x = \pi$, on a alors :

$$\frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-4n^2)} \cos(2nx) = \frac{4}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-4n^2)} \cos(2n\pi) = \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-4n^2)}.$$

Maintenant d'après le théorème de Dirichlet, on sait que la série de Fourier de g_1 converge vers g_1 pour tout point de continuité et π est un point de continuité de g_1 donc :

$$g_1(\pi) = |\cos(\pi)| = 1 = \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-4n^2)}.$$

Ainsi :

$$1 - \frac{4}{\pi} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1-4n^2)} = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}.$$

D'où :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = -\frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{4}{\pi}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{4}{\pi} - 1\right) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

(b) Déterminons la somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}.$$

Dans cette somme apparaît le terme $\dfrac{1}{4n^2-1}$ et ce terme apparaît également dans le coefficient de Fourier de g_1 (et pas de g_2 car dans celui de g_2, on a en plus un n au numérateur).
Par conséquent, il faut encore choisir une valeur particulière pour x dans la série de Fourier de g_1 qui vaut (d'après ce qu'on fait précédemment) :

$$\frac{4}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\cos(2nx).$$

Ici il faut donc choisir une valeur de x telle que $\cos(2nx)$ vaille $(-1)^n$ afin de faire disparaître le $(-1)^n$ du coefficient de Fourier.
On choisit donc $x=\dfrac{\pi}{2}$, car on a :

$$\begin{aligned}
\frac{4}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\cos(2nx) &= \frac{4}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\cos\left(2n\frac{\pi}{2}\right),\\
&= \frac{4}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\cos\left(2n\pi\right),\\
&= \frac{4}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}(-1)^n,\\
&= \frac{4}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{1-4n^2},\\
&= \frac{4}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Dirichlet, on sait que la série de Fourier de g_1 converge vers g_1 pour tout point de continuité de g_1, or $x=\dfrac{\pi}{2}$ est un point de continuité de g_1 donc :

$$g_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|=0=\frac{4}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}.$$

D'où :

$$-\frac{4}{\pi}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}=-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}.$$

Donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=1.$$

4. Déterminons la somme :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

Dans cette somme apparaît le terme $\dfrac{1}{(4n^2-1)^2}$ et ce terme n'apparaît pas directement dans les coefficients de Fourier des fonctions g_1, g_2. Ce terme ressemble plutôt au coefficients de Fourier de g_1 élevé au carré, il faut donc appliquer le théorème de Parceval qui fait intervenir le carré des coefficients de Fourier. Ce théorème s'écrit :

$$2a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g_1(t)^2dt.$$

Ce qui donne :

$$2\left(\frac{4}{\pi}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}\right)^2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos(t)|^2dt.$$

Déterminons chaque terme de cette égalité.
On a :

$$\begin{aligned}
2\left(\frac{4}{\pi}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}\right)^2 &= 2\frac{16}{\pi^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16(-1)^{2n}}{\pi^2(1-4n^2)^2},\\
&= \frac{32}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-4n^2)^2},\\
&= \frac{32}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}.
\end{aligned}$$

Et on a :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos(t)|^2dt &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t)^2dt,\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1+\cos(2t)}{2}dt,\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}1dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(2t)dt,\\
&= \frac{1}{\pi}[t]_0^{\pi}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi},\\
&= \frac{1}{\pi}\pi+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(2\pi)-\sin(0)}{2}\right),\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Par conséquent, de la relation :

$$2\left(\frac{4}{\pi}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}\right)^2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\cos(t)|^2dt.$$

On déduit que :

$$\frac{32}{\pi^2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}=1.$$

Donc :

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}=1-\frac{32}{\pi^2}.$$

Donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}=\frac{\pi^2}{16}\left(1-\frac{32}{\pi^2}\right)=\frac{\pi^2}{16}-2.$$