Exercice 1

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Soit $h \in \mathbb{R}$. On pose :

$$R(X) = P(h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(X)}{k!}(h - X)^k$$

1. Calculer $R(h)$, puis $R'(X)$.
2. En déduire que $\forall h \in \mathbb{R}$:
$$P(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(X)}{k!}(h - X)^k$$

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X \sin\theta + \cos\theta)^n$ par $X^2 + 1$.
2. Déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ dont les restes de la division euclidienne par $X^2 + 1$ et $X^2 - 1$ sont tous les deux égaux à $2X - 1$.

Exercice 3

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $\sin 4\theta$ et le mettre sous la forme d'un produit de $\sin\theta$ par un polynôme en $\cos\theta$.
2. Montrer dans le cas général que $\sin(n + 1)\theta$ s'écrit en fonction de $\sin\theta$, $\cos\theta$ et n sous la forme : $\sin(n + 1)\theta = \sin\theta \, U_n(\cos\theta)$ où U_n désigne un polynôme.

Exercice 1

Déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient $P(z+1) = P(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 2

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. On suppose que $\forall k \neq 0$, $P^{(k)}(1) = 0$. Montrer que P est constant.
2. On suppose que $P(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in [-1, 1]$. Montrer que les coefficients de P sont réels.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une famille de réels tels que $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.

1. Montrer que pour tout i tel que $0 \leq i \leq n$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $L_i(x_i) = 1$ et $L_i(x_j) = 0$, $\forall j \neq i$ et $0 \leq j \leq n$.
2. Prouver que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$:
$$P = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) L_k$$
En déduire les égalités suivantes :
$$\sum_{k=0}^{n} L_k = 1 \quad \text{et, } \forall p \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad \sum_{k=0}^{n} x_k^p L_k = X^p$$
3. On considère l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\phi(P) = \int_0^1 P(x)dx$, $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe une famille unique de nombres réels $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que :
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \phi(P) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i)$$

Exercice 1

Soient $n+1$ polynômes $P_0, \ldots, P_n$ de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $\deg P_k = k$. Montrer que $\forall \lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Exercice 2

Soient $A = X^2 + X + 1$ et $B = X^{2n} + X^n + 1$.

1. Montrer que $A = (X - j)(X - \overline{j})$ où $j = e^{2i\pi/3}$.
2. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A divise B.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme T_n de degré n tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.
3. Montrer que le polynôme T_n est l'unique polynôme vérifiant cette égalité. Puis exprimer $T_{n+1}(X)$ en fonction de $T_n(X)$ et $T_{n-1}(X)$.
4. En prenant la partie réelle de $e^{in\theta}$, montrer que :

$$T_n(X) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}$$