Exercice 1

Les expressions logiques ci-dessous sont-elles toujours vraies ? Toujours fausses ? Parfois vraies et parfois fausses ?

1. $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$;
2. $\left(\overline{A} \Rightarrow B\right) \Leftrightarrow (B = A)$;
3. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant :

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall \eta > 0, \forall \epsilon > 0, |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$$

Que dire de f ? Puis écrire la négation de cette propriété.

Exercice 3

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2 - 1)} = \frac{n^2 + n - 2}{4n(n+1)}$$

2. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$, tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$:

$$\frac{1}{x(x^2 - 1)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x + 1}$$

3. Retrouver le résultat de la question 1. en utilisant la question 2..

Exercice 4

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$|x - 2| + |x| + |x + 1| = 5$$

Exercice 1

Les assertions sans "prime" sont-elles équivalentes aux assertions "primes" correspondantes ? En cas de réponse négative, l'une implique-t-elle l'autre ?

1. $P = \forall x, (P(x) \vee Q(x))$ et $P' = (\forall x, P(x)) \vee (\forall x, Q(x))$;
2. $P = \exists x, (P(x) \vee Q(x))$ et $P' = (\exists x, P(x)) \vee (\exists x, Q(x))$.

Exercice 2

Les assertions sans "prime" sont-elles équivalentes aux assertions avec "primes" correspondantes ? En cas de réponse négative, l'une implique-t-elle l'autre ?

1. $Q = A \Rightarrow (B \wedge C)$ et $Q' = (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$;
2. $R = (B \vee C) \Rightarrow A$ et $R' = (B \Rightarrow A) \vee (C \Rightarrow A)$.

Exercice 3

1. Montrer l'inégalité suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq x + 1$$
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0, \sqrt{n}]$:
$$e^{t^2}\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq 1$$

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n - 1}$$
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$u_{2n} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = -1$$

Exercice 1

Les assertions sans "prime" sont-elles équivalentes aux assertions avec "primes" correspondantes ? En cas de réponse négative, l'une implique-t-elle l'autre ?

1. $P = A \Rightarrow (B \vee C)$ et $P' = (A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)$;
2. $S = (B \wedge C) \Rightarrow A$ et $S' = (B \Rightarrow A) \wedge (C \Rightarrow A)$.

Exercice 2

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire les négations des propriétés suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists x' \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$;
2. $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M$;
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq M$.

Que signifie ces propriétés ?

Exercice 3

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$$

Exercice 4

1. Monter que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.
2. En déduire que $\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3,\ 8xyz \leq (x + y)(x + z)(y + z)$.