Exercice 1

Déterminer un équivalent de la suite u_n de terme général :

1. $u_n = \log_a\left(a+\dfrac{1}{n}\right) - \log_{a+\frac{1}{n}}(a)$ où $a \neq 0, 1$.
2. $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, où $0 < a < b$.

Exercice 2

Pour $n \geq 1$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. a. Montrer que pour tout $k \neq 0$,

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$$

   b. En déduire que pour tout $n \geq 2$,

$$S_n - 1 \leq ln(n) \leq S_n + 1$$

2. Établir un encadrement de S_n, puis montrer que $S_n \sim ln(n)$ en $+\infty$.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 (\tan(t))^n dt$$

1. Calculer u_0 et u_1.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, que vaut $u_{n+2} + u_n$?
3. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. En déduire que cette suite converge, puis déterminer sa limite.

Exercice 1

1. Déterminer un équivalent de la suite u_n de terme général :

$$u_n = (a)^{a+\frac{1}{n}} - \left(a + \frac{1}{n}\right)^a$$

où $a \neq 0, e$.

2. Déterminer la limite de la suite u_n de terme général :

$$u_n = n\left(2 + \cos\left(\frac{n\pi}{12}\right)\right)$$

Exercice 2

Pour tout $n \geq 2$, on pose :

$$u_n = \frac{ln(n!)}{ln(n^n)}$$

1. a. Montrer que pour tout $k \geq 2$:

$$\int_{k-1}^{k} ln(t)dt \leq ln(k) \leq \int_{k}^{k+1} ln(t)dt$$

   b. En déduire un encadrement de $ln(n!)$, puis de u_n pour $n \geq 2$.

2. Qu'en déduire pour les suites $(ln(n!))_{n\geq 2}$ et $(ln(n^n))_{n\geq 2}$?

Exercice 3

On considère, $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie pour tout $t \in [0,1]$ par :

$$f_n(t) = 2nte^{-nt^2}$$

On pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$$

1. Calculer, $\forall t \in [0,1]$, la limite de u_n quand $n \longrightarrow +\infty$.
2. Calculer I_n, puis en déduire sa limite quand $n \longrightarrow +\infty$.
3. Que peut-on dire de l'affirmation suivante :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(t)dt$$

Exercice 1

Déterminer un équivalent de la suite u_n de terme général :

1. $u_n = \left(\dfrac{\cos\left(\alpha + \frac{\beta}{n}\right)}{\cos(\alpha)} \right)^n$.
2. $u_n = n\left(\sqrt[n]{5} - 1\right)$.

Exercice 2

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \geq 2 \quad u_n = \int_0^1 \sqrt[n]{\sin(x)}dx$$

Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire qu'elle converge.

2. Démontrer que $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$$

3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3

Étudier les suites définies $\forall n \in \mathbb{N}$, par :

1.

$$u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}dt$$

2.

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)e^{-nt^2}dt$$