Exercice 1

1. Montrer que $\forall (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $k \leq n$:

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

2. En déduire, $\forall n \in \mathbb{N}$, la valeur de S_n où :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

Exercice 2

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k+1} \leq ln(k+1) - ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq ln(n+1)$ et en déduire la limite de la suite.

3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = u_n - ln(n)$$

   a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \geq 0$.
   b. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   c. En déduire que v_n admet une limite positive, que l'on notera γ.

4. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$w_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$$

   Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 3

Soit $n \geq 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$P_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$$

1. Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle vérifie : $0 < x_n \leq 1$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente. Notons ℓ sa limite.
3. a. Montrer que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} (x_n)^{n+1} = 0$$

   b. En trouvant une expression simplifiée de $P_n(x)$ sous forme de quotient, montrer que $\ell = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 1

Calculer $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$P_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} ij$$

Exercice 2

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels qui converge vers α.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

   $$v_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i}{n}$$

   converge vers α.
2. Montrer que si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.
3. Montrer que si $\lim u_n = -\infty$, alors $\lim v_n = -\infty$.
4. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$ par :

   $$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{n \times n}$$

Exercice 3

soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$ fixé. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4u_n - 2n^2 + 3n + 1 + \alpha^n$$

1. Déterminer a, b, c tels que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$,

   $$w_n = an^2 + bn + c$$

   vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$:

   $$w_{n+1} = 4w_n - 2n^2 + 3n + 1$$
2. Trouver un réel β pour que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$ par :

   $$t_n = \beta\alpha^n$$

   vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$ la relation :

   $$t_{n+1} = 4t_n + \alpha^n$$
3. En déduire une expression de u_n en fonction de u_0, α et n.

Exercice 1

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

Exercice 2

1. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = \frac{w_0 + 2w_1 + \ldots + 2^n w_n}{2^{n+1}}$$

   Montrer que si $\lim w_n = \alpha$ alors $\lim t_n = \alpha$.

2. On considère la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad a_{n+1} = \frac{1+(n+1)a_n}{2n+3}$$

   a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 < a_n \leq \frac{2}{n+1}$$

   b. En déduire la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $\forall n \geq 0$, $u_n = na_n$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \geq 0$, $v_n = 2u_{n+1} - u_n$.

   a. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   b. Montrer que $\forall n \geq 0$:

$$u_{n+1} = \frac{v_0 + 2v_1 + \ldots + 2^n v_n}{2^{n+1}}$$

   c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3

On considère une fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ positive, décroissante et dérivable.
On pose $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = f(n) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \int_0^n f(x)dx$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone puis qu'elle converge.