Exercice 1

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et justifier.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et si $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$, alors $u_n \longrightarrow 1$.
2. Toute suite géométrique de raison négative diverge.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Exercice 2

On considère la suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n\sqrt{2} - n$$

   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
2. Calculer en fonction de n v_n, puis u_n. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?
3. On considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$$

   Calculer s_n en fonction de n.

Exercice 3

Soit $n \geq 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$$

1. Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle vérifie : $0 < x_n \leq 1$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente. Notons ℓ sa limite.
3. a. Montrer que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} (x_n)^{n+1} = 0$$

   b. En trouvant une expression simplifiée de $P_n(x)$ sous forme de quotient, montrer que $\ell = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 4

1. Montrer que $\forall (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $k \leq n$:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

2. En déduire, $\forall n \in \mathbb{N}$, la valeur de S_n où :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

Exercice 1

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et justifier.

1. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$, alors $u_n \longrightarrow +\infty$.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors $(e^{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
3. $\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$,
$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)$$

Exercice 2

Soit $v \in \mathbb{R}$ tel que $0 < v < 1$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$0 < u_0 < u_1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = u_n + v^n u_{n-1}$$

1. Montrer que $\forall n \geq 2$,
$$u_n \leq u_1 \prod_{k=1}^{n-1} (1 + v^k)$$
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 3

1. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = \frac{w_0 + 2w_1 + \ldots + 2^n w_n}{2^{n+1}}$$
Montrer que si $\lim w_n = \alpha$ alors $\lim t_n = \alpha$.
2. On considère la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad a_{n+1} = \frac{1 + (n+1)a_n}{2n+3}$$
   a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :
$$0 < a_n \leq \frac{2}{n+1}$$
   b. En déduire la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $\forall n \geq 0$, $u_n = na_n$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \geq 0$, $v_n = 2u_{n+1} - u_n$.
   a. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b. Montrer que $\forall n \geq 0$:
$$u_{n+1} = \frac{v_0 + 2v_1 + \ldots + 2^n v_n}{2^{n+1}}$$
   c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4

1. Montrer que $\forall (n, k, i) \in \mathbb{N}^3$, tels que $k \leq i \leq n$,
$$\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{n-i}$$
2. En déduire, $\forall n \in \mathbb{N}$, la valeur de S_n où :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k}$$

Exercice 1

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses et justifier.

1. Si $\lim_n (u_{n+1} - u_n) = 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_{n+1} = (n+1)u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)^n$.
3. La somme :
$$\sum_{1\leq i<j\leq n} x_{i,j}$$
contient $\dfrac{n(n-1)}{2}$ termes.

Exercice 2

1. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$,
$$ln(1+x) \leq x \leq -ln(1-x)$$
2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

Exercice 3

Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :
$$\phi_0 = 0, \quad \phi_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n$$

1. Calculer ϕ_n en fonction de n.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$\phi_{n+1}^2 - \phi_n\phi_{n+2} = (-1)^n$$
3. Établir que la suite $\left(\dfrac{\phi_{n+1}}{\phi_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
4. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi_k = \phi_{2n}$$
   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \phi_k = -\phi_n$$

Exercice 4

Calculer les produits suivants :

1. Pour $n \geq 2$:
$$I_n = \prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right)$$
2. Pour $n \geq 1$:
$$J_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{i}}{2^i}$$