Exercice 1

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels et pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$. Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on définit le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ par :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. Soit $1 \leq i \leq n$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $1 \leq j \leq n$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
2. Montrer que la famille $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Exercice 1

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n avec $n \geq 2$. On vide l'urne en extrayant toutes les boules une à une, au hasard et sans remise.

1. Pour $1 \leq i \leq n$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule obtenue au i-ième tirage porte le numéro i et 0 dans le cas contraire. Quelle est la loi de X_i ?
2. En déduire l'espérance du nombre de fois où il y a coïncidence entre le rang du tirage et le numéro de la boule obtenue lorsqu'on vide l'urne.

Exercice 1

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $T : f \in E \longrightarrow T(f) = F$, où pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt.$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Montrer que pour tout $f \in E$, la fonction $F = T(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa dérivée.
3. T est-elle surjective ?