Exercice 1

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n et k boules bleues non numérotées. Les boules sont tirées avec remise jusqu'à ce qu'une boule bleue soit tirée.

1. Déterminer les probabilités des événements suivant :
   (a) $A_1 =$ "la première boule tirée est la boule numéro 1" ;
   (b) $A_2 =$ "la première boule tirée est une boule portant un numéro strictement supérieur à 1" ;
   (c) $A_3 =$ "la première boule tirée est une boule bleue".
2. On note A_0 l'événement "la boule numéro 1 n'est jamais tirée lors du jeu". Montrer que :

$$\mathbb{P}(A_0) = \frac{k}{k+1}.$$

Exercice 1

Soit $n \geq 2$. Soient $A, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que R est une racine carrée de A si $R^2 = A$.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit :
$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$
Calculer le carré de cette matrice et en déduire que la matrice identité d'ordre 2 admet une infinité de racines carrées.
2. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de racine carrée.

Exercice 1

Un lapin se déplace par bonds mutuellement indépendant de longueur fixe 1 en restant sur la droite $(O, \vec{i})$. On note X_n sa coordonnée après n bonds et D_n sa distance à l'origine. Au départ, le lapin est en 0 donc $X_0 = 0$.
On suppose que le lapin fait des bonds $x_i = X_i - X_{i-1}$ $(i \geq 1)$ successifs vers la droite (ie $x_i = 1$) avec la probabilité constante $p \in [0, 1]$ ou dans l'autre sens (ie $x_i = -1$) avec la probabilité $q = 1-p$.

1. Calculer la probabilité que le lapin soit revenu à son point de départ après $2n$ bonds.
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire D_n.