Exercice 1

Résoudre les équations suivantes :

1. $\cos(3x) = \sin x$;
2. $\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) + 2 = 0$;
3. $\cos(2x) + \cos x + 1 = 0$.

Exercice 2

Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(n\theta) = \sum_{0\leq 2k\leq n} \binom{n}{2k} \left(\cos^2\theta - 1\right)^k \cos^{n-2k}\theta$$

$$\sin(n\theta) = \sin\theta \sum_{0\leq 2k+1\leq n} \binom{n}{2k+1} \left(\cos^2\theta - 1\right)^k \cos^{n-2k-1}\theta$$

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients réels ou complexes de degré n.

1. Montrer que si le polynôme P est borné sur $\mathbb{R}$, alors il est constant. En déduire que les fonctions cosinus et sinus ne sont pas des fonctions polynomiales.
2. Montrer que :
$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{P(x)}{x^{n+1}} = 0$$
En déduire que la fonction exponentielle n'est pas polynomiale.
3. Montrer que :
$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{P(x)}{x^n} = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{P(x)}{x^n} = a_n$$
En déduire que la fonction valeur absolue n'est pas polynomiale.

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes :

1. $\cos(2x) = -\dfrac{1}{2}$;
2. $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$;
3. $\cos x = \sin x \sin(2x)$.

Exercice 2

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = 0 \\ \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 0 \end{cases}$$

Exercice 3

Soit $m \in \mathbb{N}$. Soit $P = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Calculer le degré des polynômes Q, R et S définis par : $Q(X) = P(X^2)$, $R(X) = P(X)^2$ et $S(X) = P^{(m)}(X)$.
2. Déterminer P de sorte que $P(X) = P(X+1)P(X-1)$.
3. En distinguant le cas où $m = 0$, étudier le degré de $P(X) - P(X-1)$.

ophelie.rouby@ens-cachan.org

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes :

1. $\sin(2x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
2. $\cos x + \sin x = 1$;
3. $\cos(3x) + 6\cos(2x) + 15\cos x + 10 = 0$.

Exercice 2

Calculer les sommes suivantes :

1. $$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$$
2. $$B_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx)$$

Exercice 3

Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A = X^n$ et $B = X^2 - 3X + 2$;
2. $A = X^n$ et $B = (X-1)^2$.