Exercice 1

Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et justifier :

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $x \leq n \leq y$;
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors $(ab \neq 0) \Leftrightarrow (a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0)$.

Exercice 2 $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel

On suppose qu'il existe deux entiers n et p tels que $\sqrt{2} = \frac{n}{p}$. On les suppose de plus choisi de telle sorte que la fraction soit irréductible.

1. Montrer que n est pair.
2. En écrivant n sous la forme $2n'$ où $n' \in \mathbb{N}$, montrer que p est pair.
3. Conclure.

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n + n(n-1)2^n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = \frac{u_n}{2^n}$$

1. Écrire la relation de récurrence vérifiée par v_n ;
2. Donner une expression de v_n en fonction de n. En déduire u_n.

Exercice 4

Calculer la somme suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |i - j|$$

Exercice 1

Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et justifier :

1. $\exists! y \in \mathbb{R}$, $\exists! x \in \mathbb{R}$; $x^2 = y$;
2. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $\Leftrightarrow$ $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2^n$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer trois réels a, b, c tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{4k+1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$
2. En déduire une expression de
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k+1}{k(k+1)(k+2)}$$
en fonction de n.

Exercice 4

Calculer la somme suivante :

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} 1$$

Exercice 1

Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et justifier :

1. La fonction f n'est pas la fonction nulle signifie que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$;
2. Une suite est soit croissante, soit décroissante.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda^n + \mu^n$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda \leq \mu$.
Montrer que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \lambda \leq \mu < 1$$

Exercice 3

1. Montrer que l'on définit bien une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ à termes strictement positifs en posant :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{1}{2n-1}\sum_{j=1}^{n-1} u_j$$

2. Déterminer u_2 et u_3.

Exercice 4

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$|x-2| + |x| + |x+1| = 5$$