Exercice 1

Discuter l'existence et l'unicité dans le plan d'un quadrilatère dont les milieux des côtés sont donnés.

Exercice 2

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on considère :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 16 \\ 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{12}(A + 3I_3) \quad C = \frac{1}{12}(9I_3 - A)$$

1. Calculer $(A + 3I_3)(9I_3 - A)$ et A^2.
2. Déterminer $B + C$, $9B - 3C$, B^2, C^2 et BC.
3. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer B^p, C^p et A^p en fonction de p, B et C.

Exercice 3

Soient $A, X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $XA = I_n$ et $AY = I_n$. Montrer que $X = Y$.

Exercice 4

1. Soient :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = I_2$$
A et B sont-elles semblables ?
2. Soient :
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
C et D sont-elles semblables ?

Exercice 1

On considère le système d'inconnues x, y et de paramètres réels a, b, c :

$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ ax - by = c \end{cases}$$

On détermine a, b, c en lançant trois dés parfaits dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Déterminer la probabilité pour que le système ait :

1. une infinité de solutions ;
2. aucune solution ;
3. un couple unique de solution ;
4. l'unique solution $(x, y) = (3, 0)$.

Exercice 2

Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer X telle que $A = XB$.

Exercice 3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $A + B = I_n$ et $AB = 0_n$. Montrer que $A^2 = A$ et $B^2 = B$.

Exercice 4

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A \neq B$, $A^3 = B^3$ et $A^2B = B^2A$. La matrice $A^2 + B^2$ est-elle inversible ?

Exercice 1

L'espace usuel est muni d'un repère $(\mathcal{O}, x, y, z)$. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère les plans $(\mathcal{P}_1)$, $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{P}_3)$ d'équations respectives :

$$\begin{array}{ll} (\mathcal{P}_1) & x + my + z = 0 \\ (\mathcal{P}_2) & mx + y - mz = 0 \\ (\mathcal{P}_3) & x - my + z = 0 \end{array}$$

Discuter suivant les valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$, la nature de $(\mathcal{P}_1) \cap (\mathcal{P}_2)$, puis de $(\mathcal{P}_1) \cap (\mathcal{P}_2) \cap (\mathcal{P}_3)$.

Exercice 2 Matrices de Pauli

1. Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$M = a_0 I_2 + i a_1 \sigma_1 + i a_2 \sigma_2 + i a_3 \sigma_3$$

avec $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^4$ et

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Vérifier que :
   (a) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_2^2 = I_2$;
   (b) $\sigma_1 \sigma_2 = i\sigma_3$, $\sigma_2 \sigma_3 = i\sigma_1$ et $\sigma_3 \sigma_1 = i\sigma_2$;
   (c) $\sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i$ pour tous $i \neq j$.

Exercice 3

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que ${}^t X X = 1$. Soit T la matrice définie par : $T = I_n - 2X\,{}^t X$. Calculer T^2.

Exercice 4

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe un unique couple de matrices $(A, S) \in (\mathcal{A}_n(\mathbb{R}), \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))$ telles que $M = A + S$.