Exercice 1

Étudier la convergence des suites suivantes :

1. $\forall n \geq 0$,
$$u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}$$
2. $\forall n \geq 2$,
$$u_n = \left(\left(\frac{ln(1+n)}{ln(n)} \right)^n - 1 \right) ln(n)$$
3. $\forall n \geq 2$,
$$u_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^3-2n+1}}$$

Exercice 2

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall n \geq 2 \quad u_n = \int_0^1 \sqrt[n]{\sin(x)}dx$$
Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire qu'elle converge.
2. Démontrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,
$$\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$$
3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3

Pour $n \geq 1$, on pose :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. a. Montrer que pour tout $k \neq 0$,
$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{k}$$
   b. En déduire que pour tout $n \geq 2$,
$$S_n - 1 \leq ln(n) \leq S_n + 1$$
2. Établir un encadrement de S_n, puis montrer que $S_n \sim ln(n)$ en $+\infty$.

Exercice 1

Étudier la convergence des suites suivantes :

1. $\forall n \geq 1$,
$$u_n = \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

2. $\forall n \geq 1$,
$$u_n = \left(\frac{ln(n)}{ln(n+1)}\right)^{nln(n+1)}$$

3. $\forall n \geq 0$ et pour $0 < a \leq b$:
$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$$

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par :

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{kln(k)} - ln(ln(n))$$

1. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$:
$$\frac{1}{(p+1)ln(p+1)} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{tln(t)} dt \leq \frac{1}{pln(p)}$$

2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ converge.

Exercice 3

Déterminer la limite de la suite
$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

Puis donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$ en $+\infty$.

Exercice 1

Étudier la convergence des suites suivantes :

1. $\forall n \geq 1$,
$$u_n = \frac{n+1}{((-1)^n + e^{\frac{1}{n}})n}$$

2. $\forall n \geq 0$,
$$u_n = \frac{2n^2+1}{n+3} + \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

3. $\forall n \geq 1$,
$$u_n = \frac{n^2(ln(n+1) - ln(n))}{\sqrt{n^2+1}}$$

Exercice 2

Pour tout $n \geq 2$, on pose :
$$u_n = \frac{ln(n!)}{ln(n^n)}$$

1. a. Montrer que pour tout $k \geq 2$:
$$\int_{k-1}^{k} ln(t)dt \leq ln(k) \leq \int_{k}^{k+1} ln(t)dt$$
   b. En déduire un encadrement de $ln(n!)$, puis de u_n pour $n \geq 2$.
2. Qu'en déduire pour les suites $(ln(n!))_{n\geq 2}$ et $(ln(n^n))_{n\geq 2}$?

Exercice 3

On considère $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive, décroissante et dérivable. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = f(n) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k - \int_0^n f(x)dx$$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.